PEMBAHASAN
OSN MATEMATIKA SMP
TAHUN 2017

1. **Penyelesaian :**

Langkah 1: Ubah variabel untuk menyederhanakan ekspresi
Untuk menyederhanakan pertidaksamaan, kita dapat mengganti x^2 dengan y. Karena x adalah bilangan riil, maka $y = x^2$ harus lebih besar dari atau sama dengan 0 ($y \geq 0$).
Pertidaksamaan awal menjadi:

$$\frac{y-3}{y-1} + \frac{y+5}{y+3} \geq \frac{y-5}{y-3} + \frac{y+3}{y+1}$$

Kita dapat menyederhanakan setiap suku dengan memanipulasi pembilang:

- $\frac{y-3}{y-1} = \frac{(y-1)-2}{y-1} = 1 - \frac{2}{y-1}$
- $\frac{y+5}{y+3} = \frac{(y+3)+2}{y+3} = 1 + \frac{2}{y+3}$
- $\frac{y-5}{y-3} = \frac{(y-3)-2}{y-3} = 1 - \frac{2}{y-3}$
- $\frac{y+3}{y+1} = \frac{(y+1)+2}{y+1} = 1 + \frac{2}{y+1}$

Substitusikan suku-suku yang telah disederhanakan kembali ke dalam pertidaksamaan:

$$\left(1 - \frac{2}{y-1}\right) + \left(1 + \frac{2}{y+3}\right) \geq \left(1 - \frac{2}{y-3}\right) + \left(1 + \frac{2}{y+1}\right)$$

$$2 - \frac{2}{y-1} + \frac{2}{y+3} \geq 2 - \frac{2}{y-3} + \frac{2}{y+1}$$

Langkah 2: Selesaikan pertidaksamaan dalam variable y
Kurangi 2 dari kedua sisi dan bagi dengan 2:

$$-\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+3} \geq -\frac{1}{y-3} + \frac{1}{y+1}$$

Pindahkan suku-suku agar semua suku positif berada di satu sisi dan semua suku negative berada di sisi lain:

$$\frac{1}{y+3}+\frac{1}{y-3}\geq\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}$$

Gabungkan pecahan pada setiap sisi:

$$\frac{(y-3)+(y+3)}{(y+3)(y-3)}\geq\frac{(y+1)+(y-1)}{(y-1)(y+1)}$$

$$\frac{2y}{y^2-9}\geq\frac{2y}{y^2-1}$$

Pertidaksamaan ini berlaku untuk $y \neq \pm 1$ dan $y \neq \pm 3$. Karena $y = x^2 \geq 0$, kta hanya perlu memperhatikan $y \neq 1$ dan $y \neq 3$.
Pindahkan semua suku ke sisi kiri:

$$\frac{2y}{y^2-9}-\frac{2y}{y^2-1}\geq 0$$

$$2y\left(\frac{1}{y^2-9}-\frac{1}{y^2-1}\right)\geq 0$$

$$2y\left(\frac{(y^2-1)-(y^2-9)}{(y^2-9)(y^2-1)}\right)\geq 0$$

$$2y\left(\frac{8}{(y^2-9)(y^2-1)}\right)\geq 0$$

$$\frac{16y}{(y^2-9)(y^2-1)}\geq 0$$

$$\frac{16y}{(y-3)(y+3)(y-1)(y+1)}\geq 0$$

Karena $y = x^2 \geq 0$ dan kita mencari solusi riil untuk x, maka $y + 1$ dan $y + 3$ selalu positif. Pertidaksamaan dapat disederhanakan menjadi:

$\frac{y}{(y-3)(y-1)} \geq 0$

Dengan menguji interval, kita menemukan bahwa solusi untuk y adalah $0 \leq y < 1$ atau $y > 3$.

Langkah 3: Substitusi kembali variable dan temukan solusi untuk x
Substitusikan kembali $y = x^2$ ke dalam solusi untuk y.

- Untuk $0 \leq y < 1$:
  $0 \leq x^2 < 1$. Ini berarti $-1 < x < 1$.
- Untuk $y > 3$:
  $x^2 > 3$. Ini berarti $x < -\sqrt{3}$ atau $x > \sqrt{3}$.

Gabungkan kedua solusi untuk mendapatkan semua bilangan riil x yang memenuhi pertidaksamaan.

