PEMBAHASAN
OSK MATEMATIKA SMA
TAHUN 2021

1. **Penyelesaian:**

   $\frac{u_1+u_2}{u_3}=\frac{11}{21}\Rightarrow\frac{u_1+u_2+u_3}{u_3}=\frac{32}{21}$

   $\frac{u_2+u_3}{u_1}=p\Rightarrow\frac{u_1+u_2+u_3}{u_1}=p+1$

   Kita tahu bahwa $u_2=\frac{1}{2}(u_1+u_3)$, sehingga $u_1+u_2+u_3=\frac{3}{2}(u_1+u_3)$. Jadi,

   $\frac{1}{p+1}+\frac{21}{32}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{1}{p+1}=\frac{1}{96}$

   $\Leftrightarrow p=95$

2. **Penyelesaian:**

   Perhatikan bahwa suku x^7 dapat dibuat dari perkalian berikut:

   $(1+x)(2+x^2)(3+x^3)(4+x^4)(5+x^5)\Rightarrow x\cdot x^2\cdot 3\cdot x^4\cdot 5=15x^7$

   $(1+x)(2+x^2)(3+x^3)(4+x^4)(5+x^5)\Rightarrow 1\cdot x^2\cdot 3\cdot 4\cdot x^5=12x^7$

   $(1+x)(2+x^2)(3+x^3)(4+x^4)(5+x^5)\Rightarrow 1\cdot 2\cdot x^3\cdot x^4\cdot 5=10x^7$

   Jadi, total koefisien suku x^7 adalah 15 + 12 + 10 = 37.

3. **Penyelesaian:**

   Perhatikan hubungan antara $f(-x)$ dan $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Substitusi x pada $f(-x)$ dapat mengubah $f(-x)$ menjadi $f\left(\frac{1}{x}\right)$, begitu juga sebaliknya.

   Dengan mengganti x menjadi $-\frac{1}{x}$ diperoleh:

   $$-\left(\frac{1-x}{x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{x+1}{4}\right)f(-x)=-\frac{100(4x^2+1)}{x}$$

   Dengan mengalikan kedua ruas dengan (-4) diperoleh:

   $$16\left(\frac{1-x}{4x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)+(x+1)f(-x)=\frac{100(16x^2+4)}{x}$$

   Kemudian, dengan mengeliminasikan bentuk $f(-x)$ akan diperoleh persamaan dalam bentuk $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$16\left(\frac{1-x}{4x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)+(x+1)f(-x)=\frac{100(16x^2+4)}{x}$$
$$\left(\frac{1-x}{4x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)+(x+1)f(-x)=\frac{100(x^2+4)}{x}\quad -$$
$$15\left(\frac{1-x}{4x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{100(15x^2)}{x}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}15\left(\frac{1-x}{4x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{100(15x^2)}{x} &\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{400x^2}{1-x}\\ &\Leftrightarrow f(x)=\frac{400}{x(x-1)}\\ &\Leftrightarrow f(x)=400\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Jadi, bentuk $f(x)$ merupakan bentuk telescoping. Maka,

$$\begin{aligned}f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(400) &= 400\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{399}-\frac{1}{400}\right)\right)\\ &= 400\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{400}\right)\\ &= 400\left(\frac{399}{400}\right)\\ &= 399\end{aligned}$$

4. **Penyelesaian:**

Bilangan A dan B dapat dinyatakan berturut-turut sebagai $5a+2$ dan $5b+3$ dengan a dan b bilangan cacah.

$$\begin{aligned}A(A+1)+5B &= (5a+2)(5a+3)+5(5b+3)\\ &= 25a^2+25a+6+25b^2+15\\ &= 25(a^2+a+b^2)+21\end{aligned}$$

Jadi, jelas bahwa $A(A+1)+5B$ dibagi 25 bersisa 21.

5. **Penyelesaian:**

Misal $Q(x)$ adalah suatu polinom yang memenuhi $Q(x)=P(x)-2021$, maka jelas sekali bahwa $Q(7)=0$. Sehingga, $Q(x)=(x-7)\cdot R(x)$ dengan $R(x)$ adalah suatu polinom yang derajatnya satu kurangnya dari derajat $Q(x)$.

Dari $Q(x)=P(x)-2021$, maka $P(x)=Q(x)+2021$.

