PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2022

1. **Penyelesaian:**

Perhatikan, $f(x) = a^2x + 200$, maka $f^{-1}(x) = \frac{x-200}{a^2}$.

Sehingga,

$$f(20) + f^{-1}(22) = f^{-1}(20) + f(22) \Rightarrow f(20) - f(22) = f^{-1}(20) - f^{-1}(22)$$
$$\Leftrightarrow a^2(20-22) = \frac{20-22}{a^2}$$
$$\Leftrightarrow a^2 = 1$$

Jadi, $f(x) = x + 200$.

Maka, $f(1) = 1 + 200 = 201$.

2. **Penyelesaian:**

Perhatikan,

$A =$ himpunan bilangan bulat dari 1001 sampai dengan 2022

$= \{1008, 1020, 1032, \dots, 2016\}$

$n(A) = \frac{2016-1008}{12} + 1 = 85$

$B =$ himpunan bilangan bulat dari 1001 sampai dengan 2022 yang habis dibagi 18

$= \{1008, 1026, 1044, \dots, 2016\}$

$n(B) = \frac{2016-1008}{18} + 1 = 57$

$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat dari 1001 sampai dengan 2022 yang habis dibagi 12 dan 18

= himpunan bilangan bulat dari 1001 sampai dengan 2022 yang habis dibagi 36

$= \{1008, 1044, 1080, \dots, 2016\}$

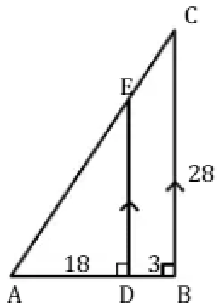
$n(A \cap B) = \frac{2016-1008}{36} + 1 = 29$

Jadi, banyak bilangan bulat dari 1001 sampai dengan 2022 yang habis dibagi 12 atau 18 adalah

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 85 + 57 - 29$$
$$= 113$$

3. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut,



Pada ΔABC berlaku Pythagoras berikut

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \Rightarrow AC^2 = 21^2 + 28^2$$
$$\Leftrightarrow AC^2 = 441 + 784$$
$$\Leftrightarrow AC^2 = 1225$$
$$\Leftrightarrow AC = \sqrt{1225}$$
$$\Leftrightarrow AC = 35$$

Perhatikan DE sejajar dengan BC, sehingga berlaku kesebangunan berikut

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AE = \frac{AD}{AB}AC$$
$$\Leftrightarrow AE = \frac{18}{21} \times 35$$
$$\Leftrightarrow AE = 30$$

4. Penyelesaian:

Perhatikan setiap definisi dari nilai mutlak di setiap suku aljabar soal.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{untuk } x \geq 0 \\ -x, \text{untuk } x < 0 \end{cases}$$

$$|y| = \begin{cases} y, \text{untuk } x \geq 0 \\ -y, \text{untuk } x < 0 \end{cases}$$

$$|x+y| = \begin{cases} x+y, \text{untuk } x+y \geq 0 \\ -x-y, \text{untuk } x+y < 0 \end{cases}$$

Dengan memperhatikan definisi bentuk $|x+y|$, maka kita dapat mengerjakan dalam dua kasus.

1. Untuk $x + y \geq 0$

   Dengan melihat definisi dari $|x|$ dan $|y|$, maka kasus ini dapat terbagi dalam tiga kasus lagi yaitu

   a. $x + y \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$, sehingga

   $$|x| + |y| + |x+y| = 22 \Rightarrow x + y + x + y = 22$$
   $$\Leftrightarrow x + y = 11$$

Untuk $x + y = 11$, dengan x, y bilangan cacah dan menggunakan kombinasi dengan perulangan diperoleh ada sebanyak ${}_{11+(2-1)}C_{2-1} = {}_{21}C_1 = 12$ pasangan (x, y) bulat.

b. $x + y \geq 0, x \geq 0, y < 0$, sehingga
$|x| + |y| + |x + y| = 22 \Rightarrow x - y + x + y = 22$
$\Leftrightarrow x = 11$
Untuk $x + y \geq 0$ dan $x = 11$, maka $11 + y \geq 0 \Rightarrow y \geq -11$.
Sehingga diperoleh pasangan $x = 11$ dan $-11 \leq y < 0$, jadi ada 11 pasangan (x, y) bulat.