Jadi, Semua bilangan riil x yang memenuhi pertidaksamaan adalah $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-1,1) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.

2. **Penyelesaian :**
Sudah diketahui umum bahwa digit satuan dari kuadrat sempurna adalah {0, 1, 4, 5, 6, 9}. Ini akan mengurangi jumlah kemungkinan m.
Jelas, bilangan empat digit tidak boleh memiliki digit awal 0.
Kita peroleh:
$$1521 = 39^2, 1681 = 41^2$$
$$4764 = 68^2$$
$$5625 = 75^2$$
$$9409 = 97^2$$
Total kemungkinan bilangan 5 adalah $m \in \{1521, 1681, 4764, 5625, 9409\}$.

3. **Penyelesaian :**
Volume Benda Putar
Langkah 1: Memahami Geometri dan Rotasi
Kita memiliki segitiga sama kaki $\triangle ABP$ dengan $AB = BP$. Titik C berada pada BP. Kita akan memutar $\triangle ABC$ mengelilingi garis AP. Benda putar yang terbentuk adalah kerucut terpancung (frustum) dikurangi kerucut.

Langkah 2: Menentukan Tinggi dan Jari-jari
Pertama, kita perlu mencari tinggi dan jari-jari kerucut yang akan digunakan. Karena $AB = BP = 12$, dan AP adalah sumbu putar, maka jarak dari B ke AP adalah jari-jari kerucut besar, dan jarak dari C ke AP adalah jari-jari kerucut kecil. Misalkan h_B adalah tinggi dari B ke AP, dan h_c adalah tinggi dari C ke AP. Misalkan r_B adalah jari-jari dari B ke AP dan r_C adalah jari-jari dari C ke AP.
Karena $\triangle ABP$ adalah segitiga sama kaki dengan $AB = BP = 12$ dan AP adalah alas, maka garis tinggi dari B ke AP akan membagi AP menjadi dua sama Panjang. Dari gambar, Panjang $AP = 18$. Jadi, jika kita Tarik garis tinggi dari B ke AP (misalkan titik M pada AP), maka $AM = MP = \frac{18}{2} = 9$. Dengan Teorema Pythagoras pada $\triangle AMB$, kita punya
$$BM^2 = AB^2 - AM^2 = 12^2 - 9^2 = 144 - 81 = 63.$$
Jadi, $BM = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$. Ini adalah jari-jari r_B dari kerucut yang dibentuk oleh rotasi $\triangle ABP$. Karena C berada pada BP dan $BC = 12$, maka $CP = BP - BC = 12 - 12 =$

0. Ini berarti titik C berimpit dengan titik P. Ini menyiratkan bahwa benda putar yang terbentuk dari rotasi $\triangle ABC$ mengelilingi AP sebenarnya adalah kerucut penuh yang dibentuk oleh rotasi $\triangle ACP$. Namun, karena C berimpit dengan P, maka $\triangle ACP$ tidak membentuk kerucut (luasnya nol). Jadi, volume yang dicari adalah volume kerucut yang terbentuk dari rotasi $\triangle ABP$ mengelilingi AP.

Langkah 3: Menghitung Volume
Volume kerucut diberikan oleh rumus $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Dalam kasus ini, $r = BM = 3\sqrt{7}$ dan $h = AP = 18$.

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(3\sqrt{7}\right)^2(18)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi(9 \times 7)(18)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi(63)(18)$$
$$V = \pi(21)(18)$$
$$V = 378\pi$$

Volume benda putar yang diperoleh dengan memutar $\triangle ABC$ mengelilingi garis AP adalah 378π.

4. **Penyelesaian :**
   Mari kita pilih 3 siswa laki-laki dan 3 siswa perempuan sebagai kandidat untuk hadiah. Jumlah kombinasinya adalah
   $$\binom{10}{3} \cdot \binom{12}{3} = 26400$$
   Kemudian kita perlu menetapkan 6 hadiah kepada 6 kandidat. Jumlah kemungkinan penugasan adalah
   $$\frac{6!}{1!2!3!} = 60$$
   Maka, jumlah kemungkinan susunannya adalah
   $$26400 \times 60 = \boxed{1,584,000}$$

5. **Penyelesaian :**
   Misalkan S_1 adalah subset dari S dengan semua elemen bersisa 1 jika dibagi dengan 5.
   $|S_1| = 15$
   Misalkan S_2 adalah subset dari S dengan semua elemen bersisa 2 jika dibagi dengan 5.
   $|S_2| = 15$

Misalkan S_3 adalah subset dari S dengan semua elemen bersisa 3 jika dibagi dengan 5. $|S_3| = 14$
Misalkan S_4 adalah subset dari S dengan semua elemen bersisa 4 jika dibagi dengan 5. $|S_4| = 14$
Misalkan S_5 adalah subset dari S dengan semua elemen kelipatan 5. $|S_5| = 15$.

