PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMP

TAHUN 2014

1. **Penyelesaian :**
   Singkatnya, jam antik itu akan terlambat dua menit setiap hari atau setiap 24 jam. Dan terakhir kalinya jam antik Bahri (jarum pendek dan jarum panjang) menunjuk ke angka yang sama dengan Jam Gadang adalah pada hari Minggu, tanggal 3 Maret 2013 pukul 08.00.
   Jam Gadang membutuhkan waktu 1440 menit agar jarum jam dan jarum menitnya kembali ke tempat semula.
   Jam antik Bahri membutuhkan waktu 1442 menit agar jarum jam dan jarum menitnya kembali ke tempat semula.
   Kelipatan persekutuan terkecil dari 1440 dan 1442 adalah 1.038.240.
   Jadi, dibutuhkan 1.038.240 menit atau 721 hari agar Jam Gadang dan jam antik Bahri menunjuk angka yang sama.
   Jadi pada tanggal 22 Februari 2015 pukul 08.00, Jam Gadang dan jam antik Bahri menunjuk angka yang sama lagi.

2. **Penyelesaian :**
   Pertama, kita perlu membuat selisih skor antara tim peringkat pertama dan tim peringkat kedua sebesar mungkin.
   Dengan demikian, tim peringkat pertama harus memenangkan semua pertandingan dan semua tim lainnya harus seri di semua pertandingan sebelum juara dipastikan.

   Setiap tim akan memainkan $(20 - 1) \times 2 = 38$ pertandingan. Misalkan X adalah jumlah pertandingan ketika juara dipastikan, kita peroleh:
   $$3X > (X-1) + 3(38 - X) \implies X > \frac{113}{5} \implies X = \boxed{23}$$

3. **Penyelesaian :**
   Memahami konsep luas segitiga

   Luas segitiga dapat dihitung dengan rumus $\frac{1}{2} \times$ alas $\times$ tinggi. Dalam konteks ini, kita akan menggunakan rumus luas segitiga untuk setiap segitiga yang terbentuk oleh garis tegak lurus dari titik sudut ke sisi yang berlawanan.

   Menghubungkan luas segitiga dengan pernyataan

- Untuk $\frac{BD}{CE}$; Perhatikan $\triangle ABD$ dan $\triangle CBE$. Karena $CE \perp BD$, maka CE adalah tinggi $\triangle CBD$ jika BD dianggap alas. Namun, pernyataan yang diberikan menghubungkan BD dengan CE pada perbandingan yang berbeda. Kita perlu mencari hubungan luas segitiga yang relevan.
- Untuk $\frac{AB}{CG}$; Perhatikan $\triangle ABC$. Karena $CG \perp AB$, maka CG adalah tinggi $\triangle ABC$ jika AB dianggap alas. Jadi, luas $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CG$. Ini berarti $AB = \frac{2 \times \text{Luas}\triangle ABC}{CG}$.
- Untuk $\frac{AD}{CF}$: Perhatikan $\triangle ADC$. Karena $CF \perp AF$ dan A, F, D segaris, maka CF adalah tinggi $\triangle ADC$ jika AD dianggap alas. Jadi, luas $\triangle ADC = \frac{1}{2} \times AD \times CF$. Ini berarti $AD = \frac{2 \times \text{Luas}\triangle ADC}{CF}$.

Menganalisis pernyataan yang diberikan
Pernyataan yang diberikan adalah $\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{CG} + \frac{AD}{CF}$. Mari kita substitusikan ekspresi AB, AD yang kita dapatkan dari luas segitiga:

$$\frac{BD}{CE} = \frac{2 \times \text{Luas}\triangle ABC}{CG^2} + \frac{2 \times \text{Luas}\triangle ADC}{CF^2}$$

Ini tidak langsung membuktikan pernyataan tersebut benar atau salah. Kita perlu menggunakan sifat-sifat segiempat talibusur dan hubungan luas segitiga.