c. $x + y \geq 0, x < 0, y \geq 0$, sehingga
$|x| + |y| + |x + y| = 22 \Rightarrow -x + y + x + y = 22$
$\Leftrightarrow y = 11$
Untuk $x + y \geq 0$ dan $y = 11$, maka $x + 11 \geq 0 \Rightarrow x \geq -11$.
Sehingga diperoleh pasangan $y = 11$ dan $-11 < x < 0$, jadi ada 11 pasangan (x, y) bulat.

2. Untuk $x + y < 0$
Dengan melihat definisi dari $|x|$ dan $|y|$, maka kasus ini dapat terbagi dalam tiga kasus lagi yaitu

a. $x + y < 0, x < 0, y < 0$, sehingga
$|x| + |y| + |x + y| = 22 \Rightarrow -x - y - x - y = 22$
$\Leftrightarrow x + y = -11$
Untuk $x + y = -11$, dengan $x, y < 0$, dapat kita analogikan apabila $a = -x$ dan $b = -y$ maka persamaan akan menjadi $a + b = 11$, dengan a, b bilangan asli dan menggunakan kombinasi dengan perulangan diperoleh ada sebanyak ${}_{11-1}C_{2-1} = {}_{10}C_1 = 10$ pasangan (x, y) bulat.

b. $x + y < 0, x \geq 0, y < 0$, sehingga
$|x| + |y| + |x + y| = 22 \Rightarrow x - y - x - y = 22$
$\Leftrightarrow y = -11$
Untuk $x + y < 0$ dan $y = -11$, maka $x - 11 < 0 \Rightarrow x < 11$.
Sehingga diperoleh pasangan $y = -11$ dan $0 < x < 11$, jadi ada 11 pasangan (x, y) bulat.

c. $x + y < 0, x < 0, y \geq 0$, sehingga
$|x| + |y| + |x + y| = 22 \Rightarrow -x + y - x - y = 22$
$\Leftrightarrow x = -11$
Untuk $x + y < 0$ dan $x = -11$, maka $-11 + y < 0 \Rightarrow y < 11$.
Sehingga diperoleh pasangan $x = -11$ dan $0 < y < 11$, jadi ada 11 pasangan (x, y) bulat.

Jadi, keseluruhan ada sebanyak (12 + 11 + 11) + (10 + 11 + 11) = 66 pasangan bulat (x, y).

5. Penyelesaian:

Pembagi $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ dan sisa $S(x) = Ax + B$, sehingga

1. Sisa pembagian oleh $(x+1)$ adalah $f(1)$.

   $S(1) = f(1) \quad \Rightarrow A(1) + B = (1)^{2023} + (1)^{1012} + (1)^{506} + (1)^{253} + (1)^{127}$

   $\Leftrightarrow A + B = 5$

2. Sisa pembagian oleh $(x-1)$ adalah $f(-1)$.

   $S(-1) = f(-1) \quad \Rightarrow A(-1) + B = (-1)^{2023} + (-1)^{1012} + (-1)^{506} + (-1)^{253} + (-1)^{127}$

   $\Leftrightarrow -A + B = 1$

Sehingga dengan eliminasi A pada kedua persamaan diperoleh

$$\begin{array}{r} A + B = 5 \\ -A + B = -1 \\ \hline 2B = 4 \Rightarrow B = 2 \end{array} +$$

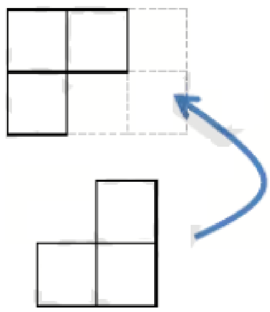
Substitusi $B = 2$ ke $A + B = 5$ diperoleh $A = 3$.

Jadi nilai $3A + 4B = 3(3) + 4(2) = 9 + 8 = 17$.

