PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMP

TAHUN 2011

1. **Penyelesaian:**
Misalkan ketiga bilangan tersebut adalah p, q dan r. Tanpa mengurangi keumuman andaikan $p < q < r$. Karena modus dari data tersebut adalah 3 maka salah satu dari p, q atau r bernilai 3. Jika $p = 3$ maka mean dari data lebih besar dari 3, sedangkan jika $r = 3$ maka mean dari data kurang dari 3, yang keduanya tidak mungkin. Oleh karena itu haruslah $q = 3$. Misalkan pula p muncul sebanyak x kali, $q = 3$ muncul sebanyak y kali, dan r muncul sebanyak z kali. Sehingga $x + y + z = 9$. Karena modus data adalah 3 maka $y \geq 4$.
Perhatikan pula bahwa jika $r \geq 7$ kita peroleh $p^2x + q^2y + r^2z \geq 1 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 47 = 95 > 87$ yang jelas tidak mungkin. Oleh karena itu, kemungkinan nilai r adalah 4, 5 atau 6.
Terlebih dahulu dibuktikan lemma berikut,
Lemma: Jika n bilangan bulat bukan kelipatan tiga maka $n^2 = 3m + 1$ untuk suatu bilangan bulat m.
Bukti: Misal $n = 3k \pm 1$ maka $n^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$
Selanjutnya kita bagi kasus,
I. $r = 6$
$p^2x + 9y + 36z = 87$ sehingga $z = 1$ yang berakibat $p^2x + 9y + 36 = 87 \Leftrightarrow p^2x + 9y = 51$. Karena ruas kiri habis dibagi 3 maka ruas kanan juga. Oleh karena itu $3|p^2x$ tetapi karena 3 tidak membagi p maka $3|x$ sehingga $x = 3$. Sehingga diperoleh $3p^2 + 9y = 51 \Leftrightarrow p^2 + 3y = 17$.
   - Jika $p = 1$ maka $3y = 16$, tidak mungkin
   - Jika $p = 2$ maka $3y = 13$, tidak mungkin

   Jadi, untuk kasus I tidak ada yang memenuhi.
II. $r = 5$
$p^2x + 9y + 25z = 87 \Leftrightarrow (3m + 1)x + 9y + 24z + z = 3mx + 9y + 24z + x + z = 87$, oleh karena itu 3 membagi $x + z$ sehingga $x + z = 3$ berarti $y = 6$. Sehingga $p^2x + 9y + 25z = p^2x + 54 + 25z = 87 \Leftrightarrow p^2x + 25z = 33$ yang berakibat $z = 1$ dan $x = 2$. Yang berarti $p^2x + 25z = 2p^2 + 25 = 33 \Leftrightarrow p^2 = 4 \Leftrightarrow p = 2$.
Bilangan yang memenuhi adalah 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 5.
III. $r = 4$
$p^2x + 9y + 16z = 87 \Leftrightarrow (3m + 1)x + 9y + 15z + z = 3mx + 9y + 15z + x + z = 87$, oleh karena itu 3 membagi $x + z$ sehingga $x + z = 3$ dan $y = 6$. Sehingga $p^2x + 9y + 16z = p^2x + 54 + 16z = 87 \Leftrightarrow p^2x + 16z = 33$.

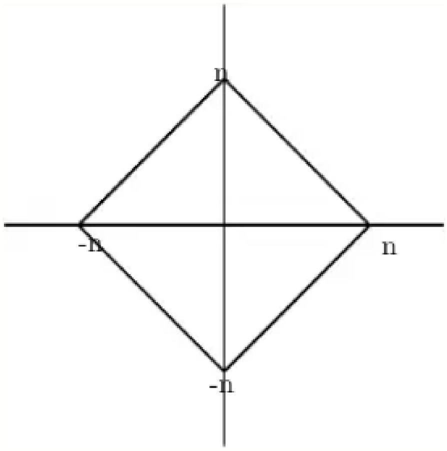
- Jika $z = 1$ maka $x = 2$ yang berakibat $2p^2 = 17$, tidak mungkin
- Jika $z = 2$ maka $x = 1$ yang berakibat $p^2 = 1 \Leftrightarrow p = 1$

Bilangan yang memenuhi adalah 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4.

Jadi, semua ukuran tinggi pohon yang mungkin adalah 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 5 atau 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4.