Menentukan kebenaran pernyataan
Pernyataan $\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{CG} + \frac{AD}{CF}$ adalah benar.
Alasannya terkait dengan teorema Ptolemy untuk segi empat talibusur dan hubungan antara Panjang sisi, diagonal dan garis tinggi dalam segitiga. Secara khusus, dalam segiempat talibusur $ABCD$, berlaku teorema Ptolemy:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

Namun, pernyataan yang diberikan adalah hubungan antara diagonal dan garis tinggi. Hubungan ini dapat dibuktikan menggunakan konsep luas segitiga dan sifat-sifat segiempat talibusur, terutama fakta bahwa titik-titik sudutnya berada pada lingkaran. Jika kita meninjau luas $\triangle ABD$ dan $\triangle BCD$, serta menggunakan hubungan trigonometri dan sifat-sifat garis tinggi, kita bisa sampai pada kesimpulan ini.
Jadi, pernyataan $\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{CG} + \frac{AD}{CF}$ adalah **benar**.

Alasannya: Pernyataan ini dapat dibuktikan menggunakan konsep luas segitiga dan sifat-sifat segiempat talibusur. Dalam segiempat talibusur, berlaku hubungan antara Panjang sisi, diagonal dan garis tinggi yang ditarik ke sisi atau diagonal tersebut. Secara

spesifik, jika kita mempertimbangkan luas segitiga yang dibentuk oleh diagonal dan garis-garis tinggi yang diberikan, kita dapat menurunkan persamaan ini.
Misalnya, luas $\triangle ABD$ dapat dinyatakan dalam BD dan CE (jika CE adalah tinggi ke BD) dan luas $\triangle ABC$ dalam AB dan CG, serta luas $\triangle ADC$ dalam AD dan CF. Dengan memanfaatkan sifat-sifat ini dan hubungan antara luas segitiga dalam segiempat talibusur, pernyataan tersebut dapat diturunkan.

4. **Penyelesaian :**

$$M = 2014^{2014} < 2048^{2014} = 2^{22154} = 4 \cdot (2^{13})^{1704} < 4 \cdot 10^{6816}$$

$$A < 3 + 9 \times 6816 = 61347$$
$$B < 5 + 4 \times 9 = 41$$
$$C < 3 + 9 = 12$$

Perhatikan bahwa

$$M = 2014^{2014} \equiv (-2)^{2014} \equiv ((-2)^6)^{335} \cdot 16 \equiv 7 \pmod 9$$
$$M \equiv A \equiv B \equiv C \equiv 7 \pmod 9$$

Oleh karena itu, jumlah semua digit yang membentuk B adalah 7.

5. **Penyelesaian :**

Menyederhanakan Persamaan:
Diberikan bahwa $n^2 + (n+1)^2$ adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat. Ini dapat ditulis sebagai $n^2 + (n+1)^2 = k^2$ untuk suatu bilangan bulat k.
Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi $n^2 + n^2 + 2n + 1 = k^2$, yang menghasilkan $2n^2 + 2n + 1 = k^2$.

Mengubah Persamaan ke Bentuk Persamaan Pell:
Persamaan $2n^2 + 2n + 1 = k^2$ dapat dikalikan dengan 2 untuk mendapatkan $4n^2 + 4n + 2 = 2k^2$. Ini dapat ditulis ulang sebagai $(2n+1)^2 + 1 = 2k^2$. Misalkan $x = 2n + 1$ dan $y = k$. Maka persamaan menjadi $x^2 + 1 = 2y^2$, atau $x^2 - 2y^2 = -1$. Ini adalah bentuk persamaan Pell.

Mencari Solusi Persamaan Pell:
Solusi fundamental dari persamaan Pell $x^2 - 2y^2 = -1$ dapat ditemukan dengan inspeksi. Solusi terkecil adalah $(x_1, y_1) = (1, 1)$ dan $(x_2, y_2) = (7, 5)$. Solusi umum (x_j, y_j) dapat ditemukan menggunakan relasi rekurensi atau dengan menggunakan solusi fundamental dari $p^2 - 2q^2 = 1$, yaitu (3, 2). Solusi (x_j, y_j) dari $x^2 - 2y^2 = -1$ adalah koefisien dari $(1 + \sqrt{2})^{2j-1}$ atau $(7 + 5\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^{j-1}$. Beberapa solusi (x, y) yang memenuhi $x^2 - 2y^2 = -1$ adalah:

- (1,1)
- (7,5)
- (41,29)
- (239,169)

Menentukan Nilai n:

Karena $x = 2n + 1$, maka $n = \frac{x-1}{2}$. Nilai n harus merupakan bilangan bulat positif, sehingga x harus ganjil dan $x > 1$.

