



JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMP

TAHUN 2016

1. Penyelesaian :

Untuk $x \leq 0$, sisi kiri positif dan sisi kanan non-positif, yang mengakibatkan kontradiksi. Jadi, $x > 0$. Dengan membagi kedua sisi dengan x^{2015} , kita peroleh

$$(1 + x^2 + \dots + x^{2014})(x + \frac{1}{x^{2015}}) = 2016$$
$$x + \frac{1}{x} + x^3 + \frac{1}{x^3} + \dots + x^{2015} + \frac{1}{x^{2015}} = 2016$$

Dengan AM-GM, kita tahu bahwa kesetaraan hanya terjadi ketika $x = 1$.

2. Penyelesaian :

Step 1: Memahami Struktur Deret dan Kebutuhan Modulo Kita diminta untuk menemukan tujuh angka terakhir dari A , yang setara dengan menghitung $A \pmod{10^7}$. Deret A diberikan sebagai:

$$A = 2 + 20 + 201 + 2016 + 20162 + \dots + \underbrace{20162016 \dots 2016}_{40 \text{ angka}}$$

Pola pembentukan suku-suku deret adalah dengan menambahkan digit-digit dari pola berulang “2016”.

Misalnya :

$$u_1 = 2$$

$$u_2 = 20$$

$$u_3 = 201$$

$$u_4 = 2016$$

$$u_5 = 20162$$

$$u_6 = 201620$$

$$u_7 = 2016201$$

Suku terakhir dalam deret memiliki 40 digit, yang terbentuk dari pengulangan pada “2016” sebanyak $40/4 = 10$ kali.

Step 2: Menghitung Tujuh Angka Terakhir dari Setiap Suku yang Relevan
Karena kita mencari $A \pmod{10^7}$, kita hanya perlu mempertimbangkan 7 digit terakhir dari setiap suku.

Kita akan memisahkan deret menjadi dua bagian: suku-suku dengan panjang kurang dari 7 digit dan suku-suku dengan panjang 7 digit atau lebih.

a. Jumlah 7 suku pertama (panjang kurang dari atau sama dengan 7 digit):





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



$$S_7 = 2 + 20 + 201 + 2016 + 20162 + 201620 + 2016201$$

$$S_7 = 2240822$$

- b. Jumlah suku ke-8 sampai suku ke-40 (panjang lebih dari 7 digit):

Kita perlu menghitung $u_k \pmod{10^7}$ untuk $k = 8, \dots, 40$.

Perhatikan pola 7 digit terakhir dari suku-suku ini:

$$u_8 = 20162016 \equiv 162016 \pmod{10^7}$$

$$u_9 = 201620162 \equiv 1620162 \pmod{10^7}$$

$$u_{10} = 2016201620 \equiv 6201620 \pmod{10^7}$$

$$u_{11} = 20162016201 \equiv 2016201 \pmod{10^7}$$

$$u_{12} = 201620162016 \equiv 162016 \pmod{10^7}$$

Pola 7 digit terakhir ini berulang setiap 4 suku:

$$(162016, 1620162, 6201620, 2016201)$$

Jumlah satu siklus dari 4 suku ini adalah:

$$(162016 + 1620162 + 6201620 + 2016201) = 10000000 - 1 \equiv -1 \pmod{10^7}$$

Ada $40 - 7 = 33$ suku dari u_8 sampai u_{40} .

Jumlah 33 suku ini dapat dibagi menjadi siklus 4 suku: $33 = 8 \times 4 + 1$.

Jadi, ada 8 siklus lengkap dan 1 suku tambahan.

Jumlah dari 8 siklus adalah $8 \times (-1) = -8 \pmod{10^7}$.

Suku tambahan ini adalah suku pertama dari pola berulang (yaitu $u_8 \pmod{10^7}$, yang nilainya 162016).

Jadi, jumlah suku dari u_8 hingga u_{40} adalah $-8 + 162016 = 162008 \pmod{10^7}$.

Step 3: Menjumlahkan Semua Bagian Modulo 10^7

Sekarang kita jumlahkan hasil dari kedua bagian:

$$A \equiv S_7 + \left(\sum_{k=8}^{40} u_k \pmod{10^7} \right) \pmod{10^7}$$

$$A \equiv 2240822 + 162008 \pmod{10^7}$$

$$A \equiv 2402830 \pmod{10^7}$$

Jadi, tujuh angka terakhir dari A berurutan mulai dari angka jutaan sampai dengan satuan adalah 2402830.