2. **Penyelesaian:**

Grafik dari pers. $|x| + |y| = n$, dengan n bilangan bulat positif adalah sebagai berikut,



Dari gambar di atas terlihat bahwa banyak pasangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $|x| + |y| = n$ antara kuadran I, II, III, dan IV adalah sama. Oleh karena itu cukup mencari banyak penyelesaian di kuadran I lalu dikalikan 4. Perhatikan pula bahwa jika $x > 0$ dan $y > 0$ maka banyak pasangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $|x| + |y| = n$ adalah $n - 1$. Jadi, jika $x > 0$ dan $y > 0$ maka banyak pasangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $|x| + |y| \le 50$ adalah 49 + 48 + 47 + … + 3 + 2 + 1 = 1225.

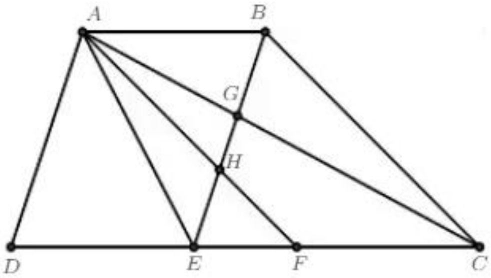
Selanjutnya untuk menjawab soal, kita bagi menjadi dua kasus:

- Jika $x \neq 0$ dan $y \neq 0$
  Banyaknya pasangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $|x| + |y| \le 50$ ada sebanyak $4 \times 1225 = 4900$.
- Jika $x = 0$ atau $y = 0$
  Jelas mudah dilihat bahwa banyaknya pasangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $|x| + |y| \le 50$ ada sebanyak 50 + 1 + 50 + 50 + 50 = 201.

Jadi, banyak pasangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $|x| + |y| \le 50$ adalah 4900 + 201 = 5101.

3. **Penyelesaian:**

Perhatikan gambar berikut.



Karena AB sejajar CD maka $\Delta ADE, \Delta ABE, \Delta BCE$ ketiganya memiliki tinggi yang sama. Sehingga diperoleh

$$\frac{[ABE]}{[ABCD]} = \frac{[ABE]}{[ADE] + [ABE] + [BCE]} = \frac{4}{4 + 4 + 6} = \frac{2}{7}$$

Perhatikan bahwa $\Delta ABH \sim \Delta AFH$ sehingga

$$\frac{BH}{EH} = \frac{AB}{EF} = \frac{4}{2} = 2$$

Yang berakibat $BH = \frac{2}{3} BE$.

Dengan demikian pula karena $\Delta ABG \sim \Delta CEG$ maka

$$\frac{BG}{EG} = \frac{AB}{EC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Sehingga $BG = \frac{2}{5} BE$. Jadi diperoleh $GH = BH - BG = \frac{2}{3} BE - \frac{2}{5} BE = \frac{4}{15} BE$. Oleh karena nya

$$[AGH] = \frac{4}{15}[ABE] = \frac{4}{15} \cdot \frac{2}{7}[ABCD] = \frac{8}{105}[ABCD]$$

Jadi, perbandingan luas segitiga AGH dan luas trapezium $ABCD$ adalah 8:105.

4. Penyelesaian:

Misalkan calon dokter tersebut magang pada tanggal a, b, c, d, e dengan $a < b < c < d < e$. Kemungkinan jadwal magang yang paling singkat adalah sebagai berikut:

a		b		c		d				e

Dengan gambar persegi menyatakan hari.

Misalkan pula persegi yang berwarna merah kita namai "hari pembatas", maka terdapat 6 hari pembatas. Karena bulan Juli ada 31 hari maka masih ada 25 hari lain yang bukan hari pembatas.