- Untuk $(x, y) = (1, 1), n = \frac{1-1}{2} = 0$. Ini bukan bilangan bulat positif.
- Untuk $(x, y) = (7, 5), n = \frac{7-1}{2} = 3$.
- Untuk $(x, y) = (41, 29), n = \frac{41-1}{2} = 20$.
- Untuk $(x, y) = (239, 169), n = \frac{239-1}{2} = 119$.
- Solusi berikutnya untuk x akan terlalu besar. Solusi berikutnya untuk x adalah $x_5 = 1393$. Maka $n = \frac{1393-1}{2} = 696$. Ini lebih besar dari 200.

Memeriksa Kondisi $n < 200$:

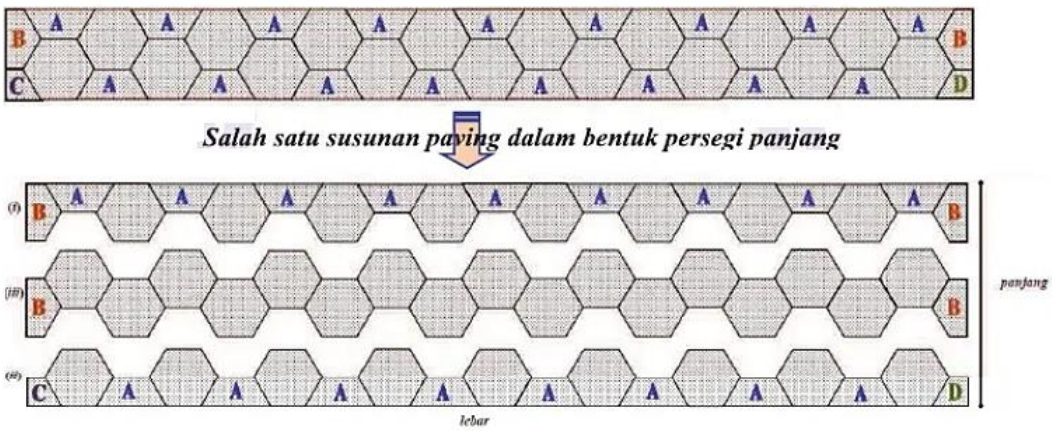
Bilangan bulat positif n yang memenuhi kondisi $n < 200$ adalah 3, 20, dan 119.

Jadi, Bilangan bulat positif $n < 200$ sehingga $n^2 + (n+1)^2$ adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat adalah 3, 20, dan 119.

6. **Penyelesaian :**

Menurut informasi dari soal bahwa halaman akan ditutup oleh 603 paving blok yang terdiri dari paving blok itu sendiri, model A, model B, model C dan model D. Sudah ditentukan juga bahwa ada 17 potong paving model blok A dan Panjang sisi paving blok adalah 12 cm.

Untuk menyelesaikan masalah di atas, perlu kita membuat ilustrasi bentuk halamannya beserta susunan paving utuh beserta model-modelnya, yakni sebagai berikut:



Berdasarkan ilustrasi gambar di atas dapat kita uraikan sebagai berikut:

(i) Sebanyak 19 bagian, terdapat 8 blok paving + 9A + 2B: sehingga terdapat 13, 5 blok paving

(ii) Sebanyak 19 bagian, terdapat 9 blok paving + 8A + 1C + 1D: sehingga terdapat 13, 5 blok paving

Dengan demikian, banyak blok paving (i) dengan (ii) adalah sebanyak 13,5 + 13,5 = 27 blok paving

Oleh karena itu ada 603 paving blok, maka masih terdapat kekurangan paving blok sebanyak 603 – 27 = 576

Sedangkan untuk (iii) sebanyak 19 bagian, terdapat 17 blok paving + 2B: sehingga terdapat 18 blok paving

