



PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMP

TAHUN 2011

1. Jawaban :

Bilangan ganjil:

- Bilangan ganjil terkecil yang lebih besar dari 2011 adalah 2013.
- 99 bilangan ganjil terkecil yang lebih besar dari 2011 adalah:
2013, 2015, 2017, ..., $2013 + 98 \cdot 2$
- Jumlah 99 bilangan ganjil = $\frac{99}{2} \cdot (2 \cdot 2013 + (99-1) \cdot 2)$
- Jumlah 99 bilangan ganjil = $\frac{99}{2} \cdot (4026 + 196)$
- Jumlah 99 bilangan ganjil = $\frac{99}{2} \cdot 4222$
- Jumlah 99 bilangan ganjil = $99 \cdot 2111$
- Jumlah 99 bilangan ganjil = 208989
- $x = 208989$

Bilangan genap:

- Bilangan genap terkecil yang lebih besar dari 6 adalah 8.
- 99 bilangan genap terkecil yang lebih besar dari 6 adalah:
8, 10, 12, ..., $8 + 98 \cdot 2$
- Jumlah 99 bilangan genap = $\frac{99}{2} \cdot (2 \cdot 8 + (99-1) \cdot 2)$
- Jumlah 99 bilangan genap = $\frac{99}{2} \cdot (16 + 196)$
- Jumlah 99 bilangan genap = $\frac{99}{2} \cdot 212$
- Jumlah 99 bilangan genap = $99 \cdot 106$
- Jumlah 99 bilangan genap = 10494
- $y = 10494$

$x + y$:

- $x + y = 208989 + 10494 = 219483$
- Jadi, $x + y = 219483$.

2. Jawaban :

Diketahui:

- $f(xy) = f(x - y)$
- $f(6) = 1$

Cari $f(0)$:



- Misalkan $x = y = 1$, maka $f(1) = f(0)$
- Misalkan $x = 6$ dan $y = 0$, maka $f(0) = f(6)$
- $f(0) = f(6) = 1$

Cari $f(-2)$:

- Misalkan $x = 2$ dan $y = -1$, maka $f(-2) = f(2 - (-1)) = f(3)$
- Misalkan $x = 6$ dan $y = 2$, maka $f(12) = f(6 - 2) = f(4)$
- Misalkan $x = 6$ dan $y = 3$, maka $f(18) = f(6 - 3) = f(3)$
- $f(3) = f(18)$
- Misalkan $x = 3$ dan $y = 3$, maka $f(9) = f(3 - 3) = f(0) = 1$
- Misalkan $x = 6$ dan $y = 3$, maka $f(18) = f(3) = 1$
- $f(-2) = f(3) = 1$

Cari $f(4)$:

- Misalkan $x = 6$ dan $y = 2$, maka $f(12) = f(4)$
- Misalkan $x = 3$ dan $y = 4$, maka $f(12) = f(3 - 4) = f(-1)$
- Misalkan $x = 6$ dan $y = 7$, maka $f(42) = f(6 - 7) = f(-1)$
- $f(-1) = f(42)$
- Misalkan $x = 7$ dan $y = 6$, maka $f(42) = f(7 - 6) = f(1)$
- $f(1) = f(0) = 1$
- $f(42) = f(-1) = 1$
- $f(12) = f(4) = 1$

$f(-2) - f(4)$:

- $f(-2) - f(4) = 1 - 1 = 0$
- Jadi, $f(-2) - f(4) = 0$.

3. Jawaban :

Diketahui:

- $x \equiv 3 \pmod{4}$
- $y \equiv 3 \pmod{4}$

Cari $x - 3y \pmod{4}$:

- $x - 3y \equiv 3 - 3 \times 3 \pmod{4}$
- $x - 3y \equiv 3 - 9 \pmod{4}$
- $x - 3y \equiv 3 - 1 \pmod{4}$
- $x - 3y \equiv 2 \pmod{4}$

Jadi, jika $x - 3y$ dibagi 4, maka bersisa 2.