Selanjutnya kita bentuk susunan baru yaitu a', b', c', d', e' dari 25 hari tersebut dengan aturan $a' < b' < c' < d' < e'$ (boleh berurutan). Banyak susunan a', b', c', d', e' yang mungkin yaitu $\binom{25}{5} = 53130$. Setelah terbentuk susunan a', b', c', d', e' maka untuk membentuk susunan a, b, c, d, e yang diminta dapat dilakukan dengan menambah satu hari pembatas antara a' dan b', satu hari pembatas antara b' dan c', satu hari pembatas antara c' dan d' serta tiga hari pembatas antara d' dan e'. Ini berarti $a = a', b = b' + 1, c = c' + 2, d = d' + 3$ dan $e = e' + 6$. Sebagai contoh, misal kita mendapat

susunan $(a', b', c', d', e') = (2,3,5,8,11)$ maka akan bersesuai dengan susunan $(a, b, c, d, e) = (2,4,7,11,17)$.
Sebaliknya bila kita menghendaki susunan $(a, b, c, d, e) = (21,23,25,27,31)$ maka akan bersesuaian dengan susunan $(a', b', c', d', e') = (21,22,23,24,25)$.
Jadi, ada korespondesi satu-satu antara banyaknya susunan (a, b, c, d, e) dengan banyaknya susunan (a', b', c', d', e'). Oleh karena itu, banyaknya susunan (a, b, c, d, e) sama dengan banyaknya susunan (a', b', c', d', e') yaitu sebanyak 53130.
Jadi, banyak pilihan jadwal yang mungkin bagi calon dokter tersebut adalah 53130.

5. **Penyelesaian:**
Definisikan $A_n = \underbrace{555 \ldots 5555}_{n \text{ angka}}$, contoh $A_1 = 5, A_4 = 5555$ dst.
Perhatikan himpunan $T = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2010}, A_{2011}\}$.
Selanjutnya kita bagi menjadi dua kasus,
- Terdapat $A_i \in T$ yang habis dibagi 2011.
  Untuk kasus ini pernyataan pada soal jelas terbukti.
- Tidak ada $A_i \in T$ yang habis dibagi 2011.
  Hal ini berakibat apabila semua anggota T kita bagi dengan 2011 kemungkinan sisanya adalah 1, 2, 3, …, 2009, 2010 (ada 2010 kemungkinan sisa). Padahal kita tahu anggota T ada sebanyak 2011, oleh karena itu setidaknya pasti terdapat dua anggota T yang bersisa sama jika dibagi 2011. Katakanlah dua anggota tersebut adalah A_i dan A_j dengan $i > j$ maka $A_i - A_j$ habis dibagi oleh 2011. Padahal kita tahu
  $$A_i - A_j = \underbrace{555 \ldots 5555}_{i-j \text{ angka } 5} \cdot 10^j$$
  Karena 2011 adalah bilangan prima dan tidak membagi 10^j maka haruslah 2011 membagi $\underbrace{555 \ldots 5555}_{i-j \text{ angka } 5}$.

Jadi, terbukti ada diantara suku-suku barisan 5, 55, 555, 5555, 55555, ……, $\underbrace{555 \ldots 5555}_{n \text{ angka}}$, ……. yang habis dibagi oleh 2011.

6. **Penyelesaian:**
Misalkan bilangan yang dihapus adalah x, maka kita peroleh hubungan sebagai berikut:
$$x + \frac{85}{4} \cdot (n-1) = 1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$$
Yang equivalen dengan
$$4x = 2n^2 - 83n + 85 = (2n-81)(n-1) + 4 \qquad (1)$$
Karena x bulat positif maka haruslah $2n - 81 > 0 \Leftrightarrow n > 40\frac{1}{2}$. Selanjutnya kita cek untuk nilai $n = 41$, substitusikan ke pers (1) sehingga diperoleh $x = 11$.
Berikutnya akan kita tunjukkan tidak ada nilai n yang memenuhi untuk $n > 41$.

Untuk $n > 41$, dapat kita nyatakan $n = 41 + k$ untuk suatu bilangan bulat positif k. Perhatikan kembali pers (1), ruas kiri habis dibagi 4, maka demikian pula ruas kanan. Karena $2n - 81$ adalah bilangan ganjil, maka haruslah $n - 1$ habis dibagi 4. Hal ini berarti, $40 + k$ habis dibagi 4 yang berakibat k habis dibagi 4. Dengan demikian bilangan n dapat dinyatakan,

$$n = 41 + 4t$$

Untuk suatu bilangan bulat positif t.
Substitusikan $n = 41 + 4t$ ke pers (1),

$$4x = (2(41 + 4t) - 81)(41 + 4t - 1) + 1$$

Sehingga didapat,

$$\begin{aligned} x = (8t + 1)(t + 10) + 1 &= 8t^2 + 81t + 11 \\ &= 8t^2 + 77t + 4t + 11 \\ &> 30 + 4t + 11 = 41 + 4t = n \end{aligned}$$

Yang jelas tidak mungkin.
Oleh karena itu, nilai n yang mungkin hanya $n = 41$ yang berakibat bilangan yang dihapus adalah 11.

