PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMA

TAHUN 2024

1. **Penyelesaian :**

Dituliskan

$$\sqrt{a-5} = x, \sqrt{b-5} = y$$

Lalu kita ingin menyelesaikannya

$$\sqrt{x^2+5} + \sqrt{y^2+5} = 6$$
$$x + y = 4$$

Namun untuk menyelesaikan hal ini, kita hanya perlu mencatat bahwa

$$\begin{aligned} 36 &= \left(\sqrt{x^2+5} + \sqrt{y^2+5}\right)^2 \\ &= (x^2+5) + (y^2+5) + 2\sqrt{(x^2+5)(y^2+5)} \\ &\overset{\text{CS}}{\geq} (x^2+5) + (y^2+5) + 2(xy+5) = (x+y)^2 + 20 = 36 \end{aligned}$$

dan agar persamaan berlaku, kita harus memiliki x = y = 2 dan dengan demikian a = b = 9 seperti yang diinginkan.

2. **Penyelesaian :**

Asumsikan sebaliknya, dan 16 = a + b + c. Setiap bilangan prima yang membagi setidaknya satu dari a, b, dan c seharusnya membagi setidaknya satu dari variabel lainnya. Kita dapat mengabaikan 11 dan 13.

Jika 7 merupakan bagian dari bilangan prima, maka a + b + c > 7 + 14 = 21, kontradiksi.

Jika 5 merupakan bagian dari bilangan prima, maka satu-satunya kemungkinan tuplet (a, b, c) = (1, 5, 10), tidak fatal.

Jadi, a, b, c ∈ {1,2,3,4,6,8,9,12}.

Selain itu, berdasarkan paritas, a, b, c semuanya pasti genap. Oleh karena itu, satu-satunya kemungkinan tuplet adalah (a, b, c) = (2, 6, 8), yang tidak fatal.

Kami bekerja dengan modulo 6 dan 4. Kami memiliki:

$$
\begin{aligned}
6k+2 &= 2+2k+4k, \quad 2^1(2k)^1(4k)^{-1}=1,\\
6k+4 &= 4+2k+4k, \quad 4^1(2k)^2(4k)^{-2}=1,\\
4k+3 &= 3+k+3k, \quad 3^1(k)^1(3k)^{-1}=1,\\
4k+9 &= 9+k+3k \quad 9^1(k)^2(3k)^{-2}=1.
\end{aligned}
$$

Masing-masing dekomposisi ini dapat dengan mudah dilihat sebagai sesuatu yang fatal. Kasus yang tersisa hanya N = 21,45 (dari kasus 4k + 9, dengan k = 3 atau k = 9). Kita punya

$$
\begin{aligned}
21 &= 1+4+16 = 3+6+12, \quad 1^1 4^2 16^{-1} = 3^1 6^{-2} 12^1 = 1,\\
45 &= 6+12+27 = 3+12+24, \quad 6^6 12^{-3} 27^1 = 9^1 12^6 24^{-4} = 1.
\end{aligned}
$$

Ini melengkapi buktinya.

3. Penyelesaian :

W.L.O.G. O = 0 dan (ABC) sebagai lingkaran satuan. Kita memiliki h = a + b + c dan |a| = |b| = |c| = |d| = |e| = 1 (menunjukkan bahwa $\bar{a} = 1/a$ berdasarkan sifat $a\bar{a}$ = |a|^2). Karena BE ⊥ AC, kita memiliki be + ac = 0 ⟺ e = $-\frac{ac}{b}$ dan d = $-\frac{bc}{a}$. Selesaikan persamaan sistem untuk a':

$$|a'-a| = |a'-h| = |a'-e|,$$

Kita punya

$$
a' = \frac{\begin{vmatrix} h & h\bar{h} & 1\\ a & a\bar{a} & 1\\ e & e\bar{e} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h & \bar{h} & 1\\ a & \bar{a} & 1\\ e & \bar{e} & 1\end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a+b+c & (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) & 1\\ a & 1 & 1\\ -\frac{ac}{b} & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+b+c & \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1\\ a & \frac{1}{a} & 1\\ -\frac{ac}{b} & -\frac{b}{ac} & 1\end{vmatrix}}
$$

$$
= \frac{-\frac{(a+b)(a+c)(b+c)^2}{b^2c}}{\frac{(b-a)(b+a)(b+c)^2}{ab^2c}} = -\frac{(a+c)a}{b-a}.
$$

Secara analogi, $b' = -\frac{(b+c)b}{a-b}$. Oleh karena itu, titik tengah A'B' adalah

$$
m = \frac{a'+b'}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-a^2-ac+b^2+bc}{b-a}\right) = \frac{(b-a)(a+b+c)}{2(b-a)} = \frac{a+b+c}{2},
$$

yang juga merupakan titik tengah OH.

