PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMA

TAHUN 2022

1. **Penyelesaian :**

   Misalkan P(x, y) menyatakan pernyataan persamaan fungsional ini. P(x, x) menunjukkan keberadaan r nyata yang mana f(r) = 0. P(r, r) memberikan kita

   $$f(f(f(r)) + f(r)) = 0$$

   atau f(f(0)) = 0. Sekarang, P(0, y) menghasilkan f(f(y)) = f(y) – f(0). Akhirnya, kita dapat menulis ulang persamaan fungsional tersebut menjadi:

   $$f(f(x) + f(y) - f(0)) = f(y) - f(x)$$

   Sebut saja Q(x, y). Membandingkan Q(x, y) dan Q(y, x) menghasilkan f(x) – f(y) = f(y) – f(x) atau (f) konstan. Pemeriksaan menunjukkan bahwa hanya f ≡ 0 yang berfungsi, sehingga kita menyimpulkan bahwa itu adalah satu-satunya solusi yang mungkin.

2. **Penyelesaian :**

   (a) Kita dapat mengambil P(x) = x(16x – 6) yang memiliki akar di 0 (ini tentu saja dimotivasi oleh bagian (b)).

   (b) Dengan menggunakan x – y | P(x) – P(y), kita akan mendapatkan x | 4 dan x – 1 | 10 dan x + 1 | 22. Karena x ≠ ±1, kita mendapatkan bahwa x pasti genap dan karenanya x – 1 | 5 dan x + 1 | 11.

   Namun, mudah untuk melihat bahwa hal ini tidak mungkin kecuali x = 0 yang tentu saja tidak bekerja berdasarkan asumsi.

3. **Penyelesaian :**

   Dengan menggunakan titik phantom, misalkan AC berpotongan dengan HI dan GJ masing-masing di K dan L. Kita akan membuktikan bahwa K = L

   Dengan POP, kita mendapatkan

   $$CJ \times CD = CF \times CE = CH \times CB$$
   $$AI \times AD = AE \times AF = AG \times AB$$

   Perhatikan bahwa $\triangle AKI \sim \triangle CKH$; $\triangle ALG \sim \triangle CLJ$

   Maka,

   $$\frac{AK}{CK} = \frac{AI}{CH} \;;\; \frac{AL}{CL} = \frac{AG}{CJ}$$

   Dari sana kita dapat menyimpulkan bahwa

$$\frac{AK}{CK} = \frac{AL}{CL}$$

Karena K dan L keduanya berada pada AC, maka K = L.

4. **Penyelesaian :**

Kita akan membahas masalah utama ini mengandalkan simetri untuk mengurangi bash semaksimal mungkin. Namun, pertama-tama, mari kita terjemahkan ini ke dalam formulasi ekuivalen berikut:

Buktikan bahwa untuk setiap 9 angka di $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$, ada tiga angka yang membentuk barisan aritmatika.

Di antara 9 angka ini; berdasarkan Prinsip PigeonHole, 5 di antaranya akan memiliki residu yang sama modulo 2. Oleh karena itu, cukup dibuktikan bahwa untuk setiap 5 angka dalam $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, terdapat tiga angka yang membentuk barisan aritmetika. Dengan menggabungkan hal ini dengan fakta bahwa ketiganya memiliki residu yang sama modulo 2, kita selesai.

Misalkan sebaliknya, terdapat himpunan S berisi 5 bilangan dalam $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ sehingga tiga bilangan apa pun tidak membentuk barisan aritmetika. Dengan menggeser $x \mapsto ax + b$ jika perlu, kita dapat melakukan WLOG bahwa {6, 7} terletak pada himpunan lima bilangan kita, S.

- Karena 6, 0, 7 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa $0 \notin S$.
- Karena 5, 6, 7 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa $5 \notin S$.
- Karena 6, 7, 8 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa $8 \notin S$.

Kasus 1. $4 \notin S$.

Kami kemudian memiliki:

- Karena 2, 4, 6 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa $6 \notin S$.
- Karena 4, 7, 10 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa $10 \notin S$.
- Karena 1, 4, 7 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa $1 \notin S$.
- Karena 7, 12, 4 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa $12 \notin S$.

yang menyisakan 3, 9 dan 11 sebagai pilihan yang mungkin dari dua elemen tersisa di S. Namun,

- Jika $9, 11 \in S$, maka 7, 9, 11 merupakan deret aritmatika.
- Jika $9, 3 \in S$, maka 3, 6, 9 merupakan deret aritmatika.
- Jika $3, 11 \in S$, maka 3, 7, 11 merupakan deret aritmatika.

Kasus 2. $\notin S$.

Berdasarkan simetri, $9 \notin S$ juga. Maka, satu-satunya elemen yang mungkin untuk S adalah dari 1, 2, 3, 10, 11, 12.

