PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMA

TAHUN 2023

1. **Penyelesaian :**

Perhatikan bahwa

$$\angle EBD = \angle ABD = \pi - 2\angle BAD = \pi - 2\angle EAC = \angle ACE = \angle ECD,$$

maka BEDC siklik, dan

$$\angle BA'C = \angle BAC = \angle EAC = \angle AEC,$$

maka BECA' siklik. Kita dapat menyimpulkan bahwa A'BEDC siklik dan mudah untuk membuktikan bahwa $\triangle ABC \cong \triangle A'BC$. Oleh karena itu, (BAC) dan (A'DE) memiliki jari-jari yang sama.

2. **Penyelesaian :**

Klaim bahwa semua solusi untuk persamaan fungsional di atas berbentuk $f(x) = \lfloor x \rfloor + k$ untuk semua x, untuk beberapa $k \in \mathbb{Z}$ tetap. Untuk melihat ini, kita melihat bahwa untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)+y) = \lfloor \lfloor x \rfloor + y \rfloor + 2k = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2k = \lfloor x + \lfloor y \rfloor + 2k \rfloor = \lfloor x + f(f(y)) \rfloor$$

Sekarang kita akan membuktikan bahwa tidak ada solusi lain. Misalkan P(x, y) adalah pernyataan x dan y pada persamaan fungsional yang diberikan.

Klaim 1. $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{Z}$.

Bukti. Perbaiki $\alpha \in \mathbb{R}$. $P(0, \alpha - f(0))$ memberi kita

$$f(\alpha) = f(f(0) + \alpha - f(0)) = \lfloor f(f(\alpha - f(0))) \rfloor \in \mathbb{Z}$$

Klaim 2. $f(a) = f(b) \Longrightarrow \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$.

Bukti. Karena $f(f(0)) \in \mathbb{Z}$ dari klaim pertama, P(a, 0) dan P(b, 0) memberikan kita

$$\lfloor a \rfloor + f(f(0)) = f(f(a)) = f(f(b)) = \lfloor b \rfloor + f(f(0)) \implies \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$$

Untuk menyelesaikan masalah ini, cukup perhatikan bahwa

$$f(f(0)+x) \overset{P(0,x)}{=} \lfloor f(f(x)) \rfloor \overset{\text{Claim 01}}{=} f(f(x)) \overset{\text{Claim 02}}{\Longrightarrow} f(x) \overset{\text{Claim 01}}{=} \lfloor f(x) \rfloor = \lfloor x + f(0) \rfloor \overset{\text{Claim 01}}{=} \lfloor x \rfloor + f(0)$$

sesuai keinginan.

3. **Penyelesaian :**

Saya mengklaim Asep bisa menang paling banyak dalam $\lceil \log_2 n \rceil$ langkah. Ini menyelesaikan masalah ketika $n \geq 25$, tetapi sisanya bisa dengan mudah dihancurkan.

Untuk n = 1, kita sudah selesai, jadi sekarang anggaplah $n \geq 2$. Pertama, perhatikan bahwa jika $X = 2^k$, maka Asep sudah menang jika k genap, dan Asep hanya perlu satu langkah lagi untuk menang jika k ganjil. Misalkan k ganjil ($k \geq 1$). Jika Neneng memilih ke atas, maka

Asep memilih $d = X = 2^k$, mengganti angka di papan dengan $X + d = 2^{k+1}$, yang merupakan kuadrat sempurna bukan nol. Jika Neneng memilih ke bawah, maka Asep memilih $d = 2^{k-1}$; maka angka di papan diganti dengan $X - d = 2^{k-1}$, yang juga merupakan kuadrat sempurna.

Untuk kasus umum, kami mengandalkan klaim berikut.

Klaim:

Misalkan angka X saat ini di papan memenuhi $2^m < X < 2^{m+1}$ untuk beberapa $m \geq 1$. Maka Asep selalu dapat mengganti X (dalam satu langkah) dengan angka Y sehingga $2^m \leq Y \leq 2^{m+1}$ dan $v_2(Y) \geq v_2(X) + 1$.