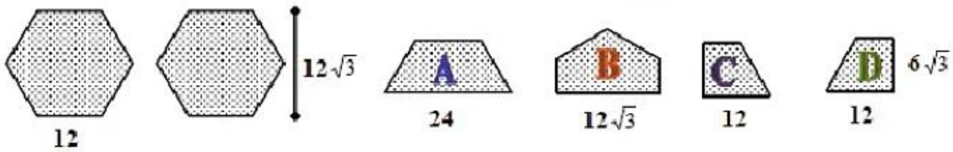
Dengan demikian, untuk menutupi seluruh halaman diperlukan sebanyak 576/18 = 32 model (iii)

Jadi, banyak model B adalah sebanyak $32 \times 2 + 2 = 66$ model

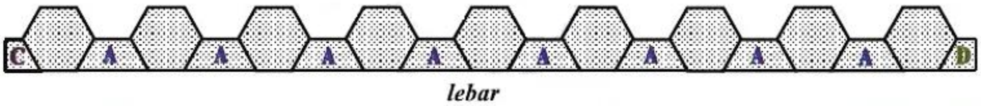
Banyak model C adalah sebanyak 1 model

Banyak model D adalah sebanyak 1 model

Sedangkan unkuran Panjang dan lebarnya adalah sebagai berikut.



Untuk mencari lebar halaman:



Lebar = 1 × Panjang alas blok C + 9 × Panjang sisi blok paving + 8 × Panjang alas blok A + 1 × Panjang alas blok D

$= 1 \times 12 + 9 \times 12 + 8 \times 24 + 1 \times 12$

$= 12 + 108 + 192 + 12$

= 324 c,

Untuk mencari Panjang halaman;

= 1 × tinggi C/D + (32 + 1) × Panjang alas B

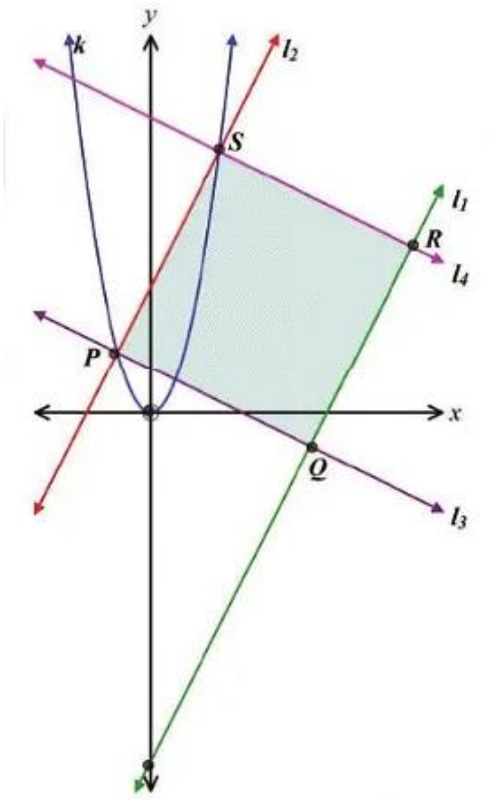
$= 1 \times 6\sqrt{3} + 33 \times 12\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3} + 396\sqrt{3}$

$= 402\sqrt{3}$ cm

7. **Penyelesaian :**

Untuk menentukan luas maksimum persegi $PQRS$, perhatikan terlebih dahulu ilustrasi gambar berikut.



Berdasarkan gambar di atas, dimisalkan
Kurva k: $y = x^2$
Garis $l_1 // l_2$, maka gradiennya sama: $m_1 = m_2 = 2$
Garis l_1: $y = 2x - 17$
Garis l_2: $y = 2x + b$
Garis $l_2 \perp l_3$ maka gradiennya apabila dikalikan sama dengan -1: $m_2 = 2, m_3 = -\frac{1}{2}$
Garis $l_3 // l_4$, maka gradiennya sama: $m_3 = m_4 = -\frac{1}{2}$