4. Jawaban :

Lingkaran besar berpusat di A dengan jari-jari $r_1 = 2$ satuan.





Persegi pertama (terluar) memiliki satu titik sudut di A dan satu titik sudut lainnya di lingkaran besar. Diagonal persegi ini adalah jari-jari lingkaran besar, yaitu 2. Misalkan sisi persegi ini adalah s_1 . Maka $s_1^2 + s_1^2 = 2^2 \Rightarrow 2s_1^2 = 4 \Rightarrow s_1^2 = 2$.

Jadi, luas persegi pertama adalah 2 satuan luas.

Lingkaran pertama (di dalam persegi pertama) menyinggung keempat sisi persegi pertama.

Jari-jari lingkaran ini adalah setengah dari sisi persegi pertama, yaitu $r_2 = \frac{s_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Luas lingkaran ini adalah

$$\pi r_2^2 = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\pi \text{ satuan luas.}$$

Persegi kedua (di dalam lingkaran pertama) memiliki keempat titik sudutnya berada di lingkaran pertama.

Diagonal persegi ini adalah diameter lingkaran pertama, $2r_2 = \sqrt{2}$. Misalkan sisi persegi ini adalah s_2 . Maka $s_2^2 + s_2^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2s_2^2 = 2 \Rightarrow s_2^2 = 1$. Jadi, luas persegi kedua adalah 1 satuan luas.

Lingkaran kedua (di dalam persegi kedua) menyinggung keempat sisi persegi kedua. Jari-jari lingkaran ini adalah setengah dari sisi persegi kedua, yaitu $r_3 = \frac{s_2}{2} = \frac{1}{2}$. Luas lingkaran

$$\text{ini adalah } \pi r_3^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi \text{ satuan luas.}$$

Daerah yang diarsir adalah daerah di dalam persegi kedua yang tidak tertutup oleh lingkaran kedua.

Luas daerah diarsir = Luas persegi kedua – Luas lingkaran kedua

$$\text{Luas daerah diarsir} = 1 - \frac{1}{4}\pi \text{ satuan luas.}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir sama dengan $1 - \frac{1}{4}\pi$ satuan luas.

5. Jawaban :

Kemungkinan digit pertama:

- Digit pertama dapat berupa 2, 3, 4, 5, 6, atau 7, tetapi karena angka-angka yang tersedia hanya 0, 2, 3, 5, 7, 8, maka digit pertama dapat berupa 2, 3, 5, atau 7.

Kasus 1: Digit pertama adalah 2

- Digit kedua dapat berupa 4, 5, 7, atau 8 karena harus lebih dari 243. Namun, karena angka-angka yang tersedia hanya 0, 2, 3, 5, 7, 8, maka digit kedua dapat berupa 5, 7, atau 8 jika digit pertama adalah 2 dan digit ketiga bebas.

- Jika digit kedua adalah 5, maka digit ketiga dapat berupa 0, 2, 3, 5, 7, atau 8. Jadi, ada 6 kemungkinan.

- Jika digit kedua adalah 7 atau 8, maka digit ketiga dapat berupa 0, 2, 3, 5, 7, atau 8. Jadi, ada 6 kemungkinan untuk masing-masing digit kedua.

- Total kemungkinan untuk digit pertama 2 adalah 1 (digit kedua 4 tidak ada) + 6 + 6 = 13.

Kasus 2: Digit pertama adalah 3

- Digit kedua dapat berupa 0, 2, 3, 5, 7, atau 8. Jadi, ada 6 kemungkinan untuk digit kedua dan digit ketiga dapat berupa 0, 2, 3, 5, 7, atau 8.

- Total kemungkinan untuk digit pertama 3 adalah $6 * 6 = 36$.

Kasus 3: Digit pertama adalah 5

- Digit kedua dapat berupa 0, 2, 3, 5, 7, atau 8. Jadi, ada 6 kemungkinan untuk digit kedua dan digit ketiga dapat berupa 0, 2, 3, 5, 7, atau 8.

- Total kemungkinan untuk digit pertama 5 adalah $6 * 6 = 36$.