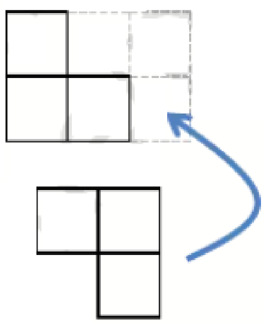
6. Penyelesaian:

Perhatikan untuk mengisi lebar 3 petak dari persegi Panjang, kita focus ke persegi Panjang berukuran 3×2 di bawah ini.

Ada dua cara mengisi petak tersebut dengan 2 tromino seperti pada gambar



Atau



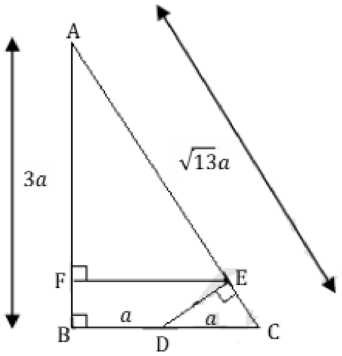
Sehingga, setiap 2 baris pada persegi Panjang dapat diisi tromino sebanyak 2 cara.

Padahal untuk persegi Panjang 3×20, akan memuat 10 buah petak 2 baris.

Jadi, banyak cara menyusun tromino adalah $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{\text{sebanyak 10 buah}} = 2^{10} = 1024$ cara.

7. **Penyelesaian:**

Perhatikan gambar segitiga ABC



Misal $BD = CD = a$, maka

$AB = \frac{3}{2}BC = \frac{3}{2} \times 2a = 3a$

Dengan Phytagoras diperoleh

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \quad \Rightarrow AC = \sqrt{(3a)^2 + (2a)^2}$

$\Leftrightarrow AC = \sqrt{3a^2}$

$\Leftrightarrow AC = \sqrt{13}a$

Segitiga ABC dan segitiga DEC sebangun, sehingga diperoleh perbandingan

$\frac{BC}{AC} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow CE = \frac{BC}{AC} \times CD$

$\Leftrightarrow CE = \frac{2a}{\sqrt{13}a} \times a$

$\Leftrightarrow CE = \frac{2}{13}\sqrt{13}a$

Jadi, diperoleh $AE = AC - CE = \sqrt{13}a - \frac{2}{13}\sqrt{13}a = \frac{11}{13}\sqrt{13}a = \frac{11}{\sqrt{13}}a$

Dari kesebangunan segitiga AFE dan segitiga DEC diperoleh perbandingan

$$\frac{[AFE]}{[DEC]} = \left(\frac{AE}{DC}\right)^2 \Rightarrow \frac{[AFE]}{13} = \left(\frac{\frac{11}{\sqrt{13}}a}{a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow [AFE] = 121$$

8. **Penyelesaian:**

Perhatikan,

$a_1 = 4 \Rightarrow a_2 = (4)^2 - 1 = 15$

$a_2 = 15 \Rightarrow a_3 = (1+5)^2 - 1 = 35$

$a_3 = 35 \Rightarrow a_4 = (3+5)^2 - 1 = 63$

$a_4 = 63 \Rightarrow a_5 = (6+3)^2 - 1 = 80$

$a_5 = 80 \Rightarrow a_6 = (8+0)^2 - 1 = 63$

Perhatikan lagi, sampai di a_6 diperoleh kesimpulan $a_6 = a_4$, sehingga nilai-nilai suku berikutnya dari barisan (a_n) ini akan berulang-ulang dengan periode dua suku.

$a_4 = a_{4+2n} = 63 \equiv 0 \pmod{21}$ dan $a_5 = a_{5+2n} = 80$, untuk setiap n bilangan asli.

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots a_{2022} &\equiv [a_1 + a_2 + a_3 + (a_4 + a_6 + \cdots + a_{2022}) + \\ &\quad (a_5 + a_7 + \cdots + a_{2021})] \pmod{21} \\ &\equiv \left[(a_1 + a_2 + a_3) + 1010\big(a_4 \pmod{21}\big) + 1009(a_5)\right] \pmod{21} \\ &\equiv [(4 + 15 + 35) + 0 + 1009(80)] \pmod{21} \\ &\equiv [(54 + 1009(80)] \pmod{21} \\ &\equiv [(54 \bmod 21) + (1009 \bmod 21)80] \pmod{21} \\ &\equiv [12 + 1(80)] \pmod{21} \\ &\equiv 92 \pmod{21} \\ &\equiv 8 \pmod{21} \end{aligned}$$

Jadi, sisa pembagian $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2022}$ oleh 21 adalah 8.

