PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMA

TAHUN 2020

1. **Penyelesaian :**

Misalkan garis tegak lurus dari D terhadap AD berpotongan dengan AB dan AC masing-masing di K dan J. Karena ∡ADK = ∡ADJ = 90^o, kita harus memiliki AK dan AJ sebagai diameter masing-masing dari (ADK) dan ADJ. Perhatikan bahwa

$$\measuredangle KQJ = \measuredangle AQK = \measuredangle ADK = \measuredangle ADJ = \measuredangle APJ = \measuredangle KPJ = 90^\circ$$

Ini memberikan PKJQ adalah segi empat siklik, jadi

$$\measuredangle ADP = \measuredangle AJP = \measuredangle QJP = \measuredangle QKP = \measuredangle QKA = \measuredangle QDA$$

Sesuai kebutuhan.

Perhatikan saja bahwa DPQ adalah segitiga ortik dari AKJ, sehingga titik pusatnya adalah titik ortik dari AKJ, yang terletak pada AD.

2. **Penyelesaian :**

Berikut solusi yang dimaksud (Sepertinya sebagian besar peserta hanya mengkritik masalah ini secara blak-blakan):

Asumsikan semua a, b, c berbeda. Kita akan membuktikan bahwa a + b + c = 0.

Misalkan Q(x) = xP(x) – abc = ax^3 + bx^2 + cx – abc, maka a, b, c adalah akar-akar dari Q(x). Oleh karena itu, kita peroleh bahwa

$$k(x-a)(x-b)(x-c) = Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx - abc$$

Mudah untuk mendapatkan k = 1 dengan menguji x = 0. Jadi, kita punya

$$(x-a)(x-b)(x-c) = ax^3 + bx^2 + cx - abc$$

Oleh karena itu, dengan membandingkan koefisien, dapat disimpulkan bahwa a = 1, 2b + c + 1 = 0, dan b(c + 1) = 0. Kita juga menyimpulkan bahwa b = 0 dan c = -1, yang memaksa a + b + c = 0.

3. Penyelesaian :

P(1, 1) menghasilkan f(1) = 1

Dengan menggunakan pengantar, kita sudah selesai.

Misalkan bahwa f(n – 1) = n – 1 maka f(n) = n

P(n, n – 1) memberikan: f(n) + n – 1|n^2 + f(n)(n – 1) - (n – 1)[f(n) + n – 1] = n^2 - $(n – 1)^2$ = 2n – 1. Jadi f(n) = n.

4. Penyelesaian :

Karena terdapat 2n · 2n = $4n^2$ ubin yang diwarnai dengan n warna, terdapat warna k yang digunakan pada setidaknya 4n ubin. Perhatikan semua 4n ubin dengan warna ini.

Untuk setiap indeks 1 ≤ i ≤ 2n, misalkan f(i) adalah jumlah ubin berwarna k pada baris i. Dengan demikian, kita memiliki $\sum_{i=1}^{2n} f(i)$ = 4n dan f(i) ≤ 2n untuk setiap 1 ≤ i ≤ 2n. Secara khusus:

1. Setidaknya ada dua indeks i sehingga f(i) ≥ 2.

   Memang, sebaliknya $4n = \sum_{i=1}^{2n} f(i) \leq (2n) + 1 \cdot (2n-1) = 4n-1$ adalah kontradiksi.
2. Perhatikan himpunan S dari semua indeks i sehingga f(i) ≥ 2. Maka, $\sum_{i \in S} f(i) > 2n$. Ini memiliki bukti yang sama seperti di atas.
   Menurut definisi S, $\sum_{i \notin S} f(i) \leq \sum_{i \notin S} 1 = 2n - |S| \leq 2n - 2 < 2n$
   disebabkan oleh pengamatan sebelumnya, jadi
   $$\sum_{i \in S} f(i) = 4n - \sum_{i \notin S} f(i) > 2n.$$

Sekarang, perhatikan himpunan T dari semua ubin dengan koordinat (i, j) berwarna k dengan i ∈ S. Ini berkorespondensi dengan semua ubin berwarna k yang juga memiliki ubin lain dalam baris yang sama dengan warna k. Jumlah pasangan (atau ubin) tersebut adalah $\sum_{i \in S} f(i) > 2n$, sehingga berdasarkan prinsip pigeonhole, terdapat dua ubin berbeda di T pada kolom yang sama, misalnya (i_1, j) dan (i_2, j). Perhatikan dua ubin (i_1, j'), (i_2, j'') ∈ T dengan j', j'' ≠ j; keduanya ada berdasarkan konstruksi dan argumen kita sebelumnya. Jika

$j' = j''$, kita dapat menukar dua ubin acak selain empat ubin yang telah disebutkan. Jika $j' \neq j''$, kita tukar (i_2, j') dan (i_2, j'') dan selesai.