7. **Penyelesaian:**
Kita bagi menjadi 3 kasus:
   i. Tiga tanda X membentuk garis horizontal.
   Untuk kasus ini ada 3 kemungkinan tanda X membentuk garis horizontal. Sedangkan tanda X yang ke-4 memiliki 6 pilihan tempat yang tersisa. Terakhir 3 tanda O dapat menempati 5 tempat tersisa (tapi ingat ketiga tanda O tidak boleh membentuk garis horizontal). Jadi banyaknya cara penyusunan tanda O ada $\binom{5}{3} - 1 = 10 - 1 = 9$. Jadi, banyaknya cara Ipin menang pada kasus ini ada $3 \times 6 \times 9 = 162$ cara.
   ii. Tiga tanda X membentuk garis vertical
   Untuk kasus ini, tinggal kita putar 90^O maka kasusnya menjadi seperti kasus pertama. Jadi, banyaknya cara Ipin menang pada kasus ini ada 162 cara.
   iii. Tiga tanda X membentuk garis diagonal
   Untuk kasus ini ada 2 kemungkinan tanda X membentuk garis diagonal. Sedangkan tanda X yang ke-4 memiliki 6 pilihan tempat yang tersisa. Terakhir 3 tanda O dapat menempati 5 tempat tersisa sehingga banyaknya cara penyusunan tanda O ada $\binom{5}{3} = 10$. Jadi, banyaknya cara Ipin menang pada kasus ini ada $2 \times 6 \times 10 = 120$ cara.

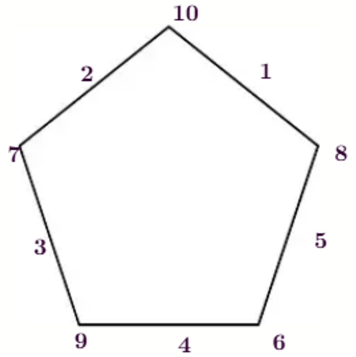
Jadi, banyak posisi akhir yang mungkin, jika Ipin menang pada langkah ke-4 adalah 162 + 162 + 120 = 444.

8. **Penyelesaian:**
Misalkan jumlah bilangan pada setiap sisi sama dengan N. Misalkan pula angka-angka yang ditempatkan pada kelima sudut segilima adalah a, b, c, d, e, maka diperoleh

$$5N = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10 + a + b + c + d + e = 55 + a + b + c + d + e$$

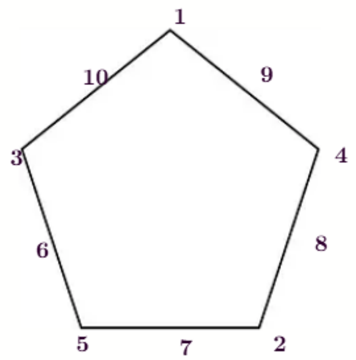
Agar nilai N terbesar maka haruslah nilai $a + b + c + d + e$ juga terbesar. Hal ini terjadi jika $a + b + c + d + e = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 40$. Oleh karena itu, kita peroleh $5N = 55 + 40 = 95 \Leftrightarrow N = 19$.

Contoh cara penyusunan nya sebagai berikut:



Agar nilai N terkecil maka haruslah nilai $a + b + c + d + e$ juga terkecil. Hal ini terjadi jika $a + b + c + d + e = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Oleh karena itu, kita peroleh $5N = 55 + 15 = 70 \Leftrightarrow N = 14$.

Contoh cara penyusunannya sebagai berikut:



Jadi, nilai terbesar dan terkecil dari jumlah bilangan tersebut berturut-turut 19 dan 14.