Bukti:

Karena $2^m < X < 2^{m+1}$, X bukan pangkat 2. Kita dapat menulis $X = 2^t c$, di mana $c > 1$ adalah bilangan ganjil dan $t = v_2(X)$; otomatis $t < m$. Sekarang, apa pun yang dilakukan Neneng, Asep memilih $d = 2^t$. Maka, bilangan baru di papan tulis adalah $X + d = 2^t(c + 1)$ atau $X - d = 2^t(c - 1)$.

Karena $2^m < X < 2^{m+1}$, kita peroleh $2^{m-t} < c < 2^{m-t+1}$. Jadi, $2^{m-t} \leq c \pm 1 \leq 2^{m-t+1}$, apa pun pilihan tandanya di $\pm$. Bagaimanapun, bilangan baru Y di papan tulis memenuhi $2^m \leq Y \leq 2^{m+1}$.

Karena c ganjil, kita peroleh $v_2(c \pm 1) > 1$, apa pun pilihan tandanya di $\pm$. Dalam kedua kasus tersebut, bilangan baru Y di papan juga memenuhi $v_2(Y) = t + v_2(c \pm 1) \geq t + 1$. Klaim ini terbukti.

Sekarang kita beralih ke kasus umum $n \geq 2$. Terdapat satu bilangan bulat positif k sehingga $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Sekali lagi, jika $n = 2^k$, kita sudah selesai, jadi sekarang misalkan $2^k < n < 2^{k+1}$. Mengulangi klaim ini bila perlu, kita mengklaim bahwa Asep dapat mencapai keadaan di mana angka di papan adalah 2^k atau 2^{k+1} dalam paling banyak k langkah. Bahkan, jika tidak, maka setelah k langkah, angka X di papan akan tetap memenuhi $2^k < X < 2^{k+1}$, katakanlah dengan klaim dan induksi kecil. Namun, klaim tersebut juga menyatakan bahwa $v_2(X) \geq v_2(n) + k \geq k$ karena angka awal di papan adalah n. Sebuah kontradiksi!

Kami membuktikan bahwa Asep dapat mencapai keadaan dengan angka di papan yang merupakan pangkat 2 dalam paling banyak $k = \lceil \log_2 n \rceil - 1$ langkah. Jika pangkat 2 tersebut bukan kuadrat, seperti pada paragraf pertama, Asep hanya membutuhkan satu langkah lagi. Ini membuktikan bahwa Asep dapat menang dalam paling banyak $\lceil \log_2 n \rceil$ langkah.

4. **Penyelesaian :**

Jawabannya ya. Kita akan mulai dengan klaim berikut.

Klaim 1. Perbaiki $k \in \mathbb{N}$. Terdapat bilangan bulat positif $N_k > 10^{k+1}$ sehingga:

- N_k habis dibagi 2^k, tetapi tidak habis dibagi 2^{k+1}.

- Representasi desimal dari N_k hanya berisi digit 1, 7, dan 8 (dan semuanya digunakan setidaknya sekali).

Bukti. Kita akan membuktikan pernyataan ini dengan induksi pada $k \in \mathbb{N}$. Pernyataan ini trivial untuk $k = 1$, cukup ambil $N_1 = 178$. Sekarang anggaplah pernyataan ini benar untuk semua $k = \ell$. Kita akan membuktikan pernyataan ini untuk $k = \ell + 1$.