Karena, $P(n)=2045$, maka $Q(n)+2021=2045$.

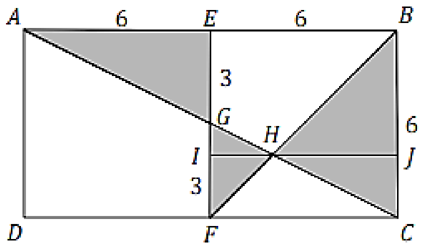
Perhatikan, $$\begin{aligned}Q(n)+2021=2045 &\Rightarrow (n-7)\cdot R(n)=24\\ &\Leftrightarrow (n-7)\cdot R(n)=24\\ &\Leftrightarrow R(n)=\frac{24}{n-7}\end{aligned}$$

Perhatikan sekali lagi, n adalah bilangan prima, dan koefisien polinom adalah bilangan bulat, maka agar $R(n)$ bulat, jelas sekali bahwa $(n-7)$ merupakan factor bulat dari 24.

Sehingga, $n-7=\{-24,-12,-8,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

Maka, $n = \{-17, -5, -1, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 19, 31\}$.
Sehingga n yang merupakan bilangan prima adalah $3, 5, 11, 13, 19, 31$.
Jadi, banyaknya n yang memenuhi adalah 6.

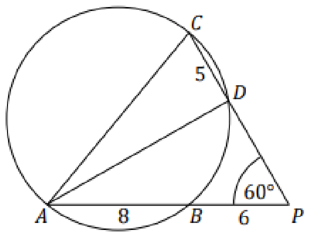
6. Penyelesaian:



Perhatikan,
Dari kesebangunan ΔAGE dan ΔACB diperoleh $EG = GF = 3$.
Dari kesebangunan ΔHGF dan ΔHCB dan misal diperoleh $HI = 2$ dan $HJ = 4$.
Maka, luas daerah arsir adalah

$$
\begin{aligned}
[AEG] + [HGF] + [HCB] &= \tfrac{1}{2} \cdot GE \cdot AE + \tfrac{1}{2} \cdot GF \cdot HI + \tfrac{1}{2} \cdot BC \cdot HJ \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 + \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \\
&= 9 + 3 + 12 \\
&= 24
\end{aligned}
$$

7. Penyelesaian:



Dengan menggunakan POP (Power of Point) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
PD \cdot PC = PB \cdot PA \quad &\Rightarrow x(x+5) &&= 6 \cdot 14 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 5x &&= 84 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 5x - 84 &&= 0 \\
&\Leftrightarrow (x+12)(x-7) &&= 0 \\
&\Leftrightarrow x = -12 \text{ atau } && x = 7
\end{aligned}
$$

Karena Panjang PD tidak boleh negative, maka $PD = x = 7$.
Perhatikan $\angle APD = 60^o$, artinya $\cos \angle APD = \frac{1}{2}$.
Padahal, berlaku $\frac{PD}{PA} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} = \cos \angle APD$, sehingga jelas bahwa $\angle ADP = 90^o$.
Dari ΔADP siku-siku di D diperoleh:

$$AD^2 = AP^2 - PD^2$$

$= 14^2 - 7^2$
$= 147$

Jadi, karena pada ΔADC besar $\angle ADP = 90^o$, maka AC adalah diameter, sehingga berlaku

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow (2r)^2 = 147 + 25$$
$$\Leftrightarrow 4r^2 = 172$$
$$\Leftrightarrow r^2 = 43$$

8. Penyelesaian:

Kita potong-potong dulu bilangan $m = 123 \ldots 91011 \ldots 999$, menjadi bentuk seperti berikut.

$$m = \underbrace{123\ldots89}_{\text{digit satuan}}\ \underbrace{101112\ldots9899}_{\text{digit puluhan}}\ \underbrace{\underbrace{100101102\ldots198199}_{\substack{\text{digit ratusan}\\ \text{dengan angka awal 1}}}\ \underbrace{200201202\ldots298299}_{\substack{\text{digit ratusan}\\ \text{dengan angka awal 2}}}\ \ldots\ \underbrace{900901902\ldots998999}_{\substack{\text{digit ratusan}\\ \text{dengan angka awal 9}}}}_{\text{semua digit ratusan}}$$

Perhatikan,

- Digit satuan, dari 1 sampai 9 ada sebanyak (9 – 1 + 1) = 9 digit.
- Digit puluhan, dari 10 sampai 99 ada sebanyak (99 – 10 + 1) × 2 = 180 digit.
- Digit ratusan, dari 100 sampai n ada sebanyak $(n - 100 + 1) \times 3$ digit.