9. Penyelesaian:

Karena x, y bilangan positif, maka kuadratkan kedua ruas diperbolehkan.

$$\begin{aligned} x + 200 \le \sqrt{x^2 - y^2 + 400(x+y)} \Rightarrow (x+200)^2 &\le \left(\sqrt{x^2 - y^2 + 400(x+y)}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 400x + 40000 &\le x^2 - y^2 + 400x + 400y \\ \Leftrightarrow y^2 - 400y + 40000 &\le 0 \\ \Leftrightarrow (y - 200)^2 &\le 0 \end{aligned}$$

Padahal, untuk setiap y berlaku $(y-200)^2 \ge 0$. Jadi jelas bahwa $(y-200)^2 = 0 \Rightarrow y = 200$.

10. Penyelesaian:

Misalkan p adalah suatu bilangan prima, maka

$x^2 + 42x = p^3 \Rightarrow x(x+42) = p^3$

Jelas bahwa untuk $x = 1$ maka $p^3 = 43$ bukanlah suatu pangkat tiga dari bilangan prima. Maka, haruslah $p|x$ dan $p|x + 42$. Hal ini berarti bahwa $p|42$.

Maka kemungkinan nilai $p = \{2,3,7\}$, dengan x adalah bilangan bulat.

- Untuk $p = 2$, maka $x(x+42) = 8$, tidak ada x bulat yang memenuhi.
- Untuk $p = 3$, maka $x(x+42) = 27$, tidak ada x bulat yang memenuhi.
- Untuk $p = 7$, maka $x(x+42) = 343 \Rightarrow x^2 + 42x - 343 = 0$

  $\Leftrightarrow (x-7)(x+49) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 7$ atau $x = -49$

  Karena x adalah bilangan asli, maka yang memenuhi adalah $x = 7$.

11. Penyelesaian:

Banyak cara Azka dan Budi menempati di baris pertama adalah ${}_3P_2 = \frac{3!}{1!} = 6$.

Banyak cara mendudukkan 10 siswa yang lain adalah 10!

Sehingga, banyak cara Azka dan Budi menempati di paris pertama adalah $A = 6 \times 10!$.

Jadi,

$$\frac{A}{9!} = \frac{6 \times 10!}{9!} = \frac{6 \times 10 \times 9!}{9!} = 6 \times 10 = 60$$

12. Penyelesaian:

Misal sisi-sisi segitiga adalah $a = BC, b = AC, c = AB$.

Dan segitiga ABC siku-siku di C, sehingga $c = AB$ adalah sisi miring, dan berlaku $c^2 = a^2 + b^2$

Maka luas segitiga adalah $L = \frac{1}{2}ab = 63$.

Ingat lagi rumus jari-jari lingkaran luar suatu segitiga R dan jari-jari lingkaran dalam segitiga r.

$$R = \frac{abc}{4L} = \frac{abc}{4\left(\frac{1}{2}ab\right)} = \frac{c}{2}$$

$$r = \frac{L}{\frac{1}{2}K} = \frac{126}{a+b+c} = \frac{126}{\sqrt{(a^2+b^2)+2ab}+c} = \frac{126}{\sqrt{c^2+252}+c}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
R + r = 12 \quad &\Rightarrow & \frac{c}{2} + \frac{L}{\frac{1}{2}(a+b+c)} &= 12 \\
&\Leftrightarrow & \frac{c}{2} + \frac{126}{\sqrt{c^2+252}+c} &= 12 \\
&\Leftrightarrow & \frac{c}{2} + \frac{126(\sqrt{c^2+252}-c)}{252} &= 12 \\
&\Leftrightarrow & \frac{\sqrt{c^2+252}}{2} &= 12 \\
&\Leftrightarrow & \sqrt{c^2+252} &= 24 \\
&\Leftrightarrow & c^2 + 252 &= 576 \\
&\Leftrightarrow & c^2 &= 324 \\
&\Leftrightarrow & c &= 18
\end{aligned}$$