Konstruksikan $M_{\ell+1} = \underbrace{N_\ell \ldots N_\ell}_{3\text{ kali}}$ dengan menggabungkan 3 bilangan N_ℓ. Kita melihat bahwa $M_{\ell+1} > 10^{\ell+2}$ dan berdasarkan konstruksi, $v_2(M_{\ell+1}) = v_2(N_\ell) = \ell$. Sekarang, kita tahu bahwa ada sebuah tanda $* \in \{+, -\}$ sehingga $M_{\ell+1} * 10^\ell \equiv 2^{\ell+1} \pmod{2^{\ell+2}}$. Untuk melihat hal ini, pertama kita lihat bahwa $2^{\ell+1} | M_{\ell+1} \pm 10^\ell$ sebagai $v_2(M_{\ell+1}) = v_2(10^\ell) = \ell$. Sekarang sebagai

$$\nu_2((M_{\ell+1} + 10^\ell) - (M_{\ell+1} - 10^\ell)) = \nu_2(2 \cdot 10^\ell) = \ell + 1,$$

maka kita tidak bisa memiliki $M_{\ell+1} \pm 10^\ell$ keduanya menjadi $0 \pmod{2^{\ell+2}}$.

Untuk memudahkan, misalkan $X = M_{\ell+1} * 10^\ell$. Kita sekarang akan menggunakan angka ini untuk mengkonstruksi $N_{\ell+1}$. Tulis X dalam representasi desimalnya:

$$X = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i \text{ where } 0 \le a_i \le 9, \ \forall 0 \le i \le n$$

Berdasarkan hipotesis induktif, N_ℓ hanya memuat digit 1, 7, dan 8, sehingga berdasarkan konstruksi kita, $a_i \in \{1, 7, 8\}$ $\forall 0 \le i \le n$, $i \ne \ell$. Sekarang, mari kita definisikan

$$N_{\ell+1} = \sum_{i=0}^{n} b_i 10^i, \text{ Dimana}$$

- $b_i = a_i$ untuk semua $0 \le i \le n$, kecuali $i = \ell$ dan $i = \ell + 1$.
- Jika $a_\ell \in \{1, 5, 9\}$, maka $b_\ell = 1$ dan $b_{\ell+1} = a_{\ell+1}$.
- Jika $a_\ell \in \{2, 6\}$, maka $b_\ell = 8$ dan $b_{\ell+1} = \begin{cases} 8 & \text{jika } a_{\ell+1} \text{ ganjil} \\ 1 & \text{sebaliknya} \end{cases}$
- Jika $a_\ell \in \{0, 4, 8\}$, maka $b_\ell = 8$ dan $b_{\ell+1} = a_{\ell+1}$.
- Jika $a_\ell \in \{3, 7\}$, maka $b_\ell = 7$ dan $b_{\ell+1} = a_{\ell+1}$.

Kita sekarang dapat melihat bahwa semua digit dari $N_{\ell+1}$ adalah 1, 7, atau 8, dan setiap digit muncul setidaknya sekali berdasarkan definisi $M_{\ell+1}$ (dan kita hanya mengubah 2 digit dari penggabungan). Kita sekarang akan membuktikan bahwa $N_{\ell+1} \equiv X \pmod{2^{\ell+2}}$, yang membuktikan hasil yang diinginkan. Untuk melihat ini, kita cukup melihat bahwa

$$N_{\ell+1} - X = 10^{\ell+1}(b_{\ell+1} - a_{\ell+1}) + 10^\ell(b_\ell - a_\ell)$$

Pertimbangkan dua kasus:

- Jika $a_\ell \in \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, kita mempunyai $4 \mid b_\ell - a_\ell$ dan $b_{\ell+1} - a_{\ell+1}$ dan dengan demikian $2^{\ell+2} | N_{\ell+1} - X$ yang merupakan apa yang kita inginkan.
- Jika $a_\ell \in \{2, 6\}$, kita memiliki $b_\ell - a_\ell \equiv 2 \pmod 4$ dan $b_{\ell+1} - a_{\ell+1} \equiv 1 \pmod 2$, yang membuktikan apa yang kita inginkan.