Jadi banyak digit dari 1 sampai n adalah (9 + 180 + (n – 99) × 3) buah digit.

Sehingga apabila kita hendak mencari digit ke 2021, 2022, 2023 dari m, maka kita perlu memperhatikan bahwa digit terakhir dari bilangan ratusan selalu terletak pada digit yang merupakan kelipatan tiga.

Ilustrasi berikut mungkin akan mempermudah pemahaman kita.

$$\underbrace{\underbrace{123\ldots89}_{\text{digit satuan}}\ \underbrace{101112\ldots9899}_{\text{digit puluhan}}}_{\substack{\text{banyak digitnya 9+180}\\ \text{merupakan kelipatan 3}}}\ \underbrace{10\boxed{0}}_{3\text{ digit}}\ \underbrace{10\boxed{1}}_{3\text{ digit}}\ \underbrace{10\boxed{2}}_{3\text{ digit}}$$

Jadi, untuk mempermudah pencarian, maka akan dicari digit ke-2022, karena 2022 merupakan kelipatan tiga.

Digit ke 2022 adalah digit terakhir dari n yang memenuhi:

$$9 + 180(n - 99) \times 3 = 2022 \qquad \Rightarrow 189 + (n - 99) \times 3 = 2022$$
$$\Leftrightarrow 63 + n - 99 = 674$$
$$\Leftrightarrow n - 36 = 674$$
$$\Leftrightarrow n = 710$$

Kita tahu bahwa digit terakhir dari 710, yaitu 0 adalah digit ke-2022, sehingga ilustrasi berikut juga akan membantu mencari digit ke-2021 dan digit ke-2023.

$$\underbrace{123\ldots89}_{\text{digit satuan}}\ \underbrace{101112\ldots9899}_{\text{digit puluhan}}\ \ldots 7\boxed{1}\boxed{0}\boxed{7}11712$$

Sehingga, digit ke-2021 adalah 1, digit ke-2022 adalah 0, dan digit ke-2023 adalah 7.

Jadi, hasil penjumlahan digit ke 2021, 2022, 2023 dari m adalah 1 + 0 + 7 = 8.

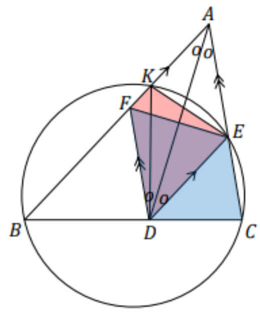
9. Penyelesaian:

Misal pasangan suami istri tersebut adalah $L_1P_1, L_2P_2, \dots, L_6P_6$. Dari kedua belas orang tersebut akan dipilih enam orang dimana paling banyak terdapat sepasang suami istri, maka akan ada dua kasus yang mungkin, yaitu:

- Tidak ada pasangan suami istri
  Akan dipilih satu orang dari setiap pasangan suami istri. Sehingga, banyak cara untuk memilih enam orang tersebut adalah $2^6 = 64$ cara.
- Tepat ada satu pasang suami istri
  Akan dipilih dua orang yang merupakan satu pasangan. Banyaknya cara memilih dua orang tersebut adalah $_6C_1 = 6$ cara.
  Sehingga, masih tersisa lima pasangan suami istri dan empat orang lagi untuk dipilih, dimana keempatnya tidak boleh ada sepasang suami istri.
  Maka, jelas akan dipilih empat dari lima pasangan suami istri yang tersisa untuk diambil satu orang pada setiap pasangan. Banyak cara untuk memilih empat orang tersebut adalah $_5C_4 \times 2^4 = 80$ cara.
  Jadi, banyak cara pada kasus ini adalah $6 \times 80 = 480$ cara.

Jadi, total banyak cara adalah 64 + 480 = 544 cara.

10. Penyelesaian:



Perhatikan, $[DKEF] = [DEF] + [EFK]$.

Jelas bahwa $DEAF$ adalah jajargenjang, sehingga $DF = AE$.