9. Penyelesaian:

Dari definisi $S(n)$,

Jika n ganjil maka

$$\begin{aligned} S(n) &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots - (n-1) + n \\ &= \frac{n-1}{2} \cdot (-1) + n \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Sedangkan jika n genap maka

$$\begin{aligned} S(n) &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + (n-1) - n \\ &= -\frac{n}{2} \end{aligned}$$

Selanjutnya kita bagi kasus,

i. m dan n keduanya ganjil

Kita peroleh

$$S(m)+S(n)+S(m+n)=\frac{m+1}{2}+\frac{n+1}{2}-\frac{m+n}{2}=1<2011$$

Untuk kasus ini tidak ada nilai m dan n yang memenuhi $S(m)+S(n)+S(m+n)=2011$.

ii. m dan n keduanya genap

$$S(m)+S(n)+S(m+n)=-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}-\frac{m+n}{2}=-(m+n)<0<2011$$

Untuk kasus ini tidak ada nilai m dan n yang memenuhi $S(m)+S(n)+S(m+n)=2011$.

iii. m dan n salah satunya ganjil

Tanpa mengurangi keumuman, andaikan m ganjil dan n genap. Kita peroleh

$$S(m)+S(n)+S(m+n)=\frac{m+1}{2}-\frac{n}{2}+\frac{m+n+1}{2}=\frac{2m+2}{2}=m+1$$

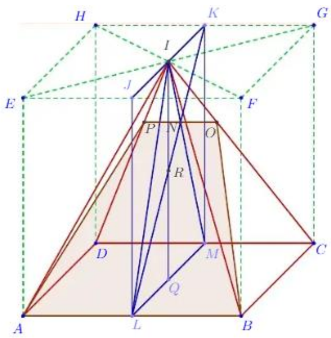
Karena m ganjil maka $m+1$ genap yang tidak mungkin sama dengan 2011.

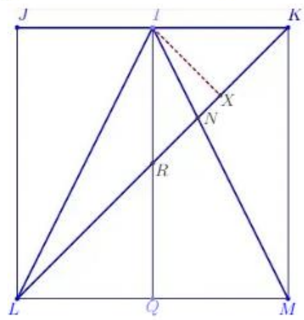
Untuk kasus ini tidak ada nilai m dan n yang memenuhi $S(m)+S(n)+S(m+n)=2011$

Dari ketiga kasus di atas, dapat disimpulkan tidak ada bilangan bulat positif m dan n yang memenuhi $S(m)+S(n)+S(m+n)=2011$.

10. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut!





Untuk menghitung volume limas terpancung bagian bawah terlebih dahulu dicari volume limas terpancung bagian atas lalu mengurangkannya dengan volume limas

$I.ABCD$. Perhatikan bahwa limas terpancung bagian atas juga berbentuk limas dengan alas berupa trapezium $ABOP$ dan tinggi IX. Pada ΔIKM, garis KN adalah garis bagi $\angle IKM$ sehingga berlaku,

$$\frac{IN}{NM} = \frac{IK}{KM} = \frac{1}{2}$$

Oleh karena itu,

$$\frac{IN}{IM} = \frac{1}{3}$$

Perhatikan bahwa,

$$\frac{OP}{CD} = \frac{IO}{IC} = \frac{IN}{IM} = \frac{1}{3}$$

Sehingga

$$OP = \tfrac{1}{3}CD = \tfrac{2}{3} \qquad (2)$$

Perhatikan pula pada ΔILN, garis IR adalah garis bagi $\angle LIN$ sehingga berlaku,

$$\frac{LR}{RN} = \frac{LI}{IN} = \frac{IM}{IN} = \frac{3}{1}$$

Mengingat $LR = RK$ maka $\frac{LN}{LK} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Sehingga kita peroleh

$$LN = \tfrac{2}{3}LK = \tfrac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{4\sqrt{2}}{3} \qquad (3)$$

Terakhir perhatikan ΔIKL, pada ΔIKL berlaku

$$IK \cdot IQ = LK \cdot IX \Leftrightarrow IX = \frac{IK \cdot IQ}{LK} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Jadi, Volume limas terpancung bagian atas (limas $I.ABOP$) adalah

$$\begin{aligned}\text{Volume limas } I.ABOP &= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2}(AB + OP) \cdot LN \cdot IX \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2}\left(2 + \tfrac{2}{3}\right) \cdot \tfrac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \tfrac{16}{27}\end{aligned}$$

Oleh karena itu, Volume limas terpancung bagian bawah yaitu,

$$\text{Volume limas } I.ABCD - \text{Volume limas } I.ABOP = \tfrac{8}{3} - \tfrac{16}{27} = \tfrac{56}{27}$$

Jadi, volume limas terpancung bagian bawah adalah $\frac{56}{27}$ satuan volume.