4. Penyelesaian :

Misalkan X_1 didefinisikan sebagai orang X yang mengubah bilangan menjadi 2P – Q dan 2Q – P.

Misalkan X_2 didefinisikan sebagai orang X yang mengubah bilangan menjadi 5P – 4Q dan 5Q – 4P.

Dan biarkan $A_aB_bA_cB_d$ ... mendefinisikan langkah kedua orang yang bermain, di mana a,b,c,d, ... ∈ 1,2.

Mencantumkan semua kemungkinan hasil dari Putaran 1 hingga Putaran 3.

[Bagian 1]

$K_1 = 2P - Q$ dan $2Q - P$

$K_2 = 5P - 4Q$ dan $5Q - 4P$

[Bagian 2]

$K_1B_1 = 5P - 4Q$ dan $5Q - 4P$

$K_1B_2 = 14P - 13Q$ dan $14Q - 13P$

$K_2B_1 = 14P - 13Q$ dan $14Q - 13P$

$K_2B_2 = 41P - 40Q$ dan $41Q - 40P$

[Bagian 3]

$K_1B_1K_1 = 14P - 13Q$ dan $14Q - 13P$

$K_1B_1K_2 = 41P - 40Q$ dan $41Q - 40P$

$K_1B_2K_1 = 41P - 40Q$ dan $41Q - 40P$

$K_1B_2K_2 = 112P - 111Q$ dan $112Q - 111P$

$K_2B_1K_1 = 41P - 40Q$ dan $41Q - 40P$

$K_2B_1K_2 = 112P - 111Q$ dan $112Q - 111P$

$K_2B_2K_1 = 112P - 111Q$ dan $112Q - 111P$

$K_2B_2K_2 = 365P - 364Q$ dan $365Q - 364P$

Perhatikan bahwa WLOG, P = 2024, Q = A

Perhatikan bahwa untuk ronde 1, 2, 3, nilai maksimum A agar orang tersebut tidak kalah adalah:

$$\frac{2}{1} \cdot 2024 \iff \frac{5}{4} \cdot 2024 \iff \frac{14}{13} \cdot 2024$$

Yang merupakan nilai yang menurun. Dan karena kemungkinan langkah permainannya sama, maka akan terus berlanjut. Oleh karena itu, kita perlu Kobar kalah secepat mungkin, yaitu ronde ke-3. Namun, kita juga ingin Borah tidak kalah di ronde ke-2, jadi kita harus menemukan A, sehingga

$$\frac{5}{4} \cdot 2024 \geq A \geq \frac{14}{13} \cdot 2024$$

(batas atas putaran 2 dan batas atas putaran 3)

Karena A harus berupa bilangan bulat, nilai tertinggi A adalah 2179.

5. **Penyelesaian :**

(a) Amati bahwa 0 pasti berwarna biru, karena (1) (jika tidak, anggaplah 0 bukan biru, anggaplah i sebagai bilangan biru (yang ada), lalu terapkan (2) dan (3)). Sekarang, asumsikan 1 juga berwarna biru, jika k adalah bilangan oranye terkecil, maka k + 1 juga akan berwarna oranye, dan karena 0 dan 1 berwarna biru, maka k ≥ 2. Argumen yang sama berlaku untuk merah, jadi ini berarti semua bilangan bulat i ≤ 1 berwarna biru, dan setelah itu dapat memiliki paling banyak 2 warna (biru, dengan oranye atau merah, tetapi tidak keduanya). Oleh karena itu, 0 dan 1 pasti berwarna berbeda.