Dari klaim di atas, terdapat $N_{2023} > 10^{2024}$ sehingga $v_2(N_{2023}) = 2023$, di mana representasi desimal N hanya berisi digit 1, 7, dan 8. Idenya sekarang adalah menambahkan digit di depan N_{2023} dengan 1 atau 8, tergantung pada persentase digit ganjil yang digunakan dalam representasi N_{2023}. Untuk lebih tepatnya, tulis N_{2023} dalam representasi desimalnya:

$$N_{2023} = \sum_{i=0}^{m-1} c_i 10^i \text{ where } 0 \le c_i \le 9,\ \forall 0 \le i \le m-1$$

Misalkan dari semua m digit ini, k di antaranya ganjil. Misalkan M adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $10^M > m$. Tentukan $c_m = c_{m+1} = \dots = c_p = 1$ dan $c_{p+1} = c_{p+2} = \dots = c_q = 8$ di mana $p = 999 \cdot 10^M + m - k - 1$ dan $q = 10^{M+3} - 1$.

Perhatikan bilangan tersebut

$$N = \sum_{i=0}^{q} c_i 10^i$$

dan kita perhatikan bahwa $N \equiv N_{2023} \pmod{2^{2024}}$. Lebih lanjut, terdapat $(p - m + 1) + k = 999 \cdot 10^M$ digit ganjil pada representasi desimalnya dari total $q + 1 = 10^{M+3}$ digit, sehingga N memenuhi kondisi permasalahan yang diberikan.

Catatan: Solusi resminya adalah membangun bilangan N dengan 3000 digit yang memenuhi kondisi yang diberikan.

5. **Penyelesaian :**

Misalkan $a = dx$, $b = dy$ dengan $x \geqslant y$ dan $\text{FPB}(x, y) = 1$

$$dx + 1 \mid dxy + d$$
$$dx + 1 \mid dxy + d - y(dx + 1)$$
$$dx + 1 \mid d - y$$

Perhatikan, itu

$$|dx + 1| = dx + 1 > dx \geqslant \max(d, x) \geqslant \max(d, y) > |d - y|$$

Maka, $d - y = 0 \implies b = d^2$

6. **Penyelesaian :**

Tentukan permutasi $(a_1, \dots, a_n)$ dari $(1, \dots, n)$ sebagai n-keren jika memenuhi pernyataan soal. Misalkan juga jumlah n permutasi n-keren adalah S_n.

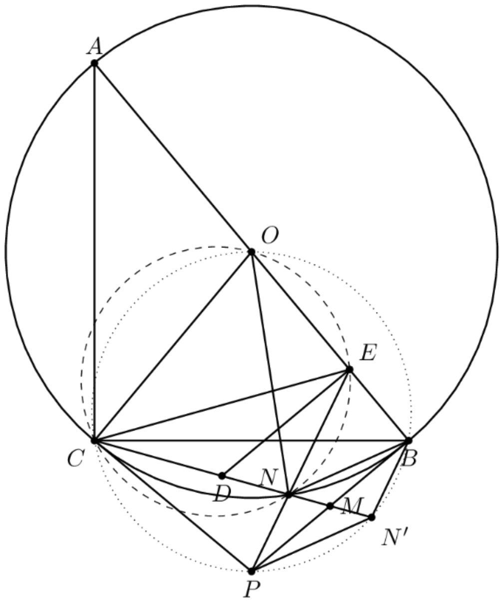
Dengan asumsi $k = n - 1$, kita harus memiliki $1 + 2 + \dots + (n - 1) = a_1 + \dots + a_{n-1}$ atau $1 + 2 + \dots + (n - 1) = a_2 + \dots + a_n$. Ini menyiratkan $n = a_n$ atau $n = a_1$. Lebih lanjut, ini menyiratkan bahwa salah satu dari $(a_1, \dots, a_{n-1})$ atau $(a_2, \dots, a_n)$ adalah $(n - 1)$-keren.

Selanjutnya, kita melihat bahwa setiap permutasi (n – 1)-keren dapat dibuat n-keren dengan menambahkan n ke depan atau akhir tupel. Oleh karena itu, kita memiliki

$$S_n = 2S_{n-1}.$$

Dengan mempertimbangkan bahwa $S_1 = 1$, kita memiliki $S_n = 2^{n-1}$ melalui induksi.