Jika $3 \in S$, karena 3, 7, 11 dan 7, 3, 12 merupakan deret aritmatika, maka $11, 12 \notin S$. Dengan demikian, elemen yang tersisa berasal dari 1, 2 dan 10.

- Jika $1, 2 \in S$, maka 1, 2, 3 merupakan barisan aritmatika.
- Jika $1, 10 \in S$, maka 1, 10, 6 merupakan barisan aritmatika.

- Jika $2, 10 \in S$, maka 2, 6, 10 merupakan barisan aritmatika.

Jadi, $3 \notin S$ dan berdasarkan simetri $10 \notin S$.
Sekarang, hanya tiga elemen yang mungkin untuk S yang berasal dari 1, 2, 11, 12. Pasangkan mereka sebagai $\{1, 11\}$ dan $\{2, 12\}$. Berdasarkan Prinsip Pigeon Hole, salah satu dari dua pasangan ini akan terpilih. Namun, kedua kemungkinan ini gagal karena 1, 6, 11 dan 2, 7, 12 merupakan deret aritmatika.

5. **Penyelesaian :**

Kita akan membuktikan hal ini untuk sembarang angka N, alih-alih N + 1 angka (dan batasan ini dapat ditingkatkan lebih lanjut).
Misalkan sebaliknya, bahwa FPB(a_i, N) = 1 untuk semua indeks i.
Perhatikan N angka berikut.

$$a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \ldots, a_1a_2a_3 \cdots a_N$$

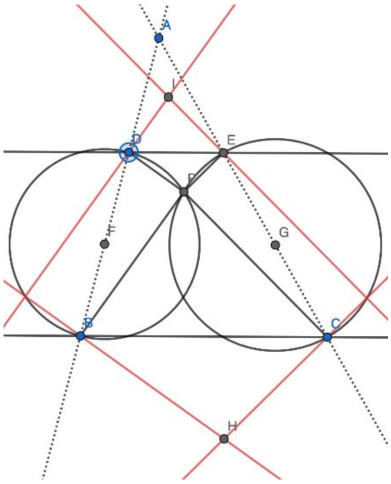
Dengan asumsi, tidak ada nilai di atas yang sama dengan 1 modulo N -- dan dengan demikian semuanya hanya mencakup paling banyak N – 1 residu modulo N. Berdasarkan Prinsip PigeonHole, terdapat i < j sehingga

$$a_1 \cdots a_i \equiv a_1 \cdots a_j \pmod N$$

Karena FPB(a_1 a_2 … a_i, N) = 1, kita simpulkan bahwa a_{i+1} … $a_j \equiv 1$ (mod N), yang merupakan kontradiksi, seperti yang diinginkan.

6. **Penyelesaian :**

Semoga diagram di bawah ini menjelaskan semuanya. Di sini, garis merah tegak lurus terhadap DP di D, EP di E, BP di P, dan CP di C, masing-masing.
Cukuplah untuk membuktikan bahwa terdapat homotetis yang berpusat di A yang mengirimkan segiempat IDPE ke PBHC. Memang, jika ini berlaku, maka A, I, P, dan H kolinear; tetapi pusat lingkaran EPD dan BPC masing-masing merupakan titik tengah IP dan PH. Jadi, ini menyiratkan pernyataan yang diinginkan.
Tentu saja, perhatikan homotetis ϕ yang berpusat di A yang mengirimkan D ke B. Karena DE sejajar dengan BC, maka ϕ(E) = C. Selanjutnya, amati bahwa ID dan BP keduanya tegak lurus terhadap DP, sehingga keduanya pasti sejajar. Demikian pula, IE sejajar dengan PC. Dengan demikian, segitiga IDE dan PBC sebangun, dengan orientasi yang sama; hal ini memaksa ϕ(I) = P. Terakhir, terapkan argumen yang sama untuk mendapatkan bahwa segitiga PDE dan HBC sebangun dengan orientasi yang sama (dan dengan demikian ϕ(P) = H). Selesai.



7. **Penyelesaian :**

Didefinisikan $A_x = 1010 \ldots$ $A_y = 0101 \ldots$

Klaim. A_x dan A_y tidak terkait dengan A_i lainnya.

Bukti. Perhatikan bahwa setiap blok A_x dan A_y yang memiliki jumlah nol dan satu yang tidak sama akan selalu menjadi palindrom. Jadi, jika kita membalik blok tersebut, kita akan selalu mendapatkan keluaran A_x atau A_y yang sama, sehingga A_x dan A_y tidak terkait dengan A_i lainnya.

Klaim. Misalkan $S_{i,j}$ adalah himpunan semua A dengan i bilangan nol dan j bilangan satu. $\forall A_k, A_l \in S_{i,j}$, A_k, dan A_l saling terkait.