Kerjakan soal kasus dengan semua kemungkinan kombinasi.
#1, hanya ada satu bilangan A yang berasal dari setiap subset $S(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$. Banyaknya subset A tersebut adalah

$$\binom{15}{1} \cdot \binom{15}{1} \cdot \binom{14}{1} \cdot \binom{14}{1} \cdot \binom{15}{1} = 661,500$$

#2, dua angka A berasal dari S_1, dua angka dari S_4, dan satu angka dari S_5. Banyaknya himpunan bagian A tersebut adalah

$$\binom{15}{2} \cdot \binom{14}{2} \cdot \binom{15}{1} = 143,325$$

#3, dua angka A berasal dari S_2, dua angka dari S_3, dan satu angka dari S_5. Banyaknya himpunan bagian A tersebut adalah

$$\binom{15}{2} \cdot \binom{14}{2} \cdot \binom{15}{1} = 143,325$$

#4, Kelima bilangan A berasal dari salah satu subset $S(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$. Banyaknya subset A tersebut adalah

$$\binom{15}{5} + \binom{15}{5} + \binom{14}{5} + \binom{14}{5} + \binom{15}{5} = 13,013$$

Dengan demikian, jumlah total \$A\$ yang mungkin adalah

$$661,500 + 143,325 \times 2 + 13,013 = \boxed{961,163}$$

6. Penyelesaian :

$A = (0,0)$

$B = (-b/a, 0)$

$C = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a})$ Perhatikan juga $-\frac{b^2}{4a} > 0$

$D = (\frac{a-b}{a}, a-b)$

Kita tahu bahwa garis $y = ax$ memiliki gradien negatif dan akan memotong parabola di titik D di bawah sumbu x.
Koordinat Y dari titik D harus negatif.

$a - b < 0$
$a < b$
Karena $a < 0, b > 0$ (Jika b adalah 0, parabola tidak memotong sumbu x di 2 titik yang berbeda)
$|ab| = |a| \times |b| = -ab$
Luas $ABC = |ab|$ Luas $ABD = -ab$ Luas ABD
Segitiga ABC dan ABD memiliki alas yang sama AB

$$-\frac{b^2}{4a} = -ab(a-b)$$

$$\boxed{b = \frac{4a^3}{4a+1}}$$

7. Penyelesaian :

Perhatikan bahwa FPB$(k, k-a) = 1$ atau a

Kasus 1 FPB$(k, k-a) = 1$,
Misalkan $k = p^2, k - a = q^2$, $p, q \in \mathbb{N}$, kita memiliki $a = p^2 - q^2$. Jadi $p = q + 1$ dan $p + q = a$. Kita memiliki

$$k = \frac{(a+1)^2}{4}$$

Kasus 2 FPB$(k, k-a) = a$,
Misalkan $k = r^2 a$, $k - a = s^2 a$, FPB$(r, s) = 1, r, s \in \mathbb{N}$, kita memiliki $r^2 a - a = s^2 a \Leftrightarrow r^2 - s^2 = 1$, jadi $r = 1$, $s = 0$. Jadi $k = a$, maka $\sqrt{k(k-a)} = 0$. Kontradiksi.