3. Penyelesaian :

Misalkan X adalah titik di mana $AX \parallel BC$ dan $AB \parallel XP$.

Dari $\triangle BAP \cong \triangle CAQ$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\angle BAP - \angle QAP &= \angle CAQ - \angle QAP \\ \implies \angle BAQ &= \angle CAP.\end{aligned}$$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Sekarang perhatikan translasi T yang sejajar dengan BC di mana $T(B) = P$ dan $T(Q) = C$. Misalkan $T(A) = X$.

Kita peroleh $T(\triangle ABQ) = \triangle XPC$, sehingga,

$$\angle CAP = \angle BAQ = \angle PXC$$

menyiratkan bahwa segi empat $PCXA$ adalah siklik.

Selanjutnya, misalkan T adalah irisan PX dan CA . Kita peroleh

$$\angle TPC = \angle TXA = \angle TCP$$

yang menyiratkan $\triangle TPC$ adalah segitiga sama kaki. Namun $TP \parallel AB$, jadi

$$\triangle TPC \sim \triangle ABC$$

menyiratkan $\triangle ABC$ adalah sama kaki.

4. Penyelesaian :

Menggunakan teknik penghitungan komplementer.

Jumlah total kombinasi adalah $\frac{9!}{4!5!} = 126$

Kerjakan Soal untuk jumlah kombinasi dengan empat angka 0 atau 1 berurutan, atau keduanya.

#1: Jumlah kombinasi dengan 4 angka 0 berurutan adalah 6 dengan angka 0 terdepan pada posisi 1 hingga 6.

#2: Jumlah kombinasi dengan setidaknya 4 angka 1 berurutan adalah $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ dengan angka 1 terdepan pada posisi 1 hingga 5 dan angka 1 kelima pada posisi mana pun di sebelah kanan.

#3: Kombinasi dengan 4 angka 0 berurutan dan setidaknya 4 angka 1 berurutan dihitung dua kali dan harus diperbaiki. Jumlah kombinasi tersebut adalah 4, termasuk 00001111, 100001111, 111100001, 111110000.

Dengan demikian, jumlah total kombinasi dengan empat angka 0 atau 1 yang berurutan, atau keduanya, adalah $6 + 15 - 4 = 17$.

Oleh karena itu, jumlah kode yang mungkin adalah $126 - 17 = 109$.

5. Penyelesaian :

Step 1: Menentukan Nilai S_i

Diketahui S_i adalah suku ke- i dari barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda $b = \frac{1}{5}$. Maka,

$$S_i = a + (i - 1)b = a + (i - 1)\frac{1}{5}$$

Step 2: Menggunakan Informasi Rata-Rata Untuk Mencari Nilai a





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Diketahui rata-rata berat seratus kalkun pada $t = a$ adalah 150.5 gram. Fungsi berat kalkun ke- i adalah

$$x_i(t) = S_i t + 200 - i. \text{ Pada } t = a,$$

$$x_i(a) = S_i a + 200 - i = \left(a + (i-1)\frac{1}{5}\right)a + 200 - i.$$

Rata-rata berat (\bar{x}) adalah

$$\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i(a) = 150.5$$

$$\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \left(a^2 + (i-1)\frac{a}{5} + 200 - i\right) = 150.5$$

$$\frac{1}{100} \left(100a^2 + \frac{a}{5} \sum_{i=1}^{100} (i-1) + \sum_{i=1}^{100} 200 - \sum_{i=1}^{100} i\right) = 150.5$$

Diketahui

$$\sum_{i=1}^{100} (i-1) = \sum_{j=0}^{99} j = \frac{99 \times 100}{2} = 4950$$

Diketahui $\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$. Maka,

$$\frac{1}{100} \left(100a^2 + \frac{a}{5}(4950) + 200 \times 100 - 5050\right) = 150.5$$

$$a^2 + 9.9a + 200 - 50.5 = 150.5$$

$$a^2 + 9.9a + 149.5 = 150.5$$

$$a^2 + 9.9a - 1 = 0$$

Menggunakan rumus kuadratik,

$$a = \frac{-9.9 \pm \sqrt{9.9^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-9.9 \pm \sqrt{98.01 + 4}}{2} = \frac{-9.9 \pm \sqrt{102.01}}{2} = \frac{-9.9 \pm 10.1}{2}$$

Karena a adalah bilangan positif, maka

$$a = \frac{-9.9 + 10.1}{2} = \frac{0.2}{2} = 0.1$$

Step 3: Menghitung Berat Kalkun Ke- i Pada $t = 20$ Hari

Pada $t = 20$, $x_i(20) = S_i(20) + 200 - i$.