(b) Perhatikan bahwa harus ada setidaknya 2 bilangan bulat biru, karena jika hanya ada satu, dan ketiga warna digunakan; akan ada setidaknya 1 warna dengan 2 elemen berbeda, jadi dengan menggunakan (1) kita dapat mengkonstruksi 2 x 1 bilangan biru yang berbeda (jadi ada bilangan biru yang bukan 0). Dengan menggunakan pengamatan ini dan soal (a), kita dapat menggeneralisasi fakta di atas, dengan cara berikut:

Lemma. Pewarnaannya periodik, dengan periode |x| > 1, di mana |x| adalah besaran positif terkecil sehingga x berwarna biru.

Bukti:

Perhatikan bahwa berdasarkan (2) dan (3), jika x berwarna biru, maka -x pasti berwarna biru, karena x + (-x) = 0 dan 0 berwarna biru. Lanjutkan induksi untuk menyimpulkan bahwa semua kelipatan bilangan bulat x berwarna biru (misalkan (kx) + (-x) = (k – 1)x dengan asumsi bahwa -x dan (k – 1)x keduanya berwarna biru).

Selanjutnya, perhatikan k|x| + a, di mana k adalah bilangan bulat dan 1 ≤ a ≤ |x|. Karena |x| berwarna biru, (k + 1)|x| + a = (k|x| + a) + |x| sehingga keduanya memiliki warna yang sama (berdasarkan persamaan (2) dan (3)).

Dari lema tersebut, dapat disimpulkan bahwa warna biru hanya ada pada kelipatan bilangan bulat x (⋆). Misalkan x > 0 karena -x dan x berwarna sama. Jadi, perhatikan pewarnaan dalam (mod x).

Sekarang kita akan menunjukkan bahwa x = 3. Jelas bahwa x = 2 tidak berlaku karena kita tahu ketiga warna tersebut digunakan, dan karena periodisitas.

Jika sebaliknya x > 3, pilih 0 < a < b < x dengan warna yang sama dan 0 < c < x dengan warna yang berbeda (keduanya tidak biru). Berdasarkan (1), a + c dan b + c harus berwarna biru, namun 0 < (b + c) - (a + c) = b – a < x yang melanggar (⋆).

Jadi semua pewarnaan yang mungkin adalah biru untuk semua bilangan bulat 0 (mod 3), dan untuk 1 (mod 3) dan 2 (mod 3) kita dapat mewarnainya merah, oranye atau sebaliknya, dan kita telah menunjukkan bahwa hanya ini yang berfungsi.

6. **Penyelesaian :**

$$180^\circ(n-2) = \sum_i \sum_j A_i A_j A_{i+1} \geq \sum_i \alpha_i(n-2) \implies 180^\circ \geq \sum_i \alpha_i.$$

Kesetaraan terjadi jika $A_1A_2 \ldots A_n$ siklik.

7. **Penyelesaian :**

Klaim 1. deg(P) = 2, sehingga kita dapat menulis P sebagai P(x) = $(x + \alpha)^2 + \beta$ untuk beberapa $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pembuktian. Perhatikan bahwa kita memiliki P(2x) ≤ 6P(x) untuk semua x ∈ ℝ, yaitu $\frac{P(2x)}{P(x)} \leq 6$ untuk semua x sehingga P(x) ≠ 0. Karena deg(P) ≥ 1, kita memiliki $2^{\deg}$(P) = $\lim_{x\to\infty} \frac{P(2x)}{P(x)} \leq 6$, dan dengan demikian deg(P) ≤ 2$. Karena P(x) ≥ $-\frac{3}{2}$ P(0) untuk semua

$x \in \mathbb{R}$, yaitu P dibatasi dari bawah, maka P tidak dapat linear dan dengan demikian P(x) = $(x + \alpha)^2 + \beta$ untuk beberapa $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Kondisi permasalahannya kemudian diterjemahkan menjadi $3((x + \alpha)^2 + (y + \alpha)^2) + 5\beta \geq (x + y + \alpha)^2$ berlaku untuk semua x, y ∈ ℝ. Perbaiki $\alpha \in \mathbb{R}$.

Klaim 2. $\beta \geq \frac{3}{5}\alpha^2$ dan ini ketat.

Bukti. Untuk melihat ini, perhatikan saja bahwa ketika x = y = -2α, kita telah memperoleh batas bawah yang diinginkan $\beta \geq \frac{3}{5}\alpha^2$.