Karena $DF || AC$, akibatnya

$$\frac{[CDE]}{[DEF]} = \frac{CE}{DF} = \frac{75}{85} = \frac{15}{17}$$

Perhatikan juga bahwa AD garis bagi $\angle BAC$, maka berlaku:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD}$$

Karena $DE || AB$ maka berlaku kesebangunan ΔCDE dan ΔCAB, yaitu:

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CD}{BD}$$

Jadi, dari dua perbandingan tersebut dan karena $DF = AE$ jelas bahwa

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CE}{AE} = \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{DF} = \frac{15}{17}$$

Dengan menggunakan POP (Power of Point) diperoleh:

$$\begin{aligned} AK \cdot AB = AE \cdot AC \quad &\Rightarrow \frac{AK}{AE} = \frac{AC}{AB} \\ &\Leftrightarrow \frac{AK}{AE} = \frac{15}{17} \end{aligned}$$

Padahal $DEAF$ adalah jajargenjang dan menggunakan sifat garis bagi diperoleh ΔAFD adalah segitiga sama kaki, sehingga $AF = FD$ dan mengakibatkan $DEAF$ adalah belah ketupat dengan

$$AF = AE = ED = DF.$$

$$\begin{aligned} \frac{AK}{AE} = \frac{15x}{17x} &\Rightarrow \frac{AF-FK}{AE} = \frac{15}{17} \\ &\Leftrightarrow \frac{AF-FK}{AE} = \frac{15}{17} \\ &\Leftrightarrow \frac{FK}{AE} = \frac{2}{17} \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \frac{[EFK]}{[DEF]} = \frac{FK}{ED} &\Rightarrow \frac{[EFK]}{[DEF]} = \frac{FK}{AE} \\ &\Leftrightarrow \frac{[EFK]}{[DEF]} = \frac{2}{17} \\ &\Leftrightarrow [EFK] = \frac{2}{17}[DEF] \end{aligned}$$

Jadi, $[DKEF] = [DEF] + [EFK] = [DEF] + \frac{2}{17}[DEF] = \frac{19}{17}[DEF] = \frac{19}{17} \times 85 = 95.$

11. Penyelesaian:

Perhatikan, $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, dengan $0 \le \{x\} < 1$.

Sehingga,

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor^2 - 2ax + a = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x - \{x\})^2 - 2ax + a = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x\{x\} + \{x\}^2 - 2ax + a = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2(a + \{x\})x + (a + \{x\}^2) = 0 \end{aligned}$$

Periksa nilai diskriminan dari $x^2 - 2(a + \{x\})x + (a + \{x\}^2) = 0$,

$$\begin{aligned} D = b^2 - 4ac \quad &\Rightarrow D = \left(2(a + \{x\})\right)^2 - 4(1)(a + \{x\}^2) \\ &\Leftrightarrow D = 4a^2 + 8a\{x\} + 4\{x\}^2 - 4a - 4\{x\}^2 \\ &\Leftrightarrow D = 4a^2 + 8a\{x\} - 4a \end{aligned}$$

Persamaan memiliki penyelesaian real apabila $D > 0$, sehingga

$$\begin{aligned} D > 0 &\Rightarrow 4a^2 + 8a\{x\} - 4a > 0 \\ &\Leftrightarrow 4a(a-1) + 8a\{x\} > 0 \end{aligned}$$

Untuk $a > 1$ dan $0 \le \{x\} < 1$ maka diperoleh $4a(a-1) > 0$ dan $8a\{x\} \ge 0$, sehingga jelas benar bahwa $4a(a-1) + 8a\{x\} > 0$. Sehingga, dari teorema vieta diperoleh jumlah semua bilangan real x yang memenuhi persamaan $x^2 - 2(a + \{x\})x + (a + \{x\}^2) = 0$ adalah

$x_1 + x_2 = -\frac{-2(a+\{x\})}{1} \Rightarrow 51 = 2a + 2\{x\}$

$\Leftrightarrow \{x\} = \frac{51-2a}{2}$

Padahal, $0 \leq \{x\} < 1$. Sehingga,

$$\begin{aligned} 0 \leq \{x\} < 1 \quad &\Rightarrow 0 \leq \frac{51-2a}{2} < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 51 - 2a < 2 \\ &\Leftrightarrow -2 < 2a - 51 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 49 < 2a \leq 51 \\ &\Leftrightarrow 24{,}5 < a \leq 25{,}5 \end{aligned}$$

Jadi, karena a bilangan bulat, maka satu-satunya nilai a yang memenuhi adalah 25.

