PEMBAHASAN

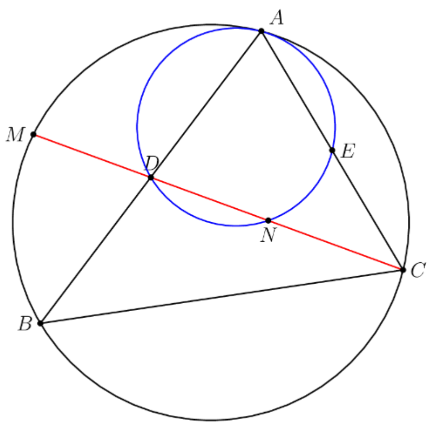
OSN MATEMATIKA SMA

TAHUN 2021

1. **Penyelesaian :**

Dengan menjumlahkan semua, kita mendapatkan bahwa jumlahnya adalah 45, jadi jika di antara keduanya diberikan tanda -, maka jumlahnya adalah
45 – 2(Jumlah bilangan di belakang tanda " - "). Kemudian kita perlu membuktikan bahwa dengan bilangan 2 hingga 9, kita dapat membuat bilangan antara 2 hingga 22 dengan menjumlahkan bilangan bulat berbeda dalam interval 2 hingga 9. (Bashh) Dan kita mendapatkan bahwa bilangan bulat ganjil terkecil adalah 43.

2. **Penyelesaian :**



Misalkan AD = DB = x, AE = EC = y, DN = DM = z, dan CN = m. Dengan PoP, kita peroleh

$$\begin{aligned} CD \cdot DM = BD \cdot DA \implies z^2 + mz &= x^2 \\ CN \cdot CD = CE \cdot CA \implies m^2 + mz &= 2y^2. \end{aligned}$$

Kita memiliki $(m + z)^2 = x^2 + 2y^2$. Berdasarkan LoC dari △ACD:

$$\cos A = \frac{x^2 + 4y^2 - (m+z)^2}{4xy} = \frac{2y^2}{4xy} = \frac{y}{2x}.$$

Berdasarkan LoC dari △ABC:

$$BC^2 = 4x^2 + 4y^2 - 8xy\cos A = 4x^2 + 4y^2 - 4y^2 = 4x^2 = AB^2,$$

jadi kita punya BC = AB.

3. Penyelesaian :

Jawabannya adalah 7, dicapai dengan urutan 5, 2, 7, 9, 16, 25, 41.

Misalkan terdapat suatu barisan dengan panjang 8 yang memenuhi syarat tersebut.
Pangkat prima ganjil tidak dapat berupa tiga suku berurutan karena paritas, sehingga harus ada setidaknya dua suku yang merupakan pangkat 2.
Misalkan $2^a < 2^b$ adalah dua suku dari barisan tersebut.

Jika 2^a dan 2^b adalah suku-suku berurutan, semua sukunya genap, sehingga semua sukunya berbentuk 2^k. Maka, kita tidak dapat membuat barisan tersebut memiliki lebih dari tiga suku, kontradiksi.

Jika tidak, seharusnya ada tepat dua suku antara 2^a dan 2^b (karena masalah paritas).
Misalkan 2a, p^s, q^t, 2^b menjadi empat suku berurutan dari barisan di mana p, q adalah bilangan prima ganjil.
Jika $a \geq 2$, kita memiliki $4 \mid 2^a = q^t - p^s$ dan $4 \mid 2^b = q^t + p^s$, sehingga $4 \mid 2q^t$ merupakan kontradiksi.
Jadi a = 1.
Sekarang kita bagi menjadi tiga kasus. Perhatikan bahwa persamaan $|2^x - 3^y| = 1$ hanya memiliki solusi (x, y) = (1, 1), (2, 1), (3, 2) atas bilangan bulat positif.

Kasus 1. $p^s \equiv 0 \pmod 3$
Dalam kasus ini p = 3, dan kita memiliki $2^b = q^t + p^s = 2p^s + 2 \Leftrightarrow 2^{b-1} = 3^s + 1$.
Jadi s = 1 dan b = 3, maka deret tersebut tidak boleh memiliki lebih dari 5 suku.
(Coba hitung, kita memiliki ...1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... dan 1, 21 bukan pangkat prima.)

Kasus 2. $p^s \equiv 1 \pmod 3$
$q^t = p^s + 2 \equiv 0 \pmod 3$ jadi q = 3, dan kita punya $2^b = q^t + p^s = 2q^t - 2 \Leftrightarrow 2^{b-1} = 3^t - 1$.

Jadi (t, b) = (1, 2) atau (t, b) = (2, 4).

Jika (t, b) = (1, 2), $p^s = q^t - 1 = 3_1 - 1 = 2$, kontradiksi.

Jika (t, b) = (2, 4), kita punya barisan yang menjadi ...-3, 5, 2, 7, 9, 16, 25, 41, 66... dan -3, 66 bukan pangkat prima, jadi barisan tersebut tidak boleh memiliki lebih dari 8 suku.