Garis l_3: $y = -\frac{1}{2}x + c$

Garis l_4: $y = -\frac{1}{2}x + d$

Kemudian kita mencari Panjang sisi PS dan PQ, yakni sebagai berikut.
Panjang sisi PS:
Terlebih dahulu mencari titik potong kurva k dengan garis l_2
$x^2 = 2x + b$
$x^2 - 2x - b = 0$
$x_{1.2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4b}}{2}$
$x_{1.2} = 1 \pm \sqrt{1+b}$
$x_1 = 1 + \sqrt{1+b}$ $\Rightarrow y_1 = 2\sqrt{1+b} + (2+c)$
$x_2 = 1 - \sqrt{1+b}$ $\Rightarrow y_1 = -2\sqrt{1+b} + (2+c)$

Oleh karena itu Panjang sisi PS adalah sebagai berikut:

$PS = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(-2\sqrt{1+b})^2 + (-4\sqrt{1+b})^2}$

$= \sqrt{4(1+b) + 16(1+b)}$

$PS = \sqrt{20(1+b)}$

Panjang sisi PQ:

Terlebih dahulu mencari titik potong garis l_1 dengan garis l_3 dan l_2 dengan garis l_3 titik potong garis l_2 dengan garis l_3, sebagai berikut:

$2x + b = -\frac{1}{2}x + c$

$x = \frac{2}{5}(c - b) \qquad\qquad \Rightarrow y = \frac{1}{5}(4c + b)$

Sehingga koordinat titik P adalah (x_1, y_1) atau $[\frac{2}{5}(c-b), \frac{1}{5}(4c+b)]$

Sedangkan titik potong garis l_1 dengan garis l_3, sebagai berikut:

$2x - 17 = -\frac{1}{2}x + c$

$x = \frac{2}{5}(17 + c) \qquad\qquad \Rightarrow y = \frac{1}{5}(4c - 17)$

Sehingga koordinat titik Q adalah (x_2, y_2) atau $[\frac{2}{5}(17+c), \frac{1}{5}(4c-17)]$

Oleh karena itu Panjang sisi PQ adalah sebagai berikut:

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{2\times 17 + 2b}{5}\right)^2 + \left[-\left(\frac{17+b}{5}\right)\right]^2}$

$= \sqrt{\frac{4}{25}(17+b)^2 + \frac{1}{25}(17+b)^2}$

$PQ = \sqrt{\frac{1}{5}(17+b)^2}$

Selanjutnya, dikarenakan Panjang sisi $PQ = PS$, maka

$\sqrt{\frac{1}{5}(17+b)^2} = \sqrt{20(1+b)}$

$\frac{1}{5}(17+b)^2 = 20(1+b)$

$(17+b)^2 = 100(1+b)$

$289 + 34b + b^2 = 100 + 100b$

$b^2 - 66b + 189 = 0$

$(b-3)(b-63) = 0$

Sehingga $b = 3$ atau $b = 63$

Dengan demikian luas persegi $PQRS$ ada 2 kemungkinan, yakni:

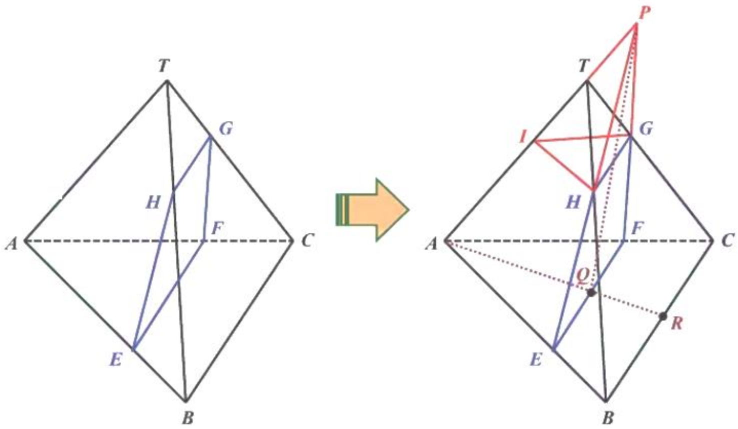
Kemungkinan I: Luas persegi $PQRS = \left[\sqrt{20(1+b)}\right]^2 = 20(1+3) = 80$

Kemungkinan II: Luas persegi $PQRS = \left[\sqrt{20(1+b)}\right]^2 = 20(1+63) = 1280$

Jadi, karena luas maksimum pada persegi $PQRS$ yang diinginkan, maka luas maksimum persegi $PQRS$ yang mungkin adalah 1280 cm^2.