12. Penyelesaian:

Perhatikan,

- Untuk $x = 0$, maka $|c| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq c \leq 1$
- Untuk $x = \frac{1}{2}$, maka $\left|\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c\right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c \leq 1$

  $\Leftrightarrow -4 \leq -4\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c\right) \leq 4$
- Untuk $x = 1$, maka $|a + b + c| \leq 1 \Rightarrow -1 < a + b + c \leq 1$

  $\Leftrightarrow -22 \leq 22(a + b + c) \leq 22$

Perhatikan bahwa $21a + 20b + 19c = 22(a + b + c) + c - 4\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c\right)$.

Sehingga, jelas bahwa bentuk $21a + 20b + 19c$ dapat diuraikan dari tiga bentuk di atas. Jadi, jumlahkan ketiganya diperoleh $-27 \leq 21a + 20b + 19c \leq 27$.

Kesamaan terjadi saat $a = 8, b = -8$ dan $c = 1$ sehingga $f(0) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ dan $f(1) = 1$ memenuhi $|f(x)| \leq 1$ untuk setiap $0 \leq x \leq 1$.

Jadi, nilai maksimum $21a + 20b + 19c$ adalah 27.

13. Penyelesaian:

$$\begin{aligned} x^2 + (y+2)x + (n+1)y = n^2 + 252 \Rightarrow \quad & x^2 + xy + 2x + ny + y = n^2 + 252 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2x + 1 + (x + n + 1)y = n^2 + 253 \\ \Leftrightarrow \quad & (x+1)^2 - n^2 + (x + n + 1)y = 253 \\ \Leftrightarrow \quad & (x + 1 + n)(x + 1 - n) + (x + n + 1)y = 253 \\ \Leftrightarrow \quad & (x + 1 + n)(y + x + 1 - n) = 253 \end{aligned}$$

Sehingga, $(x + 1 + n)$ merupakan salah satu factor bulat positif 253, yaitu $\{1, 11, 23, 253\}$. Perhatikan juga bahwa untuk x, y dan n bilangan asli, maka $x + n + 1 \geq 3$, sehingga dapat diperiksa tiga kasus yang mungkin, yaitu:

- Untuk $x + 1 + n = 11$ maka $y + x + 1 - n = 23$.

Perhatikan, $\begin{aligned} x+1+n&=11 \\ y+x+1-n&=23 \\ \hline -y+2n&=-12 \end{aligned}$ $-$ $\Rightarrow n=\frac{y-12}{2}$	Perhatikan, $x+1+n=11 \Rightarrow x=10-n$ dan karena $x \geq 1$ maka diperoleh: $x \geq 1 \Rightarrow 10-n \geq 1 \Leftrightarrow n \leq 9$

Maka,

$$n \leq 9 \Rightarrow \frac{y-12}{2} \leq 9$$
$$\Leftrightarrow y \leq 30$$

Sehingga, untuk $x+1+n=11$ diperoleh nilai maksimum y adalah 30.

- Untuk $x+1+n=23$ maka $y+x+1-n=11$.

Perhatikan, $\begin{aligned} x+1+n&=23 \\ y+x+1-n&=11 \\ \hline -y+2n&=12 \end{aligned}$ $-$ $\Rightarrow n=\frac{y+12}{2}$	Perhatikan, $x+1+n=23 \Rightarrow x=22-n$ dan karena $x \geq 1$ maka diperoleh: $x \geq 1 \Rightarrow 22-n \geq 1 \Leftrightarrow n \leq 21$

Maka,

$$n \leq 21 \Rightarrow \frac{y+12}{2} \leq 21$$
$$\Leftrightarrow y \leq 30$$

Sehingga, untuk $x+1+n=23$ diperoleh nilai maksimum y adalah 30.

- Untuk $x+1+n=253$ maka $y+x+1-n=1$.