Kasus 3. $p^s \equiv 2 \pmod 3$

$2^b = q^t + p^s = 2p^s + 2 \equiv 0 \pmod 3$, kontradiksi.

Kita sudah membahas semua kasus, jadi kita sudah selesai.

4. **Penyelesaian :**

$$\begin{aligned}
2\sum_{cyc}\sqrt{x+\sqrt{y}} &\le 2\sum_{cyc}\sqrt{x+\frac{y+1}{2}} \\
&= \sum_{cyc}\sqrt{x+\frac{y+1}{2}}+\sqrt{y+\frac{z+1}{2}} \\
&\le \sum_{cyc}\sqrt{2\left(x+\frac{y+1}{2}+y+\frac{z+1}{2}\right)} \\
&= \sum_{cyc}\sqrt{2(x+y)+(y+z+2)} \\
&= \sum_{cyc}\sqrt{2(3-z)+(y+z+2)} = \sum_{cyc}\sqrt{8+y-z}
\end{aligned}$$

5. **Penyelesaian :**

Tulis P(x) = (x + a)(x + b) dengan a,b > 1 dan |a – b| < 2. Kita diminta untuk membuktikan bahwa P(P(x)) = ((x + a)(x + b) + a)((x + a)(x + b) + b) positif untuk semua x riil. Cukup dengan membuktikan bahwa (x + a)(x + b) + min(a,b) > 0 untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. WLOG a > b.

$$\begin{aligned}
(x+a)(x+b)+b &= \left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(a-b)^2}{4}+b \\
&\ge b-\frac{(a-b)^2}{4} \\
&> b-1 \\
&> 0
\end{aligned}$$

6. **Penyelesaian :**

Jika n = 1, maka selesai, jadi asumsikan n ≥ 2. Ambil dua kasus apa pun, misalnya a, b. Kita bagi menjadi beberapa kasus:

- Jika a ⊥ b, maka pertama-tama lakukan operasi pada (a, b) dan dapatkan 1 dan beberapa bilangan lainnya. Kemudian, buat semuanya menjadi 1 karena FPB(x, 1) = 1 dan KPK(x, 1) – FPB(x, 1) = x – 1 mengurangi x sebesar 1.
- Perhatikan kasus di mana tidak ada angka dengan FPB(a, b) = 1 pada awalnya. Kemudian, jika terdapat c sehingga FPB(a, c) ⊥ FPB(b, c) ada, maka kita dapat menerapkan langkah pada (a, c) dan kemudian (FPB(a, c), b), yang menghasilkan 1 di papan, kita kembali ke Kasus 1. Oleh karena itu, kita sekarang berasumsi bahwa tidak ada c seperti itu, yaitu FPB($\{a_i\}_n$) ≠ 1. Ambil a, b seperti itu dengan FPB(a, b) = FPB($\{a_i\}_n$), lakukan operasi pada (a, b), kita peroleh d = FPB(a, b). Sekarang ambilah x apa saja dan catat bahwa FPB(d, x) = d dan KPK(x, d) – FPB(x, d) = x – d mengurangi x sebesar d, ulangi hingga x menggantikan dengan d.

7. **Penyelesaian :**

Karena AM adalah garis bagi sudut ∠BAC dan P adalah titik tengah busur BC, jelaslah bahwa P terletak di perpotongan kedua AM dan ℓ.

Kasus 1, Jika kita tahu bahwa ∠B = 90º

Dengan mengejar sudut,

$$\angle DEM = \frac{180^\circ - \angle DME}{2} = 90^\circ - \frac{\angle DME}{2} = 90^\circ - \angle DBE$$

$$= 90^\circ - (180^\circ - \angle DPC) = 90^\circ - (180^\circ - (\angle DPM + 90^\circ))$$

$$= 90^\circ - (90^\circ - \angle DPM) = \angle DPM$$

Oleh karena itu, DPEM adalah segiempat siklik. Karena DM = ME dan DPEM adalah segiempat siklik, jelaslah bahwa ∠DPM = ∠MPE ⟹ AP adalah garis bagi sudut ∠DPE.

Kasus 2, jika kita tahu bahwa AP adalah garis bagi sudut ∠DPE

Artinya, DPEM adalah segiempat siklik. Dengan mengejar sudut,

$$\angle ABC = \angle APC = 180^\circ - (\angle DBE + \angle DPM) = 180^\circ - (\frac{\angle DME}{2} + \angle DEM)$$

$$= 180^\circ - (\frac{180^\circ - \angle MDE - \angle DEM}{2} + \angle DEM) = 180^\circ - (\frac{180^\circ - 2\angle DEM}{2} + \angle DEM)$$

$$= 180^\circ - (90^\circ - \angle DEM + \angle DEM) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

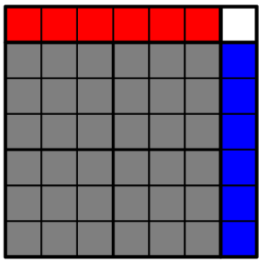
seperti yang diinginkan.