Kasus 4: Digit pertama adalah 7

- Digit kedua dapat berupa 0, 2, 3, 5.

- Jika digit kedua adalah 0, 2, 3, atau 5, maka digit ketiga dapat berupa 0, 2, 3, 5, 7, atau 8. Jadi, ada 6 kemungkinan untuk masing-masing digit kedua.

- Total kemungkinan untuk digit pertama 7 adalah $4 * 6 = 24$.

Total kemungkinan:

- Total kemungkinan = $13 + 36 + 36 + 24 = 109$.

Jadi, banyak bilangan 3 digit yang lebih dari 243 dan kurang dari 780 adalah 109.

6. Jawaban :

Mari kita selesaikan masalah ini dengan menggunakan aljabar.

Misalkan jumlah total siswa di kelas IX adalah x .

Dari catatan Wati, kita tahu bahwa $\frac{3}{20}x$ adalah jumlah siswa laki-laki.

Dari catatan Budi, kita tahu bahwa $\frac{1}{7}(x - 1)$ adalah jumlah siswa laki-laki dikurangi 1 (karena Budi tidak termasuk dalam perhitungan ini).

Kita dapat membuat persamaan berdasarkan informasi ini:

$$\frac{3}{20}x = \frac{1}{7}(x - 1) + 1$$

Sederhanakan persamaan:

$$\frac{3}{20}x = \frac{1}{7}x - \frac{1}{7} + 1$$

$$\frac{3}{20}x - \frac{1}{7}x = \frac{6}{7}$$

$$\frac{21x - 20x}{140} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{x}{140} = \frac{6}{7}$$

$$x = 120$$

Jadi, total siswa di kelas IX adalah 120 orang.

Sekarang, kita dapat menghitung jumlah siswa laki-laki:

$$\text{Jumlah siswa laki-laki} = \frac{3}{20} \times 120 = 18$$

Namun, kita tidak diminta untuk menghitung jumlah siswa laki-laki atau perempuan, melainkan untuk menentukan pecahan yang mewakili jumlah siswa laki-laki menurut catatan Budi.



Pecahan yang mewakili jumlah siswa laki-laki menurut catatan Budi adalah $\frac{1}{7}$ dari total siswa di kelas IX di sekolah mereka.

Jadi, jawaban dari pertanyaan tersebut adalah $\frac{1}{7}$ dari total siswa di kelas IX.

7. Jawaban :

Dari soal tersebut terlihat bahwa luas trapezium BHFE adalah

$$BHFE = \frac{1}{2} \times (FE + BH) \times HF$$

Oleh karena itu terlebih dahulu kita harus mencari nilai FE, HF dan BH.

Pertama-tama menentukan Panjang sisi persegi

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{25} \\ &= 5 \text{ m} \end{aligned}$$

Lalu, tentukan Panjang FE dan HF.

$$\begin{aligned} FE &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ m} \\ HF &= \frac{1}{2} GF \\ &= \frac{1}{2} FE \\ &= \frac{5}{4}\sqrt{2} \text{ m} \end{aligned}$$

Sedangkan untuk Panjang BH, terlebih dahulu harus mencari Panjang HD. Panjang HD bisa dicari dengan menggunakan segitika FGD.

Luas segitiga FGD =

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} DG \times FD &= \frac{1}{2} HD \times GF \\ \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} &= \frac{1}{2} \times HD \times \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ HD &= \frac{5}{4}\sqrt{2} \text{ m} \end{aligned}$$

Dengan begitu Panjang BH adalah

$$\begin{aligned} BH &= BD - HD \\ &= 5\sqrt{2} - \frac{5}{4}\sqrt{2} \\ &= \frac{15}{4}\sqrt{2} \text{ m} \end{aligned}$$

Sehingga luas trapezium BHFE adalah

$$\begin{aligned} \text{Luas BHFE} &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{15}{4}\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) \times \frac{5}{4}\sqrt{2} \\ &= \frac{125}{16} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