Perhatikan, $\begin{aligned} x+1+n&=253 \\ y+x+1-n&=1 \\ \hline -y+2n&=252 \end{aligned}$ $-$ $\Rightarrow n=\frac{y+252}{2}$	Perhatikan, $x+1+n=253 \Rightarrow x=252-n$ dan karena $x \geq 1$ maka diperoleh: $x \geq 1 \Rightarrow 252-n \geq 1 \Leftrightarrow n \leq 251$

Maka,

$$n \leq 251 \Rightarrow \frac{y+252}{2} \leq 251$$

Sehingga, untuk $x+1+n=253$ diperoleh nilai maksimum y adalah 250.

Jadi, nilai y terbesar yang mungkin adalah 250.

14. Penyelesaian:

Perhatikan, $a^{777} \equiv 77 \pmod{100}$ artinya $a^{777} \equiv 77 \pmod{10}$

Dengan teorema Euler, a relative prima dengan 10 dan $\varphi(10)=4$, maka $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Sehingga, $a^{777} \equiv 7 \pmod{10}$ $\Rightarrow (a^4)^{194} \cdot a \equiv 7 \pmod{10}$

$$\Leftrightarrow \quad a \equiv 7 \pmod{10}$$

Karena $a \equiv 7 \pmod{10}$, maka dua digit terakhir dari a dapat kita nyatakan sebagai $a = 10k+7$, dengan teorema Euler, a relative prima dengan 100 dan $\varphi(100)=40$, maka $a^{40} \equiv 1 \pmod{100}$.

$$
\begin{aligned}
a^{777} \equiv 77 \pmod{100} \Rightarrow \quad & (a^{40})^{19} \cdot a^{17} \equiv 77 \pmod{100} \\
\Leftrightarrow \quad & a^{17} \equiv 77 \pmod{100} \\
\Leftrightarrow \quad & (10k+7)^{17} \equiv 77 \pmod{100} \\
\Leftrightarrow \quad & 170k \cdot 7^{16} + 7^{17} \equiv 77 \pmod{100} \\
\Leftrightarrow \quad & 170k \cdot (7^4)^4 + (7^4)^4 \cdot 7 \equiv 77 \pmod{100} \\
\Leftrightarrow \quad & 170k \cdot (1)^4 + (1)^4 \cdot 7 \equiv 77 \pmod{100} \\
\Leftrightarrow \quad & 170k + 7 \equiv 77 \pmod{100} \\
\Leftrightarrow \quad & 70k \equiv 70 \pmod{100} \\
\Leftrightarrow \quad & 7k \equiv 7 \pmod{10} \\
\Leftrightarrow \quad & k \equiv 1 \pmod{10}
\end{aligned}
$$

Sehingga, $k = 1$. Diperoleh $a = 10(1) + 7 = 17$.
Jadi, dua digit terakhir dari a adalah 17.

15. Penyelesaian:

Perhatikan, jika b bilangan ganjil dan mengingat $n^2 + 19 = n(n+19)$ merupakan perkalian bilangan ganjil dan genap, maka jelas bahwa a_n selalu bernilai ganjil untuk setiap bilangan asli n.

Karena $a_{n+1} > a_n$ maka:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FPB}(a_n, a_{n+1}) &= \mathrm{FPB}(a_n, a_{n+1} - a_n) \\
&= \mathrm{FPB}\left(n^2 + 19n + b, ((n+1)^2 + 19(n+1) + b) - (n^2 + 19n + b)\right) \\
&= \mathrm{FPB}(n^2 + 19n + b, 2n + 20) \\
&= \mathrm{FPB}(n^2 + 19n + b, n + 10) \\
&= \mathrm{FPB}(n^2 + 19n + b - (n+10)(n+9), n + 10) \\
&= \mathrm{FPB}(b - 90, n + 10)
\end{aligned}
$$

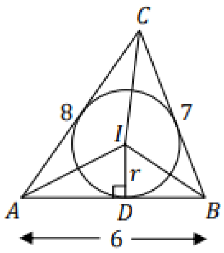
Sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FPB}(a_n, a_{n+1}) &= \mathrm{FPB}(b - 90, n + 10) \\
\mathrm{FPB}(a_{n+1}, a_{n+2}) &= \mathrm{FPB}(b - 90, n + 11)
\end{aligned}
$$

Jelas bahwa $\mathrm{FPB}(n+10, n+11) = 1$ dan dari soal $\mathrm{FPB}(a_n, a_{n+1}) = \mathrm{FPB}(a_{n+2}, a_{n+1})$ sehingga $\mathrm{FPB}(b-90, n+10) = \mathrm{FPB}(b-90, n+11)$ terjadi saat $b - 90 = 1 \Rightarrow b = 91$.