$$S_i = a + (i-1)\frac{1}{5} = 0.1 + (i-1)\frac{1}{5}$$

$$x_i(20) = \left(0.1 + (i-1)\frac{1}{5}\right) \times 20 + 200 - i$$

$$x_i(20) = 2 + 4(i-1) + 200 - i$$

$$x_i(20) = 2 + 4i - 4 + 200 - i$$

$$x_i(20) = 3i + 198$$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Step 4: Menentukan Median Berat Kalkun

Karena ada 100 kalkun, median adalah rata-rata dari berat kalkun ke-50 dan ke-51.

Berat kalkun ke-50:

$$x_{50}(20) = 3(50) + 198 = 150 + 198 = 348.$$

Berat kalkun ke-51:

$$x_{51}(20) = 3(51) + 198 = 153 + 198 = 351.$$

Median =

$$\frac{x_{50}(20)+x_{51}(20)}{2} = \frac{348+351}{2} = \frac{699}{2} = 349.5.$$

Jadi, berat median kalkun pada $t = 20$ hari adalah 349.5 gram.

6. Penyelesaian :

$$f(a_{223}) = 25425 \text{ dan } a_{223} = \frac{12712}{12713}$$

Mencari pola untuk menentukan barisan a_n dan $f(a_n)$, sebagai berikut:

a_n	$f(a_n)$
$a_1 = 2\nabla 3 = \frac{2+3}{1+2\times 3} = \frac{5}{7}$	$f(a_1) = \frac{1+a_1}{1-a_1} = \frac{1+\frac{5}{7}}{1-\frac{5}{7}} = \frac{\frac{12}{7}}{\frac{2}{7}} = 6 = (1+2+3)$
$a_2 = a_1\nabla 4 = \frac{\frac{5}{7}+5}{1+\frac{5}{7}\times 5} = \frac{33}{27} = \frac{11}{9}$	$f(a_2) = \frac{1+a_2}{1-a_2} = \frac{1+\frac{11}{9}}{1-\frac{11}{9}} = -10 = -(1+2+3+4)$
$a_3 = a_2\nabla 5 = \frac{7}{8}$	$f(a_3) = \frac{1+a_3}{1-a_3} = 15 = (1+2+3+4+5)$
$a_4 = a_3\nabla 6 = \frac{11}{10}$	$f(a_4) = \frac{1+a_4}{1-a_4} = -21 = -(1+2+3+4+5+6)$
$a_5 = a_4\nabla 7 = \frac{27}{29}$	$f(a_5) = \frac{1+a_5}{1-a_5} = 28 = (1+2+3+4+5+6)$
....
....
....
....
....





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



<p>Polanya didapat dari fungsi</p> $f(a_n) = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ $f(a_n)(1-a_n) = 1+a_n$ $f(a_n) - f(a_n)a_n = 1+a_n$ $f(a_n) - 1 = f(a_n)a_n + a_n$ $f(a_n) - 1 = (f(a_n) + 1)a_n$ $a_n = \frac{f(a_n)-1}{f(a_n)+1}$	<p>Polanya adalah jumlah dari bilangan asli berdasarkan ketentuan berikut:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Untuk n ganjil bernilai positif, 2) sedangkan untuk n genap bernilai negatif
$a_{222} = a_{221} \nabla 224 = \frac{f(a_{222})-1}{f(a_{222})+1}$	$f(a_{222}) = \frac{1+a_{222}}{1-a_{222}} = -(1+2+3+\dots+224) = -\frac{224(225)}{2}$
$a_{223} = a_{222} \nabla 225 = \frac{f(a_{223})-1}{f(a_{223})+1}$	$f(a_{223}) = \frac{1+a_{223}}{1-a_{223}} = (1+2+3+\dots+225) = -\frac{225(226)}{2}$ $f(a_{223}) = 25425$

Berdasarkan uraian pada tabel di atas, didapat nilai $a_{223} = \frac{25425-1}{25425+1} = \frac{25424}{25426} = \frac{12712}{12713}$

7. Penyelesaian :

Tidak, $\frac{2^a+1}{2^b+1}$ bukan selalu merupakan bilangan bulat.

Alasasannya:

Untuk $\frac{2^a+1}{2^b+1}$ menjadi bilangan bulat $2^a + 1$ harus habis dibagi oleh $2^b + 1$. Mari kita pertimbangkan beberapa contoh dan sifat keterbagian.