8. Jawaban :

Diketahui:

$$-a + \frac{b+c}{2} = 80$$



$$-b + \frac{a+c}{2} = 90$$

$$-c + \frac{a+b}{2} = 100$$

Sederhanakan persamaan:

$$-2a + b + c = 160 \dots (1)$$

$$-a + 2b + c = 180 \dots (2)$$

$$-a + b + 2c = 200 \dots (3)$$

Jumlahkan persamaan (1), (2), dan (3):

$$-4a + 4b + 4c = 540$$

$$-a + b + c = 135$$

Rata-rata dari a, b, dan c:

$$- \text{Rata-rata} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{135}{3} = 45$$

Jadi, rata-rata dari a, b, dan c adalah 45.

9. Jawaban :

Bilangan bulat x diambil secara acak dari $\{x | -5 \leq x \leq 10, x \text{ bilangan bulat}\}$. Himpunan semesta

$$S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Jumlah anggota himpunan semesta

$$n(S) = 10 - (-5) + 1 = 16$$

Pertidaksamaan yang diberikan adalah

$$\sqrt{x^2 - 3x} \leq 2$$

Syarat akar:

$$x^2 - 3x \geq 0 \Rightarrow x(x - 3) \geq 0. \text{ Ini berlaku untuk } x \leq 0 \text{ atau } x \geq 3.$$

Mengkuadratkan kedua sisi:

$$x^2 - 3x \leq 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

Faktorisasi:

$$(x - 4)(x + 1) \leq 0. \text{ Ini berlaku untuk } -1 \leq x \leq 4$$

Irisan dari $x \leq 0$ atau $x \geq 3$ dengan $-1 \leq x \leq 4$ adalah $[-1, 0] \cup$.

Bilangan bulat x yang merupakan penyelesaian pertidaksamaan dan berada dalam himpunan semesta adalah $A = \{-1, 0, 3, 4\}$. Jumlah anggota himpunan kejadian $n(A) = 4$.

10. Jawaban :

Diketahui:

$$-2x^n + \frac{3}{x^{\frac{n}{2}}} - 2 = 0$$

Sederhanakan persamaan:

$$-2x^n + 3x^{\frac{n}{2}} - 2 = 0$$

Misalkan $y = x^{\frac{n}{2}}$:



$$- 2y^2 + 3y - 2 = 0$$

Faktorisasi:

$$- (2y - 1)(y + 2) = 0$$

Selesaikan untuk y:

$$- y = \frac{1}{2} \text{ atau } y = -2$$

Karena x adalah bilangan riil positif, maka $y = x^{\frac{n}{2}} > 0$:

$$- y = \frac{1}{2}$$

$$- x^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}$$

Hitung nilai $\frac{2}{x^{n+\frac{1}{4}}}$:

$$- x^n = \frac{1}{4}$$

$$- \frac{2}{x^{n+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Jadi, nilai $\frac{2}{x^{n+\frac{1}{4}}}$ adalah 4.





URAIAN

1. Jawaban :

Misalkan:

- Umur Agus saat ini adalah ab (dua digit)
- Umur Fauzan saat ini adalah cd (dua digit)

Bilangan empat digit yang dibentuk oleh umur Agus dan Fauzan:

$$- 100ab + cd = x^2$$

Dua puluh tiga tahun kemudian:

- Umur Agus adalah $ab + 23$
- Umur Fauzan adalah $cd + 23$
- Bilangan empat digit yang dibentuk oleh umur mereka adalah $100(ab + 23) + (cd + 23)$
- $100ab + 2300 + cd + 23 = 100ab + cd + 2323 = y^2$

Selisih antara dua bilangan empat digit:

$$- y^2 - x^2 = 2323$$
$$- (y + x)(y - x) = 2323 = 23 \times 101$$

Faktorisasi 2323:

$$- y + x = 101 \text{ dan } y - x = 23$$

Selesaikan sistem persamaan:

$$- 2y = 124$$
$$- y = 62$$
$$- x = 39$$

Umur Agus dan Fauzan saat ini:

$$- x^2 = 39^2 = 1521$$

- Umur Agus adalah 15 tahun dan umur Fauzan adalah 21 tahun.
Jadi, umur Agus dan Fauzan saat ini adalah 15 dan 21 tahun.