13. Penyelesaian:

Ingat, deret geometri tak hingga dengan $0 < x < 1$ berbentuk

$$1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Apabila bentuk deret tersebut diturunkan akan menjadi

$$1+2x+3x^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty} k\,x^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+B}{3^{k+1}}=20\Rightarrow\frac{2}{3^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^{k-1}}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B}{3^{k-1}}\right)=20$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}+\frac{B}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right)=20$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}+\frac{B}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right)=20$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3^2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{B}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\right)=20$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{6}B=20$$

$$\Leftrightarrow 3+B=120$$

$$\Leftrightarrow B=117$$

14. Penyelesaian:

Misal $w_i=p_i+20$, maka soal akan analog dengan bentuk persamaan

$$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_7=8$$

Dengan $0\le p_1,p_2,p_3,\ldots,p_7\le 2$

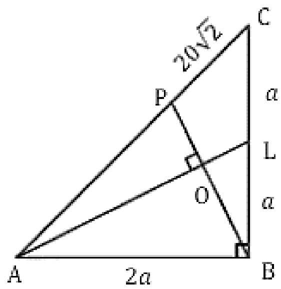
Maka dengan mendata kasus per kasus penyelesaiannya diperoleh

- Penyelesaian berbentuk (2,2,2,2,0,0,0) ada sebanyak $\frac{7!}{4!3!}=35$
- Penyelesaian berbentuk (2,2,2,1,1,0,0) ada sebanyak $\frac{7!}{3!2!2!}=210$
- Penyelesaian berbentuk (2,2,1,1,1,1,0) ada sebanyak $\frac{7!}{2!4!1!}=105$
- Penyelesaian berbentuk (2,1,1,1,1,1,1) ada sebanyak $\frac{7!}{1!6!}=7$

Jadi, banyak penyelesaian terurutnya adalah 35 + 210 + 105 + 7 = 357

15. Penyelesaian:

Perhatikan gambar segitiga ABC



Perhatikan segitiga ABL, berlaku Pythagoras

$$AL^2 = AB^2 + BL^2 \Rightarrow AL = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a$$

Perhatikan segitiga ABL sebangun dengan segitiga BOL, misal $LO = x$, berlaku

$$\frac{BL}{LA} = \frac{LO}{BL} \qquad \Rightarrow LO = \frac{BL^2}{LA}$$
$$\Leftrightarrow LO = \frac{a^2}{\sqrt{5}a}$$
$$\Leftrightarrow LO = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Karena $LO = \frac{a}{\sqrt{5}}$, maka $OA = \frac{4a}{\sqrt{5}}$, sehingga dengan dalil Menelause, diperoleh

$$\frac{LO}{OA} \cdot \frac{AP}{PC} \cdot \frac{CB}{BL} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{AP}{20\sqrt{2}} \cdot 2 = 1$$
$$\Leftrightarrow AP = 40\sqrt{2}$$

Karena $AP = 40\sqrt{2}$ dan $PC = 20\sqrt{2}$, maka $AC = 60\sqrt{2}$.

Dengan Pythagoras pada segitiga ABC diperoleh

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \Rightarrow \left(60\sqrt{2}\right)^2 = (2a)^2 + (2a)^2$$
$$\Leftrightarrow 7200 = 8a^2$$
$$\Leftrightarrow a^2 = 900$$
$$\Leftrightarrow a = 30$$

Jadi, Panjang $AB = 2a = 2(30) = 60$.

16. Penyelesaian:

Dari FPB$(m, n) = 3$, akan dimisalkan $m = 3a$ dan $n = 3b$.

Dan dari FPB$(2m, 5n) = 30$, maka $30|2m \Rightarrow 30|6a \Rightarrow 5|a$ dan $30|5n \Rightarrow 30|15b \Rightarrow 2|b$.

Misal $a = 5c$ dan $b = 2d$, maka $m = 15c$ dan $n = 6d$.

Perhatikan FPB$(30c, 30d) = 30$, maka FPB$(c, d) = 1$

Maka, FPB$(15m, 6n)$ = FPB$(225c, 36d) = 9$.