$$\therefore k = \frac{(a+1)^2}{4}$$

8. Penyelesaian :

Langkah 1: Memahami definisi t_{ij} dan hubungan dengan luas segitiga
Diberikan t_{ij} adalah jarak dari titik T ke garis T_iT_j. Kita dapat menyatakan luas segitiga TT_iT_j dengan dua cara:
Luas $\triangle TT_iT_j = \frac{1}{2} \cdot TT_i \cdot TT_j \cdot \sin(\angle T_iTT_j)$
Luas $\triangle TT_iT_j = \frac{1}{2} \cdot T_iT_j \cdot t_{ij}$
Dari kedua persamaan ini, kita dapat menyimpulkan bahwa

$$t_{ij} = \frac{TT_i \cdot TT_j \cdot \sin(\angle T_iTT_j)}{T_iT_j}$$

Langkah 2: Membuktikan $\frac{t_{ij}}{t_{jk}} = \frac{TT_i}{TT_k}$

Dengan menggunakan rumus t_{ij} dari Langkah 1:

$$\frac{t_{ij}}{t_{jk}} = \frac{\frac{TT_i \cdot TT_j \cdot \sin(\angle T_i T T_j)}{T_i T_j}}{\frac{TT_j \cdot TT_k \cdot \sin(\angle T_j T T_k)}{T_j T_k}}$$

Karena T_i, T_j, T_k, T berada pada lingkaran yang sama, maka $\angle T_i T T_j = \angle T_i T_j T_k$ dan $\angle T_j T T_k = \angle T_j T_i T_k$. Juga, berdasarkan teorema sinus pada segitiga TT_iT_j, $\frac{T_iT_j}{\sin(\angle T_i T T_j)} = 2R$ (dengan R adalah jari-jari lingkaran Ω). Maka, $T_iT_j = 2R\ \sin(\angle T_i T T_j)$ dan $T_jT_k = 2R\ \sin(\angle T_j T T_k)$. Substitusikan kembali ke persamaan rasio $\frac{t_{ij}}{t_{jk}}$:

$$\frac{t_{ij}}{t_{jk}} = \frac{TT_i \cdot TT_j \cdot \sin(\angle T_i T T_j)/(2R\ \sin\left(\angle T_i T T_j\right))}{TT_j \cdot TT_k \cdot \sin(\angle T_j T T_k)/(2R\ \sin(\angle T_j T T_k))}$$

Jadi, terbukti bahwa $\frac{t_{ij}}{t_{jk}} = \frac{TT_i}{TT_k}$.

Langkah 3: Membuktikan $\frac{t_{12}}{t_{24}} = \frac{t_{13}}{t_{34}}$

Berdasarkan hasil pembuktian di Langkah 2:

Untuk $i = 1, j = 2, k = 4$: $\frac{t_{12}}{t_{24}} = \frac{TT_1}{TT_4}$

Untuk $i = 1, j = 3, k = 4$: $\frac{t_{13}}{t_{34}} = \frac{TT_1}{TT_4}$

Karena kedua rasio tersebut sama dengan $\frac{TT_1}{TT_4}$, maka dapat disimpulkan bahwa $\frac{t_{12}}{t_{24}} = \frac{t_{13}}{t_{34}}$.

Jadi, Pembuktian Pertama: Dengan menggunakan definisi $t_{ij} = \frac{TT_i \cdot TT_j \cdot \sin(\angle T_i T T_j)}{T_i T_j}$ dan sifat -sifat geometri pada lingkaran, didapatkan bahwa $\frac{t_{ij}}{t_{jk}} = \frac{TT_i}{TT_k}$.

Pembuktian Kedua: Menggunakan hasil dari pembuktian pertama, kita dapat menulis $\frac{t_{12}}{t_{24}} = \frac{TT_1}{TT_4}$ dan $\frac{t_{13}}{t_{34}} = \frac{TT_1}{TT_4}$. Karena kedua rasio tersebut sama, maka terbukti bahwa $\frac{t_{12}}{t_{24}} = \frac{t_{13}}{t_{34}}$.

9. Penyelesaian :

Menentukan a_{2017} dalam Barisan Bilangan dengan Angka Penyusun Tak-Naik

Langkah 1: Memahami Sifat Barisan

Barisan bilangan bulat positif 7-angka $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2017}$ memiliki sifat bahwa setiap suku memiliki angka-angka penyusun dengan urutan tak-naik (non-increasing). Ini berarti jika suatu bilangan adalah $d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$, maka $d_6 \geq d_5 \geq d_4 \geq d_3 \geq d_2 \geq d_1 \geq d_0$. Diketahui $a_1 = 1000000$. a_{n+1} adalah bilangan terkecil yang mungkin yang lebih besar dari a_n dengan tetap mempertahankan sifat angka penyusun tak-naik.