2. Jawaban :

Diketahui:

- Keliling segiempat ABCD = 64 cm
- Keliling segitiga ABC = 24 cm
- Keliling segitiga ACD = 60 cm

Misalkan:

- AB = a
- BC = b
- CD = c
- DA = d

Keliling segiempat ABCD:

$$- a + b + c + d = 64$$

Keliling segitiga ABC:



- $a + b + AC = 24$

Keliling segitiga ACD:

- $c + d + AC = 60$

Jumlahkan keliling segitiga ABC dan ACD:

- $a + b + c + d + 2AC = 84$

Substitusikan keliling segiempat ABCD:

- $64 + 2AC = 84$

- $2AC = 20$

- $AC = 10$

Cari nilai $a + b$ dan $c + d$:

- $a + b = 24 - 10 = 14$

- $c + d = 60 - 10 = 50$

Periksa keliling segiempat ABCD:

- $a + b + c + d = 14 + 50 = 64$ (benar)

Luas segiempat ABCD:

- Luas = Luas segitiga ABC + Luas segitiga ACD

- Luas segitiga ABC = $\frac{1}{2} ab$

- Luas segitiga ACD = $\frac{1}{2} cd$

Cari nilai ab dan cd :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 14^2 = 196$

- $a^2 + b^2 = AC^2 = 10^2 = 100$

- $2ab = 196 - 100 = 96$

- $ab = 48$

- $(c + d)^2 = c^2 + 2cd + d^2 = 50^2 = 2500$

- $c^2 + d^2 = AC^2 = 10^2 = 100$

- $2cd = 2500 - 100 = 2400$

- $cd = 1200$

Luas segiempat ABCD:

- Luas = $\frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} cd = \frac{1}{2}(48) + \frac{1}{2}(1200) = 24 + 600 = 624$

Jadi, luas segiempat ABCD adalah 624.

3. Jawaban :

Untuk menemukan bilangan bulat positif ke-5 yang memenuhi sifat-sifat yang diberikan, kita perlu menganalisis kondisi yang diberikan:

- 2 membagi n

- 3 membagi $n + 1$

- 4 membagi $n + 2$

- 5 membagi $n + 3$

- 6 membagi $n + 4$





- 7 membagi $n + 5$

- 8 membagi $n + 6$

Dari kondisi tersebut, kita dapat menyimpulkannya menjadi beberapa poin penting:

- n harus genap karena 2 membagi n

- $n + 1$ harus merupakan kelipatan 3

- $n + 2$ harus merupakan kelipatan 4

- $n + 3$ harus merupakan kelipatan 5

- $n + 4$ harus merupakan kelipatan 6

- $n + 5$ harus merupakan kelipatan 7

- $n + 6$ harus merupakan kelipatan 8

Kita tahu bahwa bilangan bulat positif pertama yang memenuhi sifat-sifat ini adalah 2. Mari kita cari pola untuk menemukan bilangan lainnya.

Langkah-langkah untuk menemukan bilangan bulat positif ke-5:

1. Tentukan KPK: Cari KPK dari 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 untuk menentukan interval antara bilangan yang memenuhi sifat-sifat tersebut. KPK dari angka-angka tersebut adalah $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$.

2. Cari Bilangan yang Memenuhi: Karena bilangan pertama adalah 2, kita dapat menggunakan rumus $2 + 840k$ untuk mencari bilangan lainnya, di mana k adalah bilangan bulat non-negatif.

Menghitung Bilangan Bulat Positif ke-5:

- Bilangan ke-1: 2

- Bilangan ke-2: $2 + 840 \cdot 1 = 842$

- Bilangan ke-3: $2 + 840 \cdot 2 = 1682$

- Bilangan ke-4: $2 + 840 \cdot 3 = 2522$

- Bilangan ke-5: $2 + 840 \cdot 4 = 3362$

Jadi, bilangan bulat positif ke-5 yang memenuhi sifat-sifat tersebut adalah 3362.