Jadi, nilai b terbesar adalah 91.

16. Penyelesaian:



Perhatikan, karena I adalah titik potong ketiga garis bagi segitiga ABC, maka I adalah titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC dan ID adalah jari-jari lingkaran.

Sehingga, karena $s = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(6 + 7 + 8) = \frac{21}{2}$ maka dengan rumus jari-jari lingkaran dalam segitiga diperoleh:

$$ID = \frac{[ABC]}{s} \Rightarrow ID = \frac{\sqrt{s(s - AB)(s - BC)(s - AC)}}{s}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{21}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2}}}{\frac{21}{2}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{21^2 \cdot 15}}{2}}{\frac{21}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Perhatikan, karena $AD = s - BC = \frac{7}{2}$, dengan Pythagoras diperoleh:

$$AI^2 = AD^2 + ID^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} + \frac{15}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

Jadi, $AI^2 = 16$.

17. Penyelesaian:

Dengan PIE (Prinsip Inklusi-Eksklusi)

- Jika tanpa syarat apapun
  Banyaknya pemetaan yang mungkin adalah $n(B)^{n(A)} = 4^6$
- Jika tidak ada $f(x) = 7$
  Banyaknya pemetaan yang mungkin adalah $(n(B) - 1)^{n(A)} = 3^6$
- Jika tidak ada $f(x) = 8$
  Banyaknya pemetaan yang mungkin adalah $(n(B) - 1)^{n(A)} = 3^6$
- Jika tidak ada $f(x) = 7$ dan $f(x) = 8$
  Banyaknya pemetaan yang mungkin adalah $(n(B) - 2)^{n(A)} = 2^6$

Jadi, banyaknya pemetaan dari $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ke $B = \{7, 8, 9, 10\}$ dengan syarat 7 dan 8 mempunyai prapeta adalah $4^6 - 3^6 - 3^6 + 2^6 = 2702$.

18. Penyelesaian:

Perhatikan, untuk memberikan pemahaman soal berikut adalah salah satu contoh barisan ternary yang memenuhi soal, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\underbrace{1}_{a}\boxed{0}\underbrace{11}_{b}\boxed{0}\underbrace{2122}_{c}\boxed{0}\underbrace{12}_{d}\boxed{0}\underbrace{\ }_{e}$$

Huruf a, b, c, d, e pada barisan tersebut adalah banyak elemen digit bukan 0 yang diisikan dengan digit 0 sebagai pembatasnya. Mudah dipahami bahwa karena setiap di antara dua 0 ada paling sedikit dua suku bukan nol, maka $b, c, d \geq 2$, serta karena 0 dapat menjadi awal dan akhir dari barisan maka $a, b \geq 0$.

Perhatikan lagi, barisan harus memuat 13 suku, padahal terdapat tepat empat 0, sehingga haruslah ada Sembilan digit bukan 0. Sehingga banyaknya susunan digit bukan nol memenuhi:

$a + b + c + d + e = 9$

Dengan $a, e \geq 0$ dan $b, c, d \geq 2$.

Dengan substitusi $b = p + 2$, $c = q + 2$ dan $d = r + 2$, mengingat $b, c, d \geq 2$ maka $p, q, r \geq 0$. Sehingga banyaknya susunan digit bukan nol memenuhi:

$a + p + 2 + q + 2 + r + 2 + e = 9$

$\Leftrightarrow a + p + q + r + e = 3$

Dengan $a, p, q, r, e \geq 0$

Dengan De Moivre banyaknya susunan digit bukan nol adalah ${}_{3+(5-1)}C_3 = {}_7C_3 = 35$ susunan.

Padahal susunan digit bukan nol memiliki dua kemungkinan digit, yaitu 1 atau 2. Jadi banyak cara menyusun kesembilan digit bukan nol adalah $2^9 = 512$ cara.

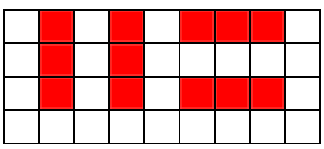
Jadi, banyaknya barisan ternary yang dapat dibuat sebanyak ${}_7C_3 \cdot 2^9 = 35 - 512 = 17920$ susunan.