Langkah 2: Menentukan a_2 dan a_3

- Untuk $a_1 = 1000000$, angka penyusunnya adalah 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, yang sudah tak-naik.
- Untuk mencari a_2, kita perlu mencari bilangan 7-angka terkecil yang lebih besar dari a_1 dan memiliki angka penyusun tak-naik. Angka penyusun tak-naik berikutnya setelah 1000000 adalah 1100000. Ini karena kita menaikkan angka kedua dari kiri menjadi 1, dan sisanya tetap 0 agar menjadi yang terkecil. Jadi, $a_2 = 1100000$.
- Untuk mencari a_3, kita mencari bilangan 7-angka terkecil yang lebih besar dari $a_2 = 1100000$ dengan angka penyusun tak-naik. Dengan logika yang sama, kita menaikkan angka ketiga dari kiri menjadi 1, dan sisanya tetap 0. Jadi, $a_3 = 1110000$.

Langkah 3: Mengidentifikasi Pola Barisan
Dari contoh $a_1 = 1000000, a_2 = 1100000, a_3 = 1110000$, terlihat sebuah pola:

- a_1 memiliki satu angka 1 di posisi paling kiri.
- a_2 memiliki dua angka 1 di dua posisi paling kiri.
- a_3 memiliki tiga angka 1 di tiga posisi paling kiri.

Secara umum, a_n akan memiliki n buah angka 1 di n posisi paling kiri, diikuti oleh $(7 - n)$ buah angka 0.

Langkah 4: Menentukan a_{2017}
Berdasarkan pola yang di temukan, a_n akan memiliki n buah angka 1 di posisi paling kiri. Namun, perlu diingat bahwa bilangan tersebut adalah bilangan 7-angka. Jadi, a_n akan memiliki n buah angka 1 di posisi paling kiri, dan sisanya adalah 0, hingga mencapai 7 buah angka. Oleh karena itu, a_{2017} akan memiliki 7 buah angka 1 di posisi paling kiri (karena 2017 > 7), diikuti oleh 0 buah angka 0. Maka, a_{2017} adalah bilangan 7-angka yang seluruhnya terdiri dari angka 1.

Jadi, $a_{2017} = 1111111$.

10. Penyelesaian :

Langkah 1: Menentukan Laju Pengisian Pompa
Diketahui:

- Pompa-1 mengisi penuh tangki volume V dalam 4 jam. Laju pengisian Pompa-1 adalah $R_1 = \frac{V}{4}$ per jam.
- Pompa-2 mengisi penuh tangki volume V dalam 6 jam. Laju pengisian Pompa-2 adalah $R_2 = \frac{V}{6}$ per jam.

Langkah 2: Menentukan Total Volume yang Terisi
Total volume V diisi dalam tiga tahap:
1. Kedua pompa digunakan bersamaan a jam. Volume terisi:
$$V_{ab} = (R_1 + R_2)a = \left(\frac{V}{4} + \frac{V}{6}\right) a = \left(\frac{3V + 2V}{12}\right) a = \frac{5V}{12} a.$$
2. Hanya Pompa-1 digunakan selama b jam. Volume terisi: $V_1 = R_1 b = \frac{V}{4} b$.
3. Hanya Pompa-2 digunakan selama c jam. Volume terisi: $V_2 = R_2 b = \frac{V}{6} c$.

Total volume terisi harus sama dengan V.
$V = \frac{5V}{12} a + \frac{V}{4} b + \frac{V}{6} c$
Bagi semua ruas dengan V:
$1 = \frac{5}{12} a + \frac{1}{4} b + \frac{1}{6} c$
Dari persamaan ini, kita dapat menyatakan c sebagai fungsi dari a dan b:
$\frac{1}{6} c = 1 - \frac{5}{12} a - \frac{1}{4} b$
$c = 6 - \frac{30}{12} a - \frac{6}{4} b = 6 - \frac{5}{2} a - \frac{3}{2} b$

Langkah 3: Menentukan Fungsi Biaya Operasional
Biaya operasional Pompa-1: $K_1 = 15(a + b)$ ribu per jam.
Biaya operasional Pompa-2: $K_2 = 4(a + c)$ ribu per jam.

Total biaya operasional B (dalam ribu):
$B = K_1(a + b) + K_2(a + c)$
Ini adalah kesalahan interpretasi. Biaya operasional per jam adalah 15 dan 4, bukan $15(a + b)$ dan $4(a + c)$.