4. Jawaban :

Misalkan:

- Persamaan garis l_1 adalah $y = 3x + c$

- Persamaan garis l_2 adalah $y = 4x + c$

- Persamaan garis l_3 adalah $y = 5x + c$

Titik potong dengan sumbu X:

- Garis l_1 memotong sumbu X di titik $(-\frac{c}{3}, 0)$

- Garis l_2 memotong sumbu X di titik $(-\frac{c}{4}, 0)$

- Garis l_3 memotong sumbu X di titik $(-\frac{c}{5}, 0)$

Jumlah absis titik potong:

$$-\frac{c}{3} - \frac{c}{4} - \frac{c}{5} = \frac{47}{60}$$

$$-\frac{-20c - 15c - 12c}{60} = \frac{47}{60}$$



$$-47c = 47$$

$$-c = -1$$

Persamaan garis l_1 :

$$-y = 3x - 1$$

Jadi, persamaan garis l_1 adalah $y = 3x - 1$.

5. Jawaban :

Penyelesaian Skor Pertandingan Tim Garuda Melawan Tim Merpati

Untuk menentukan skor pertandingan antara Tim Garuda dan Tim Merpati, kita perlu menganalisis data "Gol (Memasukkan-Kemasukan)" dari tabel.

1. Analisis Gol Memasukkan dan Kemasukan untuk Tim Garuda:

Dari tabel, Gol (Memasukkan-Kemasukan) Tim Garuda adalah 4-3. Ini berarti Tim Garuda memasukkan 4 gol dan kemasukan 3 gol selama kompetisi.

2. Analisis Gol Memasukkan dan Kemasukan untuk Tim Merpati:

Dari tabel, Gol (Memasukkan-Kemasukan) Tim Merpati adalah 3-7. Ini berarti Tim Merpati memasukkan 3 gol dan kemasukan 7 gol selama kompetisi.

3. Menentukan Skor Pertandingan Garuda vs Merpati:

Karena masing-masing tim saling berhadapan satu kali, skor pertandingan Garuda melawan Merpati dapat ditentukan dari selisih gol yang tercatat dalam Gol (Memasukkan-Kemasukan) dan juga dari kategori Menang, Kalah, Seri.

Tim Garuda memiliki 1 kemenangan, 0 kekalahan, dan 1 seri.

Tim Merpati memiliki 0 kemenangan, 2 kekalahan, dan 0 seri.

Pertandingan antara Garuda dan Merpati pasti menghasilkan salah satu dari hasil ini. Karena Merpati kalah 2 kali dan seri 0 kali, salah satu kekalahan Merpati adalah melawan Garuda.

Untuk menentukan skor spesifik, kita melihat selisih gol. Jika Garuda menang melawan Merpati, maka gol yang dimasukkan Garuda di pertandingan itu harus lebih banyak dari gol yang dimasukkan Merpati.

Meskipun tabel memberikan total gol untuk seluruh kompetisi, kita bisa menyimpulkan bahwa jika Garuda menang melawan Merpati, dan Merpati kalah 2 kali, maka pertandingan Garuda vs Merpati adalah salah satu kekalahan Merpati.

Kesimpulan:

Berdasarkan data yang ada, kita tahu Tim Garuda menang melawan Tim Merpati karena Tim Garuda memiliki 1 kemenangan dan Tim Merpati memiliki 2 kekalahan dan 0 seri. Namun, skor spesifik pertandingan tidak dapat ditentukan hanya dari tabel "Gol (Memasukkan-Kemasukan)" karena itu adalah total gol sepanjang kompetisi, bukan skor per pertandingan.

Jadi, Skor pertandingan antara Tim Garuda melawan Tim Merpati tidak dapat ditentukan secara pasti hanya dari data yang diberikan dalam tabel. Namun, dapat disimpulkan bahwa Tim Garuda memenangkan pertandingan melawan Tim Merpati.