Untuk melihat bahwa $\beta = \frac{3}{5}\alpha^2$ berfungsi, kita melihat bahwa untuk setiap x, y ∈ ℝ.

$$3((x+\alpha)^2 + (y+\alpha)^2 + \alpha^2) - (x+y+\alpha)^2 = \frac{1}{2}(2\alpha + 2x - y)^2 + \frac{3}{2}(2\alpha + y)^2 \geq 0$$

Untuk menyelesaikannya, kita diminta meminimalkan P(2024) = $(2024 + \alpha)^2 + \beta \geq (2024 + \alpha)^2 + \frac{3}{5}\alpha^2 \geq 1536216$ di mana kesetaraan berlaku ketika α = -1265 dan β = 960135.

8. **Penyelesaian :**

Pertama, pilih a_k = k untuk setiap k. Kemudian, $s_k = (n - k)!\,(k - 1)! \mid (n - 1)!$ untuk setiap k dan $s_1 = (n - 1)!$, sehingga KPK($s_1, s_2, \ldots, s_n$) = (n – 1)!. Selanjutnya, kita perlu menunjukkan klaim berikut: (n – 1)! harus membagi KPK($s_1, s_2, \ldots, s_n$).

Untuk membuktikan klaim tersebut, cukup dengan membuktikan bahwa $\nu_p((n-1)!) \leq \max_k \nu_p(s_k)$ untuk sembarang bilangan prima p. Perhatikan bahwa menurut rumus Legendre,

$$\nu_p((n-1)!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-1}{p^j} \right\rfloor .$$

Untuk membuktikan ketimpangan, kita berulang kali menjadi serakah!

Misalkan $A_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Berdasarkan prinsip lubang merpati, terdapat bilangan bulat $d_0 \in A$ sehingga $A_1 = \{x \in A_0 : x \equiv d_0 \pmod p\}$ berukuran paling sedikit $\lceil n/p \rceil = \lfloor (n-1)/p \rfloor + 1$. Berdasarkan prinsip lubang merpati, terdapat bilangan bulat $d_1 \equiv d_0 \pmod p$ sehingga $A_2 = \{x \in A_1 : x \equiv d_1 \pmod{p^2}\}$ berukuran paling sedikit $\lfloor (n-1)/p^n \rfloor + 1$. Dengan melanjutkan proses ini, kita dapat menunjukkan secara induktif bahwa terdapat rantai bilangan bulat $d_0, d_1, \ldots$ di A sehingga:

1. $d_{i+1} \equiv d_i \pmod{p^{i+1}}$ untuk setiap i; dan

2. untuk setiap $n \geq 1$, himpunan $A_n = \{x \in A_0 : x \equiv d_{n-1} \pmod{p^n}\}$ berukuran paling sedikit $\lfloor (n-1)/p^n \rfloor + 1$.

Untuk i yang cukup besar (sehingga $|x - y| < p^i$ untuk semua $x, y \in A_0$), kita memiliki $A_i = \{d_i\}$. Lebih lanjut, kondisi 1 memastikan bahwa $A_{n+1} \subseteq A_n$ untuk semua $n \geq 1$. Dengan demikian, barisan $(d_i)_{i\geq 1}$ pada akhirnya konstan, katakanlah konvergen ke d, dan kita memiliki $d \equiv d_i \pmod{p^{i+1}}$ untuk setiap i. Akibatnya, $A_n = \{x \in A_0 : x \equiv d \pmod{p^n}\}$ untuk setiap $n \geq 1$.

Akhirnya, tulis $d = a_k$ untuk beberapa $k \leq n$. Pilih N yang cukup besar sehingga $|A_{N+1}| = 1$; kita kemudian memperoleh

$$\begin{aligned}
\nu_p(s_k) &= \sum_{i \neq k} \nu_p(a_k - a_i) \\
&= \sum_{n=1}^{N} n\#(A_n \setminus A_{n+1}) \\
&= \sum_{n=1}^{N} n(|A_n| - |A_{n+1}|) \\
&= \sum_{n=1}^{N} |A_n| - N|A_{n+1}| \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} \left(\left\lfloor \frac{n-1}{p^n} \right\rfloor + 1 \right) - N \\
&= \nu_p((n-1)!).
\end{aligned}$$