17. Penyelesaian:

Misalkan $a = pc$ dan $d = qb$, ini dapat dilakukan karena $b, c > 0$, sehingga $p, q > 1$, maka diperoleh

$3p^2c^2 + 3b^2 = k$ ....(1)
$3q^2b^2 + 3c^2 = k$ ....(2)
$4pc^2 + 4qb^2 = k$ ....(3)

Padahal, kita akan mencari nilai

$$\frac{(ab + cd)}{(ad + bc)} = \frac{pcb + cqb}{pqbc + bc} = \frac{p + q}{pq + 1}$$

Eliminasi persamaan $(1) \times q^2 - (2)$ menghasilkan

$$(3p^2q^2c^2 + 3b^2q^2) - (3q^2b + 3c^2) = k(q^2 - 1) \Rightarrow 3c^2(p^2q^2 - 1) = k(q^2 - 1)$$
$$\Leftrightarrow \qquad c^2 = \frac{k(q^2-1)}{3(p^2q^2-1)}$$

Eliminasi persamaan $(2) \times p^2 - (1)$ menghasilkan

$$(3p^2q^2b^2 + 3p^2c^2) - (3p^2c + 3b^2) = k(p^2 - 1) \Rightarrow 3b^2(p^2q^2 - 1) = k(p^2 - 1)$$
$$\Leftrightarrow \qquad c^2 = \frac{k(p^2-1)}{3(p^2q^2-1)}$$

Substitusikan ke persamaan (3) menghasilkan

$$4pc^2 + 4qb^2 = k \qquad \Rightarrow \frac{4pk(q^2-1)+4qk(p^2-1)}{3(p^2q^2-1)} = k$$
$$\Leftrightarrow \frac{pq^2-p+p^2q-q}{p^2q^2-1} = \frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow pq^2 - p + p^2q - q = \frac{3}{4}p^2q^2 - \frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow 0 = \frac{3}{4}p^2q^2 - p^2q - pq^2 + \frac{3}{4}pq - \frac{3}{4}pq + p + p + q - \frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow 0 = pq\left(\frac{3}{4}pq - p - q + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}pq - p - q + \frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow 0 = (pq - 1)\left(\frac{3}{4}pq - p - q + \frac{3}{4}\right)$$

Karena $pq > 1$, haruslah $\frac{3}{4}pq - p - q + \frac{3}{4} = 0$, sehingga diperoleh $\frac{p+q}{pq+1} = \frac{3}{4}$

Jadi,

$$\frac{12(ab + cd)}{ad + bc} = 12\left(\frac{p + q}{pq + 1}\right) = 12 \times \frac{3}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

18. Penyelesaian:

Perhatikan ilustrasi berikut untuk memperjelas pemahaman terhadap bilangan N.

$$1\boxed{2}3 \ldots 1\boxed{2}3 \ldots 3\boxed{2}1 \ldots 1\boxed{2}3\boxed{2}1\boxed{2}3$$

Karena A ada 8 digit, maka ada sebanyak 8 buah $\boxed{}$, dan sebagian terisi oleh $\boxed{1\boxed{2}3}$ atau $\boxed{3\boxed{2}1}$

Kita akan membagi kasus sesuai banyak $\boxed{1\boxed{2}3}$ atau $\boxed{3\boxed{2}1}$

1. Kasus pertama, jika ada 1 buah angka $\boxed{2}$.

Sebagai ilustrasi $\square\square\boxed{1\boxed{2}3}\square\square\square$ dan $\square\square\boxed{3\boxed{2}1}\square\square\square$

Ada 6 kelompok besar, sehingga kemungkinan posisi $\boxed{1\boxed{2}3}$ ada 6 buah, dan dapat dipasang sebanyak 2 cara, yaitu $\boxed{1\boxed{2}3}$ atau $\boxed{3\boxed{2}1}$

Untuk pengisian sebanyak 5 buah $\square$ yang lain dapat diisi angka 1 atau 3, sehingga ada keseluruhan 2^5 cara.

Jadi, keseluruhan banyak bilangan N yang terbentuk adalah sebagai berikut.