8. **Penyelesaian :**

Perhatikan gambar dibawah ini.



Diberi garis tambahan TP yang merupakan perpanjangan garis AT
Diberi garis tambahan HP yang merupakan perpanjangan garis EH
Diberi garis tambahan GP yang merupakan perpanjangan garis FG
Diberi garis tambahan HI dan GI, sehingga membentuk segitiga GHI yang kongruen dengan segitiga ABC
Diberi garis tambahan PQ dan AR yang merupakan tinggi limas P.AEF dan tinggi alas limas T.ABC
Berdasarkan gambar di atas dapat kita ketahui bahwa:

(i) HG = 1/3 AB, sehingga tinggi limas T.GHI = 1/3 tinggi limas T.ABC

Dengan demikian, Volume limas T.GHI = $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ Volume limas T.ABC

$= \frac{1}{27}$ Volume limas T.ABC

(ii) AQ = 2/3 AR, sehingga PQ = 4/3 tinggi limas T.ABC dan tinggi limas P.GHI = 2/3 TQ

Dengan demikian, kita dapat mencari Volume limas P.GHI dan volume limas P.AEF

Volume P.GHI $= \frac{1}{3} \times$ Luas GHI $\times$ tinggi limas P.GHI

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ Luas ABC $\times \frac{2}{3}$ TQ

$= \frac{2}{27}$ Volume Limas T.ABC

Volume limas P.AEF $= \frac{1}{3} \times$ Luas AEF $\times$ PQ

$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$ Luas ABC $\times \frac{4}{3}$ tinggi limas T.ABC

$= \frac{16}{27}$ Volume Limas T.ABC

Kemudian kita mencari volume limas T.PGH,

Volume limas T.PGH = Volume limas P.GHI – Volume Limas T.GHI

$= \frac{16}{27}$ Volume Limas T.ABC $- \frac{1}{27}$ Volume Limas T.ABC

$= \frac{1}{27}$ Volume Limas T.ABC

Selanjutnya kita menghitung volume EFA.GHT (Bagian I),

Volume limas EFA.GHT = Volume limas P.AEF – Volume limas T.PGH

$= \frac{16}{27}$ Volume limas T.ABC $- \frac{1}{27}$ Volume limas T.ABC

$= \frac{15}{27}$ Volume limas T.ABC

Dan selanjutnya kita menghitung volume BCFE.HG (Bagian II),

Volume limas BCFE.HG = Volume limas T.ABC – Volume limas EFA.GHT

= Volume limas T.ABC $- \frac{15}{27}$ Volume limas T.ABC

$= \frac{12}{27}$ Volume limas T.ABC

Jadi, perbandingan Volume bagian I dengan Volume bagian II adalah 15 : 12 atau 5 : 4

9. Penyelesaian :

$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$, nilai x dan y bilangan bulat serta $x \geq 0$

Menurut informasi dari soal, bahwa hasil dari bentuk $1 + 2^x + 2^{2x+1}$ yang memenuhi adalah apabila dalam bentuk kuadrat sempurna/bilangan kuadrat.

Untuk mengetahui nilai dari y, kita coba satu-persatu mulai dari nilai $x = 0$, yakni sebagai berikut.