7. Penyelesaian :



Misalkan O adalah pusat (ABC), jelas bahwa O adalah titik tengah AB. Misalkan ∠CAB = α, maka ∠CBP = 90° - ∠CBA = α. Diketahui panjang PB = PC, maka ∠BCP = α dan ∠CPB = 180° – 2α. Misalkan N′ adalah refleksi titik M ke titik N. Dari PoP ke (ABC) berlaku MP · MB = MB² = MN · MC = MN′ · MC, maka BN'PC adalah siklik. Anggap BNPN' sebagai jajargenjang dan ∠COB = 2∠CAB = 2α dan

$$\angle CNE = \angle PNN' = \angle BN'N = \angle BN'C = \angle BPC = 180^\circ - 2\alpha.$$

Karena ∠BOE + ∠BNE = 180°, maka CNEO bersifat siklik. Dari sini, diperoleh

$$\angle NCB = \frac{\angle NOB}{2} = \frac{\angle NOE}{2} = \frac{\angle NCE}{2} \implies \angle NCB = \angle ECB.$$

Maka,

$$\begin{aligned}\angle CED &= 180^\circ - \angle ECD - \angle EDC \\ \\ &= 180^\circ - 2\angle MCB - \angle BMC \\ &= \angle MBC - \angle MCB \\ &= \angle PBC - \angle MCB \\ &= \angle PCB - \angle MCB \\ &= \angle PCN,\end{aligned}$$

yang dibuktikan dengan Teorema Segmen Alternatif.

8. Penyelesaian :

Saya di sini hanya untuk menambahkan bahwa Anda dapat menemukan |S(a, b, c)| = 8 apa pun pilihan min{a, b, c} yang Anda pilih, selama bukan 1.

WLOG misalkan a = min{a, b, c} > 1. Sekarang, menyelesaikan persamaan $b^2 - 4ac = (b - 2)^2$ menghasilkan 4ac = 4b – 4 ⟺ b = ac + 1. Kemudian, $c^2 - 4ab = c^2 - 4a(ac + 1) = c^2 - 4a^2c - 4a$, dan Anda menginginkannya menjadi kuadrat. Lengkapi kuadrat-kuadratnya:

$$c^2 - 4a^2c - 4a = (c - 2a^2)^2 - 4(a^4 + a).$$

Kita ingin ini menjadi kuadrat, dan saya akan memfaktorkannya menjadi $2(a^2 + a) \cdot 2(a^2 - a + 1)$. Jadi, kita pilih c sedemikian rupa sehingga

$$c - 2a^2 = (a^2 + a) + (a^2 - a + 1) = 2a^2 + 1 \iff c = 4a^2 + 1.$$

Singkatnya, sekarang saya hanya perlu menguji kasus di mana

$$(a, b, c) = (a, 4a^3 + a + 1, 4a^2 + 1).$$

Dengan sedikit bashing, kita mendapatkan bahwa

$$ax^2 + (4a^3 + a + 1)x + (4a^2 + 1) = (ax + 1)(x + 4a^2 + 1),$$
$$ax^2 + (4a^2 + 1)x + (4a^3 + a + 1) = (x + 2a + 1)(ax + 2a^2 - a + 1).$$

Itu berarti

$$S(a, 4a^3{+}a{+}1, 4a^2{+}1) = \left\{-\frac{1}{a}, -(4a^2+1), -a, -\frac{1}{4a^2+1}, -(2a+1), -\left(2a - 1 + \frac{1}{a}\right), -\frac{1}{2a+1}, -\frac{a}{2a^2 - a + 1}\right\}.$$

Sekarang Anda cukup periksa bahwa untuk a > 1, kita memiliki $4a^2 + 1 > 2a + 1 > 2a - 1 + 1/a > a > 1$, yang memastikan bahwa himpunan di atas memiliki ukuran 8.