Banyak posisi $\boxed{1\boxed{2}3}$ diletakkan di kelompok besar	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 pada $\boxed{1\boxed{2}3}$	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 kotak $\square$ yang lain	Total banyak cara
6	2	2^5	$6 \times 2 \times 2^5 = 384$

2. Kasus kedua, jika ada 2 buah angka $\boxed{2}$.

   Ada dua subkasus, yaitu $\square\boxed{1\boxed{2}3}\square\boxed{1\boxed{2}3}$ dan $\square\square\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}\square$

   a. Kita mulai untuk kasus dimana $\square\square\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}\square$, artinya ada 1 bilangan selain $\boxed{2}$ di antara dua buah $\boxed{2}$.

   Ada 4 kelompok besar, sehingga kemungkinan posisi $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$ ada 4 buah, dan dapat dipasang sebanyak 2 cara, yaitu $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$ atau $\boxed{1\boxed{2}3\boxed{2}1}$

   Untuk pengisian sebanyak 3 buah $\square$ yang lain dapat diisi angka 1 atau 3, sehingga ada keseluruhan 2^3 cara.

   Jadi, keseluruhan banyak bilangan N yang berbentuk adalah sebagai berikut

Banyak posisi $\boxed{1\boxed{2}3}$ diletakkan di kelompok besar	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 pada $\boxed{1\boxed{2}3}$	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 kotak $\square$ yang lain	Total banyak cara
4	2	2^3	$4 \times 2 \times 2^3 = 64$

   b. Kita mulai untuk kasus dimana $\square\boxed{1\boxed{2}3}\square\boxed{1\boxed{2}3}$, artinya ada lebih dari 1 bilangan selain $\boxed{2}$ di antara dua buah $\boxed{2}$.

   Ada 4 kelompok besar, sehingga kemungkinan posisi $\boxed{1\boxed{2}3}$ ada memilih 2 tempat dari 4 tempat tersedia, yaitu $\binom{4}{2} = 6$ buah, dan dapat dipasang sebanyak 4 cara, yaitu

   $\square\boxed{1\boxed{2}3}\square\boxed{1\boxed{2}3}$,

   $\square\boxed{1\boxed{2}3}\square\boxed{3\boxed{2}1}$,

   $\square\boxed{3\boxed{2}1}\square\boxed{1\boxed{2}3}$

   $\square\boxed{3\boxed{2}1}\square\boxed{3\boxed{2}1}$

Untuk pengisian sebanyak 2 buah $\square$ yang lain dapat diisi angka 1 atau 3, sehingga ada keseluruhan 2^2 cara.
Jadi, keseluruhan banyak bilangan N yang terbentuk adalah sebagai berikut

Banyak posisi $\boxed{1\boxed{2}3}$ diletakkan di kelompok besar	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 pada $\boxed{1\boxed{2}3}$	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 kotak $\square$ yang lain	Total banyak cara
6	4	2^2	$6 \times 4 \times 2^2 = 96$

3. Kasus ketiga, jika ada 3 buah angka $\boxed{2}$.
   Ada dua subkasus, yaitu $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3\boxed{2}1}$ $\square$ dan $\boxed{1\boxed{2}3}$ $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$
   a. Kita mulai untuk kasus dimana $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3\boxed{2}1}$ $\square$, artinya ada 1 bilangan selain $\boxed{2}$ di antara dua buah $\boxed{2}$.
   Ada 2 kelompok besar, sehingga kemungkinan posisi $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3\boxed{2}1}$ ada 2 buah, dan dapat dipasang sebanyak 2 cara, yaitu $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3\boxed{2}1}$ atau $\boxed{1\boxed{2}3\boxed{2}1\boxed{2}3}$
   Untuk pengisian sebanyak 1 buah $\square$ yang lain dapat diisi angka 1 atau 3, sehingga ada keseluruhan 2^1 cara.
   Jadi, keseluruhan banyak bilangan N yang terbentuk adalah sebagai berikut

Banyak posisi $\boxed{1\boxed{2}3}$ diletakkan di kelompok besar	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 pada $\boxed{1\boxed{2}3}$	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 kotak $\square$ yang lain	Total banyak cara
2	2	2^1	$2 \times 2 \times 2^1 = 8$