Oleh karena itu, kita telah membuktikan bahwa AP adalah garis bagi sudut ∠DPE jika dan hanya jika ∠B = 90^o.

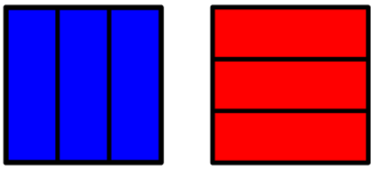
8. Penyelesaian :

Kami menyatakan bahwa jawabannya adalah (k, 3333 – k) di mana 33 ≤ k ≤ 3300 dan k ≡ 0 (mod 3).

Mudah untuk menemukan konfigurasi seperti itu, dengan menggeneralisasi papan berikut.



di mana setiap 3 x 3 ubin abu-abu dapat diganti dengan 3 papan horizontal atau 3 papan vertikal sebagai berikut:



Mari kita fokus untuk membuktikan bahwa tidak ada pasangan (H, V) lainnya yang mungkin. Perlu diketahui bahwa jumlah papan yang dibutuhkan untuk memasang seluruh papan adalah H + V = $\frac{100^2-1}{3}$ = 3333. Oleh karena itu, cukup dengan mencatat jumlah papan vertikal yang digunakan. Misalkan terdapat k papan vertikal yang digunakan.

Klaim 1. $33 \leq k \leq 3300$.

Bukti. Kita akan membuktikan bahwa k ≥ 33, dan dengan menggunakan simetri, 3333 – k ≥ 33 juga, karena ini menghitung jumlah papan horizontal. Untuk membuktikannya, tetapkan baris i, dan misalkan jumlah papan horizontal adalah h_i dan jumlah papan vertikal adalah v_i. Perhatikan bahwa

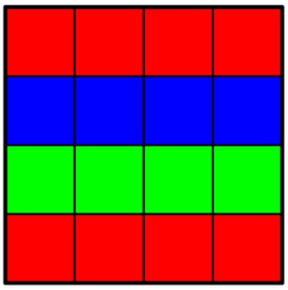
$$3h_i + v_i \in \{99, 100\}$$

untuk semua $1 \leq i \leq 100$, yang mana hanya bisa menjadi 99 untuk tepat satu indeks i. Ini menyiratkan bahwa $v_i \geq 1 \pmod 3$ untuk tepat 99 indeks i. Ini menghasilkan $v_i \geq 1$ untuk setidaknya 99 indeks i, yang memaksa $\sum_i v_i \geq 99$. Namun, setiap papan vertikal berkontribusi terhadap v_i tepat tiga kali, yang berarti bahwa

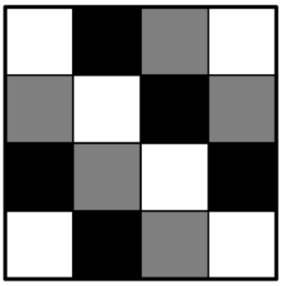
$$3k = \sum_i v_i \geq 99 \implies k \geq 33$$

Klaim 2. $k \equiv 0 \pmod 3$.

Bukti. Mari kita warnai papan dengan tiga warna: merah, biru, dan hijau sehingga setiap baris memiliki warna yang sama, dan warnanya bergantian seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini, di mana kita selalu memulai dengan merah sebagai warna baris pertama:



Pertama-tama, kita asumsikan bahwa ubin yang hilang pasti berada di baris berwarna merah. Untuk membuktikannya, warnai papan dengan cara berikut:



di mana ubin paling kiri atas berwarna putih. Mudah untuk melihat bahwa setiap papan horizontal, dan setiap papan vertikal, harus menutupi tepat 1 ubin dari setiap warna. Karena terdapat 1 ubin putih lebih banyak daripada ubin hitam dan abu-abu, maka ubin yang dihilangkan harus berwarna putih. Dengan mengulangi argumen yang sama, tetapi mencerminkan pewarnaannya, kita mengamati bahwa ubin yang dihilangkan harus berwarna putih dalam kedua kasus pewarnaan. Semua ubin yang tersisa ini terletak di baris merah pada pewarnaan awal.

Perhatikan bahwa totalnya adalah 34 x 100 = 3400 ubin merah. Sekarang mari kita hitung jumlah ubin merah yang ditempati oleh papan vertikal dan horizontal. Karena kotak yang hilang adalah salah satu ubin merah, maka terdapat 3399 ubin yang terisi. Namun, setiap papan vertikal menyumbang tepat satu ubin merah, dan setiap papan horizontal menyumbang 0 atau 3 ubin merah. Oleh karena itu, kita simpulkan bahwa

$$k \equiv 0 \pmod 3$$

Itulah yang kami inginkan.

Catatan: Ini adalah soal yang bagus yang menunjukkan betapa kuatnya argumen pewarnaan dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan kisi-kisi.