Biaya operasional total (B) adalah biaya per jam dikalikan total waktu operasi masing-masing pompa.
Pompa-1 beroperasi selama a jam (Bersama pompa-2) dan b jam (sendiri), jadi total waktu operasi Pompa-1 adalah $a + b$.
Pompa-2 beroperasi selama a jam (Bersama pompa-1) dan c jam (sendiri), jadi total waktu operasi Pompa-2 adalah $a + c$.

Biaya per jam Pompa-1 adalah 15 ribu. Total biaya Pompa-1: $B_1 = 15(a + b)$.
Biaya per jam Pompa-2 adalah 4 ribu. Total biaya Pompa-2: $B_2 = 4(a + c)$.

Total biaya B:
$B = 15(a + b) + 4(a + c)$

Substitusikan $c = 6 - \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}b$ ke dalam fungsi biaya:
$B(a, b) = 15a + 15b + 4a + 4\left(6 - \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}b\right)$
$B(a, b) = 19a + 15b + 24 - 10a - 6b$
$B(a, b) = 9a + 9b + 24$

Langkah 4: Meminimumkan Biaya Operasional
Kita perlu meminimalkan $B(a, b) = 9a + 9b + 24$.
Karena a dan b adalah waktu, maka $a \geq 0$ dan $b \geq 0$.
Juga, dari $c = 6 - \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}b$, kita harus memiliki $c \geq 0$, sehingga:
$6 - \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}b \geq 0$
$12 - 5a - 3b \geq 0$
$5a + 3b \leq 12$

Untuk meminimalkan fungsi linear $B(a, b) = 9a + 9b + 24$ dengan kendala $5a + 3b \leq 12, a \geq 0, b \geq 0$, nilai minimum akan tercapai pada titik sudut daerah layak. Namun, karena koefisien a dan b pada fungsi biaya positif, untuk meminimalkan B, kita perlu meminimalkan a dan b.

Dari kendala $5a + 3b \leq 12$, kita bisa melihat bahwa untuk $a, b \geq 0$, nilai minimum a dan b secara individu adalah 0.

Langkah 5: Menentukan b dan c sebagai Fungsi dari a untuk Biaya Minimum
Untuk meminimalkan $B = 9a + 9b + 24$, dengan a sudah diberikan, kita perlu meminimalkan b.
Dari kendala $5a + 3b \leq 12$, untuk meminimalkan b pada nilai a tertentu, kita harus membuat b sekecil mungkin, yaitu $b = 0$.
Namun, kita harus memastikan bahwa $c \geq 0$.
Jika $b = 0$, maka $c = 6 - \frac{5}{2}a$.
Agar $c \geq 0$, maka $6 - \frac{5}{2}a \geq 0 \Longrightarrow 6 \geq \frac{5}{2}a \Longrightarrow 12 \geq 5a \Longrightarrow a \leq \frac{12}{5}$.
Jadi, untuk meminimumkan biaya, kita harus mengambil $b = 0$.

Maka, $c = 6 - \frac{5}{2}a$.
$b = 0$
$c = 6 - \frac{5}{2}a$

Langkah 6: Menentukan Nilai a yang mungkin
Nilai a adalah waktu, jadi $a \geq 0$.
Dari $c \geq 0$, kita mendapatkan $a \leq \frac{12}{5}$.
Juga, secara fisik, pengisian tangka tidak boleh kurang dari volume V, jadi waktu total pengisian haruslah positif.
Jika $a = 0$, maka $b = 0$ dan $c = 6$.
Total volume: $\frac{5}{12}(0) + \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{6}(6) = 1$. Ini valid.
Jika $a = \frac{12}{5}$, maka $b = 0$ dan $c = 0$.
Total volume: $\frac{5}{12}\left(\frac{12}{5}\right) + \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{6}(0) = 1$. Ini juga valid.
Jadi, nilai a yang mungkin adalah $0 \leq a \leq \frac{12}{5}$.

Jadi, untuk meminimalkan biaya operasional, nilai b dan c sebagai fungsi dari a adalah:
$b = 0$
$c = 6 - \frac{5}{2}a$
Nilai a yang mungkin adalah $0 \leq a \leq \frac{12}{5}$.