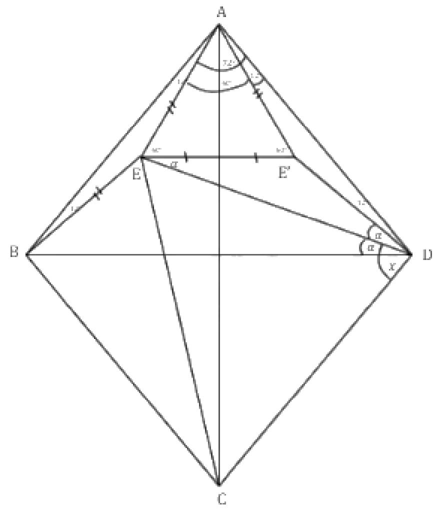
   b. Kita mulai untuk kasus dimana $\boxed{1\boxed{2}3}$ $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$, artinya ada lebih dari 1 bilangan selain $\boxed{2}$ di antara dua buah $\boxed{2}$.
   Ada 2 kelompok besar, sehingga kemungkinan posisi $\boxed{1\boxed{2}3}$ dan $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$ dapat dipasang sebanyak 2 cara, yaitu
   $\boxed{1\boxed{2}3}$ $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$
   $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$ $\boxed{1\boxed{2}3}$
   Untuk pengisian angka 1 dan 3 pada $\boxed{1\boxed{2}3}$ dapat dipasang sebanyak 2 cara, begitu juga posisi angka 1 dan 3 pada $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$ dapat dipasang sebanyak 2 cara.
   Karena tidak ada slot $\square$ sehingga tidak perlu dihitung.
   Jadi, keseluruhan banyak bilangan N yang terbentuk adalah sebagai berikut

Banyak posisi 1 2 3 dan 3 2 1 2 3	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 pada 1 2 3	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 pada 3 2 1 2 3	Total banyak cara
2	2	2	$2 \times 2 \times 2 = 8$

Jadi, total seluruh cara menyusun bilangan N dalam A adalah sebanyak $384 + (64 + 96) + (8 + 8) = 560$ cara.

19. Penyelesaian:

Perhatikan belah ketupat $ABCD$



Buat E' merupakan titik pencerminan dari E terhadap garis AC.
Sehingga karena $\angle DAE = 72^o$ dan $\angle BAE = 12^o = \angle DAE'$, maka $\angle EAE' = 60^o$.
Juga perhatikan karena $AE = AE'$ maka jelas bahwa EAE' adalah segitiga sama sisi.
Perhatikan juga bahwa $\angle DAC = 42^o$, maka $\angle BDA = 48^o = 2\alpha + 12^o \Rightarrow \alpha = 18^o$.
Jadi, $x = \angle CDE = \angle CDB + \angle BDE = 48^o + 18^o = 66^o$.

20. Penyelesaian:

Perhatikan,

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 - 22 = x^2y + y^2z + z^2x - 20$$
$$\Rightarrow xy^2 - x^2y + yz^2 - y^2z + zx^2 - z^2x = 2$$
$$\Leftrightarrow (x - y)(y - z)(z - x) = 2$$

Karena $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$, maka tanpa mengurangi keumuman misal $x - y > 0$, maka diperoleh penyelesaian sebagai berikut

$x - y = 2$
$y - z = -1 \Rightarrow y = z - 1$
$z - x = -1 \Rightarrow x = z + 1$

Substitusikan $x = z + 1$ dan $y = z - 1$ ke soal, sehingga diperoleh

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 - 22 = 3xyz$$
$$\Rightarrow (z+1)(z-1)^2 + (z-1)z^2 + z(z+1)^2 - 22 = 3(z+1)(z-1)z$$
$$\Leftrightarrow \quad 3z^4 - 21 = 3z^3 - 3z$$
$$\Leftrightarrow \quad 3z = 21$$
$$\Leftrightarrow \quad z = 7$$

Jadi, nilai $x + y + z = (z + 1) + (z - 1) + z = 3z = 3(7) = 21$.