Untuk $x = 0$ $\Rightarrow 1 + 2^x + 2^{2x+1} = 1 + 2^0 + 2^{2(0)+1}$

$= 1 + 1 + 2$

$= 4$ (memenuhi)

dan $y = \pm 2$ sehingga pasangannya $(0, \pm 2)$

Untuk $x = 1$ $\Rightarrow 1 + 2^x + 2^{2x+1} = 1 + 2^1 + 2^{2(1)+1}$

$= 1 + 2 + 8$

$= 11$ (tidak memenuhi)

Untuk $x = 2$ $\Rightarrow 1 + 2^x + 2^{2x+1} = 1 + 2^2 + 2^{2(2)+1}$

$= 1 + 4 + 32$

$= 37$ (tidak memenuhi)

Untuk $x = 3$ $\Rightarrow 1 + 2^x + 2^{2x+1} = 1 + 2^3 + 2^{2(3)+1}$

$= 1 + 8 + 128$

$= 137$ (tidak memenuhi)

Untuk $x = 4$ $\Rightarrow 1 + 2^x + 2^{2x+1} = 1 + 2^4 + 2^{2(4)+1}$
$= 1 + 16 + 512$
$= 529$ (memenuhi)
dan $y = \pm 23$ sehingga pasangannya $(4, \pm 23)$

Untuk $x = 5$ $\Rightarrow 1 + 2^x + 2^{2x+1} = 1 + 2^5 + 2^{2(5)+1}$
$= 1 + 32 + 2048$
$= 2081$ (tidak memenuhi)

Untuk $x = 6$ $\Rightarrow 1 + 2^x + 2^{2x+1} = 1 + 2^6 + 2^{2(6)+1}$
$= 1 + 64 + 8192$
$= 8257$ (tidak memenuhi)

Untuk $x = 7$ $\Rightarrow 1 + 2^x + 2^{2x+1} = 1 + 2^7 + 2^{2(7)+1}$
$= 1 + 128 + 32768$
$= 32897$ (tidak memenuhi)

Dan seterusnya, sudah tidak memenuhi lagi

Jadi, semua pasangan (x, y) yang memenuhi $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$ adalah $(0, \pm 2)$ dan $(4, \pm 23)$.

10. Penyelesaian :

Menurut informasi dari soal bahwa total semua waktu pertandingan baik A, B, C, D dan E adalah 80 menit, hal ini berarti

A + B + C + D + E = 80 menit

Dengan ketentuan:

- Total waktu untuk A, B dan C masing-masing merupakan kelipatan 5,
  Misalkan $5a + 5b + 5c$ pasti hasilnya kelipatan 5 $\Rightarrow 5a + 5b + 5c = 5l$
- Total waktu untuk D dan E masing-masing merupakan kelipatan 7,
  Misalkan $7d + 7e$ pasti hasilnya kelipatan 7 $\Rightarrow 7d + 7e = 7t$

Sehingga $5l + 7t = 80$,

Karena setiap pemain di tes minimal 1 kali, maka berlaku untuk $l \geq 3$ dan untuk $t \geq 2$

Untuk mengetahui nilai l dan t, kita coba satu-persatu mulai dari nilai $l = 3$ dan $t = 2$, sehingga nilai 1 dan yang memenuhi adalah 1 = 15 dan t = 5, yakni

$5l + 7t = 80$ $\Rightarrow 5(15) + 7(5) = 80$
$\Rightarrow 45 + 35 = 80$
$\Rightarrow 80 = 80$ (memenuhi)

Kemudian kita mencari pasangan penjumlahan antar l dan t

1) (i) $5a + 5b + 5c = 45 \Rightarrow a + b + c = 9$, sehingga nilai a, b dan c yang memenuhi adalah mulai dari bilangan 1 sampai dengan 7 dengan syarat maksimal ada 2 bilangan yang nilainya sama.

Dengan demikian banyak cara yang mungkin adalah 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 cara, yakni:

Jika $a = 1$, maka hal ini ada 7 cara

$a = 2$, maka hal ini ada 6 cara

$a = 3$, maka hal ini ada 5 cara … dan seterusnya sampai $a = 7$

2) $7d + 7e = 35 \quad d + e = 5$, sehingga nilai d dan e yang memenuhi adalah mulai dari bilangan 1 sampai dengan 4.

Dengan demikian banyak cara yang mungkin adalah ada 4 cara, yakni:

Jika $d = 1$, maka $e = 4$: hal ini ada 2 cara

$d = 2$, maka $e = 3$: hal ini juga ada 2 cara

Jadi, banyak cara setiap pemain berada di lapangan berdasarkan total waktu bermain adalah 28 × 4 = 112 cara.