Bukti. (perlu bukti yang lebih kuat) Perhatikan bahwa hal ini berlaku untuk $S_{0,1}$, $S_{1,0}$.

Demi induksi, dikatakan bahwa hal ini berlaku untuk $S_{i,\, j-1}$ dan $S_{i-1,j}$. Perhatikan bahwa setiap elemen $S_{i,j}$ dapat dibentuk dengan menambahkan 1 ke depan atau belakang setiap anggota $S_{i,j-1}$ atau dengan menambahkan 0 ke depan atau belakang setiap anggota $S_{i-1,j}$. Jadi untuk membuktikan bahwa setiap anggota $S_{i,j}$ berhubungan satu sama lain, kita perlu membuktikan bahwa ada anggota $S_{i,\, j-1}$ dan $S_{i-1,j}$ yang berhubungan atau sama setelah penjumlahan.

Misalkan $A_n = 00 \cdot 0011 \cdot 11$ dan $A_m = 00 \cdot 0011 \cdot 11$ sehingga $A_n \in S_{i,j-1}$; $A_m \in S_{i-1,j}$. Jelas, setelah penjumlahan (sebut saja A'_n dan A'_m), $A'_n = A'_m$ sehingga keduanya saling terkait.

Jadi, dengan induksi, untuk semua i, j, setiap anggota $S_{i,j}$ saling terkait.

Penyelesaian. Misalkan $A_{i,j}$ adalah salah satu anggota $S_{i,j}$. Untuk k > 2 kita memiliki

$$A_{0,k}, A_{1,k-1}, \cdots, A_{k,0}, A_x, A_y$$

tidak saling terkait.

Jadi, bilangan asli terbesar n yang memiliki n deret berbeda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ yang setiap deretnya terdiri dari 2022 digit, dan untuk setiap indeks $i \neq j$, deret A_i tidak terkait dengan A_j adalah 2025.

8. Penyelesaian :

Kami menyatakan bahwa $K = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ berfungsi. Perhatikan bahwa untuk (a,b,c) = (1,1,0), kita memiliki

$$K + \frac{2}{3} \geq (K+1)\sqrt{\frac{2}{3}} \implies K \geq \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

Cukup untuk membuktikan bahwa pilihan K ini berhasil.

Klaim. Untuk setiap $0 \leq a,b,c \leq 1$, kita memiliki

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{a+b+c+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Kesetaraan berlaku jika dan hanya jika (a,b,c) ∈ {(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)}.

Bukti. Perbaiki a + b + c = k. WLOG a ≥ b ≥ c. Perhatikan fungsi objektif $f(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2$. Perhatikan bahwa

$$f(a+\varepsilon, b-\varepsilon, c) = (a+\varepsilon)^2+(b-\varepsilon)^2+c^2 \geq a^2+b^2+c^2 = f(a,b,c)$$

dan

$$f(a, b+\varepsilon, c-\varepsilon) = a^2+(b+\varepsilon)^2+(c-\varepsilon)^2 \geq a^2+b^2+c^2 = f(a,b,c)$$

Sekarang, pertimbangkan tiga kasus:

- Jika $0 \leq k \leq 1$, maka dengan argumen di atas, maksimum fungsi objektif tercapai ketika f(k,0,0), dan kita dapat dengan mudah memeriksa bahwa

$$f(k,0,0) = k \leq \frac{k+\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}} < \frac{k+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

  untuk semua k ∈ [0,1].
- Jika $1 \leq k \leq 2$, maka dengan argumen di atas, nilai maksimum fungsi objektif tercapai ketika f(1, k – 1, 0). Dengan demikian, cukup dibuktikan bahwa

$$f(1,k-1,0) = \sqrt{1+(k-1)^2} \leq \frac{k+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

  Namun hal ini memang benar karena

$$\sqrt{1+(k-1)^2} \overset{k-1\geq 1}{\leq} (k-1)\sqrt{2} \leq \frac{k+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

  dan kesetaraan berlaku jika dan hanya jika k = 2.
- Jika $2 \leq k \leq 3$, maka dengan argumen di atas, nilai maksimum fungsi objektif tercapai ketika f(1, 1, k – 2). Oleh karena itu, cukup dibuktikan bahwa

$$\sqrt{2+(k-2)^2} \leq \frac{k+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

  yang ekuivalen dengan $-2(2+\sqrt{6})(k-2)(k-3) \leq 0$, yang jelas benar. Kesetaraan berlaku ketika k = 2, 3.

Dari klaim kami, kami memiliki

$$\left(\frac{1}{3}\sqrt{6}+1\right)\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$\overset{\text{Claim}}{\leq} \frac{a+b+c+\sqrt{6}}{3} = \frac{a+b+c}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

dan dengan demikian $K = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ berfungsi sebagaimana mestinya.