Langkah 1: Menganalisis kondisi keterbagian

Kita tahu bahwa $x^n + 1$ habis dibagi oleh $x + 1$ jika dan hanya jika n adalah bilangan bulat ganjil.

Misalkan $x = 2^b$. Maka, $2^a + 1 = (2^b)^k + 1$, dimana $k = \frac{a}{b}$.

Jika $\frac{a}{b}$ adalah bilangan bulat ganjil, maka $2^a + 1$ akan habis dibagi oleh $2^b + 1$.

Langkah 2: Memberikan contoh kasus di mana hasilnya adalah bilangan bulat

Misalkan $b = 3$. Karena $b > 2$, kondisi terpenuhi.

Pilih a sedemikian rupa sehingga $\frac{a}{b}$ adalah bilangan bulat ganjil, misalnya $a = 3 \times 3 = 9$. Karena $a > b, 9 > 3$, kondisi terpenuhi.

Maka, $\frac{2^9+1}{2^3+1} = \frac{512+1}{8+1} = \frac{513}{9} = 57$.

Dalam kasus ini, hasilnya adalah bilangan bulat.

Langkah 3: Memberikan contoh kasus di mana hasilnya bukan bilangan bulat (kontra-contoh)

Misalkan $b = 3$. Karena $b > 2$, kondisi terpenuhi.





Pilih a sedemikian rupa sehingga $\frac{a}{b}$ bukan bilangan bulat ganjil, misalnya $a = 4$.

Karena $a > b$, $4 > 3$, kondisi terpenuhi.

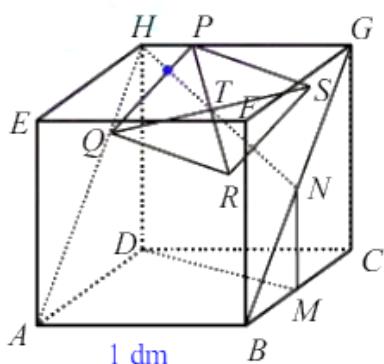
$$\text{Maka, } \frac{2^4+1}{2^3+1} = \frac{16+1}{8+1} = \frac{17}{9}.$$

Hasil $\frac{17}{9}$ bukan bilangan bulat.

Kesimpulan: Karena ada kasus di mana $\frac{2^a+1}{2^b+1}$ menghasilkan bilangan yang bukan bilangan bulat (seperti pada contoh $a = 4, b = 3$), maka pernyataan bahwa ekspresi tersebut merupakan bilangan bulat secara umum adalah salah. Ekspresi tersebut hanya akan menjadi bilangan bulat di bawah kondisi tertentu, yaitu ketika $\frac{a}{b}$ adalah bilangan bulat ganjil.

8. Penyelesaian :

Perhatikan gambar berikut.



Diketahui segiempat $PQRS$ adalah persegi, sehingga besar $\angle PQT = \angle QPT = 45^\circ$ dan besar $\angle PTQ = 90^\circ$.

Selanjutnya perhatikan segiempat tali busur $PHQT$ atau segiempat siklis, didapat besar $\angle PQT = \angle PHT = \angle PHN = 45^\circ$.

Berikutnya perhatikan segitiga GHN ! Merupakan segitiga siku-siku di titik G , sehingga karena besar $\angle PHN = 45^\circ$, maka segitiga GHN merupakan segitiga siku-siku sama kaki. Dengan demikian, Panjang $GN = 1$ dm, karena $GH = 1$ dm.

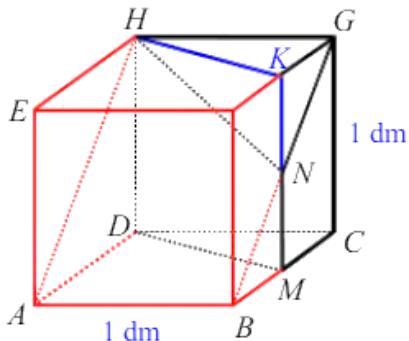
Ditarik sebuah garis tegak lurus dari titik N ke garis FG sehingga memotong di titik K , ilustrasi gambarnya seperti berikut. Dikarenakan segitiga GHN merupakan segitiga siku-siku sama kaki dan panjangnya $GN = 1$, maka segitiga OKN merupakan segitiga siku-siku sama kaki di titik K .