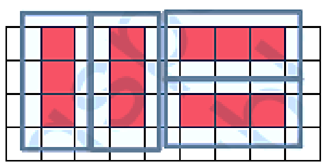
19. Penyelesaian:

Ada dua syarat pada soal, yaitu:

- Tidak ada dua ubin yang bertumpuk
- Tidak ada dua ubin yang bersentuhan sisinya maupun titik sudutnya

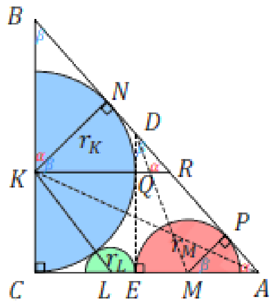
Kedua syarat tersebut dapat dipenuhi bila terdapat sela-sela di antara ubin minimal 1 petak. Ilustrasi berikut mungkin akan membantu mempermudah pemahaman kita.





Jadi, kita dapat membuat sela-sela dengan memperbesar ubin dari 3×1 menjadi 4×2, dengan menambahkan $\frac{1}{2}$ petak di masing-masing sisi kanan, kiri, atas dan bawah ubin. Jika ubin 3×1 diletakkan menempel di bagian paling atas seperti ilustrasi sama artinya dengan ubin 4×1 menjadi terletak di luar papan yang diperbolehkan. Sehingga, papan harus juga kita perluas $\frac{1}{2}$ petak di masing-masing sisi kanan, kiri, atas dan bawah.
Jadi, soal akan analog dengan "Sebuah papan catur berukuran 102×22 akan dipasangi beberapa ubin berukuran 4×2. Berapa ubin terbanyak yang bisa dipasang pada papan sehingga tidak ada dua ubin yang bertumpuk, sedangkan dua ubin boleh bersentuhan?"
Dapat kita kerjakan dengan membagi luas papan catur, dibagi luas satu buah ubin.
Jadi, banyak ubin terbanyak yang dapat dipasang adalah $\left\lfloor \frac{102\times 22}{4\times 2} \right\rfloor = 280$ ubin.

20. Penyelesaian:



Ditanyakan nilai k yang memenuhi $\frac{r_M}{r_L} = \frac{k}{25}$.
Dengan Pythagoras diperoleh

$$25AB^2 = 25AC^2 + 25BC^2$$
$$\Rightarrow (2AC + 5BC)^2 = 25AC^2 + 25BC^2$$
$$\Leftrightarrow 4AC^2 + 20 \cdot AC \cdot BC + 25BC^2 = 25AC^2 + 25BC^2$$
$$\Leftrightarrow 20 \cdot AC \cdot BC = 21AC^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{21}{20}$$

Misal, $BC = 21x$ dan $AC = 20x$ maka $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 29x$.
Perhatikan ΔACK kongruen ΔANK, sehingga $AC = AN = 20x$. Akibatnya, $BN = 9x$.
Perhatikan ΔABC sebangun ΔKBN, sehingga $r_K = KN = \frac{20}{21} \cdot BN = \frac{60}{7}x$.
Perhatikan ΔKCL, dengan Pythagoras diperoleh:

$$r_K^2 = (r_K + r_L)^2 - (r_K - r_L)^2 \Rightarrow r_K^2 = 4r_K \cdot r_L$$
$$\Leftrightarrow r_L = \frac{1}{4} r_K$$
$$\Leftrightarrow r_L = \frac{15}{7}x$$

Sehingga, $AE = AC - r_K = 20x - \frac{60}{7}x = \frac{80x}{7}$

Perhatikan ΔDEM kongruen ΔDPM, maka $DE = DP$, dan ΔAED, maka $AM = \frac{29}{21} r_M$. Perhatikan juga bahwa $AE = AM + EM = \frac{29}{21} r_M + r_M = \frac{50}{21} r_M$. Artinya $r_M = \frac{21}{50} AE = \frac{24}{5} x$.

Jadi, $\frac{r_M}{r_L} = \frac{k}{25} \Rightarrow \frac{\frac{24}{5}x}{\frac{15}{7}x} = \frac{k}{25}$

$\Leftrightarrow k = 56.$