Sehingga Panjang $GK = NK = MC = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dm



JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Berdasarkan gambar di atas, didapat:

Volume prisma terpancung $DCM \cdot HGN$

$$\begin{aligned} &= \text{Volume prisma } DCM \cdot HGK - \text{Volume Limas } GNK \cdot H \\ &= L \cdot a_{\text{prisma}} \times CG - \frac{1}{3} L \cdot a_{\text{limas}} \times GH \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \times 1\right) \times 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2}\right) \times 1 \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{3\sqrt{2}-1}{12} \\ &= \frac{1}{12}(3\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

Jadi, volume prisma terpancung $DCM \cdot HGN$ adalah $\frac{1}{12}(3\sqrt{2}-1)$ dm³

9. Penyelesaian :

Misalkan, Suami ke- n : S_n

Istri ke- n : I_n

Diketahui terdapat 4 orang di baris depan, 6 orang di baris tengah dan 8 orang di baris belakang. Mereka sepakat bahwa setiap pasang suami istri harus dalam baris yang sama, serta setiap dua orang yang bersebelahan haruslah pasangan suami istri atau berjenis kelamin sama.

Perhatikan susunan berikut.

S_1	I_1	I_2	S_2		\Rightarrow ada 2×7			
S_3	I_3	I_4	S_4	S_5	I_5	\Rightarrow ada $4 \times 3 \times 6$		
S_6	I_6	I_7	S_7	S_8	I_8	I_9	S_9	\Rightarrow ada $6 \times 4 \times 5$

Dengan demikian, banyak susunan posisi berbeda yang mungkin dilakukan dalam kondisi seperti pada soal = $(2 \times 7) \times (4 \times 3 \times 6) \times (6 \times 4 \times 5) = 14 \times 72 \times 120 = 12.0960$.

Jadi, banyak susunan posisi berbeda yang mungkin dilakukan adalah ada 12.0960.





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

10. Penyelesaian :

Alternatif 1:

Keluarga	Banyak keluarga	Jenis kamar	Tarif/hari (Rp)
I	Laki-laki = 6 Perempuan = 2	a. Suami-Istri ada, 2 anak laki-lakinya dan 1 anak perempuannya di kamar D b. 4 anak laki-lakinya ada di kamar D	Rp700.000,00 Rp700.000,00 ----- + Rp1.400.000,00
II	Laki-laki = 2 Perempuan = 3	a. Suami-Istri ada di kamar B b. 1 anak laki-lakinya dan 2 anak perempuannya ada di kamar C	Rp400.000,00 Rp550.000,00 ----- + Rp950.000,00
III	Laki-laki = 3 Perempuan = 3	a. Suami-Istri dan 1 anak laki-lakinya ada di kamar C b. 1 anak laki-lakinya dan 2 anak perempuannya ada di kamar C	Rp550.000,00 Rp550.000,00 ----- + Rp1.100.000,00
IV	Laki-laki = 3 Perempuan = 1	a. Suami-Istri ada di kamar B b. 2 anak laki-lakinya ada di kamar B	Rp400.000,00 Rp400.000,00 ----- + Rp800.000,00
Total biaya seluruhnya = Rp1.400.000,00 + Rp950.000,00 + Rp1.100.000,00 + Rp800.000,00 = Rp4.250.000,00			





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

Alternatif 2:

Keluarga	Banyak keluarga	Jenis kamar	Tarif/hari (Rp)
I	Laki-laki = 6 Perempuan = 2	a. Suami-Istri ada di kamar B b. 3 anak laki-lakinya ada di kamar C c. 2 anak laki-lakinya dan 1 anak perempuannya ada di kamar C	Rp400.000,00 Rp550.000,00 Rp550.000,00 ----- + Rp1.500.000,00
II	Laki-laki = 2 Perempuan = 3	a. Suami-Istri ada di kamar B b. 1 anak laki-lakinya dan 2 anak perempuannya ada di kamar C	Rp400.000,00 Rp550.000,00 ----- + Rp950.000,00
III	Laki-laki = 3 Perempuan = 3	a. Suami-Istri ada di kamar B b. 2 anak laki-lakinya dan 2 anak perempuannya ada di kamar D	Rp400.000,00 Rp700.000,00 ----- + Rp1.100.000,00
IV	Laki-laki = 3 Perempuan = 1	Keluar IV ini berada di kamar yang sama, yaitu di kamar D	Rp700.000,00
Total biaya seluruhnya = Rp1.500.000,00 + Rp950.000,00 + Rp1.100.000,00 + Rp700.000,00 = Rp4.250.000,00			