5. **Penyelesaian :**

Kita tinjau himpunan $S = \{2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}7^{a_4} \mid a_1, a_2, \ldots a_4 \geq 0\}$. Jelas, $A \subseteq S$. Kita dapat mendefinisikan setiap elemen S dari kuadruplet titik (a_1, a_2, a_3, a_4). Jika kita memiliki setidaknya 17 titik, terdapat dua titik di A dengan representasi yang sama modulo 2 (karena hanya ada 16 kemungkinan representasi), yang menyiratkan bahwa jika keduanya adalah $(a_1, a_2, a_3, a_4) \equiv (b_1, b_2, b_3, b_4) \pmod 2$, maka

$$2^{a_1+b_1}3^{a_2+b_2}5^{a_3+b_3}7^{a_4+b_4}$$

adalah kuadrat sempurna berdasarkan konstruksinya.

Untuk membangun A dengan 16 elemen, kita cukup mempertimbangkan himpunan kuadruplet dengan $1 \leq a_k \leq 2$ untuk $1 \leq k \leq 4$.

6. **Penyelesaian :**

Misalkan $\measuredangle XYZ$ menyatakan sudut arah $\angle XYZ$. (Ditulis dalam urutan berlawanan arah jarum jam.)

Misalkan M adalah titik tengah busur CD. Jadi, AM dan BM adalah garis bagi sudut-sudut yang menghadap busur CD yang sama. Misalkan $AX \cap BM = K$, $BY \cap AM = J$, dan $AX \cap BY = L$. Jelas, JMKL adalah siklik, karena terdapat dua sudut siku-siku pada sisi yang berlawanan. Hal ini menghasilkan $\measuredangle KLB = \measuredangle JLA = \measuredangle JMK$. Karena $\measuredangle LJA = \measuredangle BKL$, dari dua sudut yang sama pada segitiga ALJ dan KLB, $\measuredangle LAJ = \measuredangle KBL$, maka dengan menambahkan $\measuredangle JAY = \measuredangle XBK$ pada kedua sisi secara berurutan, kita peroleh $\measuredangle XBY = \measuredangle XAY$ sehingga ABXY bersifat siklik. Oleh karena itu, $\measuredangle YAB = \measuredangle BXY = \measuredangle BCD$, maka karena B, X, C didefinisikan sebagai kolinear, $XY \parallel CD$, sesuai keinginan.

7. **Penyelesaian :**

Jelas, konstanta P berfungsi jika merupakan bilangan bulat. Jika $P(x) = ax + b$ linear, kita peroleh bahwa $b = P(0) = \lfloor P(0) \rfloor$, sehingga b merupakan bilangan bulat. Sekarang, a juga harus berupa bilangan bulat dengan mempertimbangkan P(1). Jika a > 1, kita peroleh bahwa P(0.5) = 0.5a + b ≥ b + 1, sebuah kontradiksi. Demikian pula, jika a < 0, kita peroleh

$$P(0.5) = 0.5a + b < b$$

kontradiksi lebih lanjut. Jadi a = 1, dan kita peroleh P(x) = x + b.

Sekarang, asumsikan P berderajat paling sedikit 2 dan perhatikan deret beda hingga △P. Kita perhatikan bahwa △P berderajat paling sedikit 1, sehingga deret tersebut tak terbatas. Jika deret tersebut positif tak terbatas, kita dapat menemukan beberapa n sehingga △P(n) > 10^{420}, dan dengan demikian, berdasarkan Teorema Nilai Antara, karena P(x) kontinu, terdapat δ ∈ (n, n + 1) dengan P(δ) = P(n) + 10^{69}, dan dengan demikian kita memiliki kontradiksi kita, karena jelas $\lfloor\delta\rfloor = n$ tetapi $\lfloor P(\delta)\rfloor \neq P(n)$. Demikian pula, jika tak terbatas di bawah, kita dapat melakukan hal yang sama - pertimbangkan beberapa n sedemikian rupa sehingga △P(n) < -10^{420}. Kemudian, kita peroleh bahwa terdapat beberapa δ ∈ (n, n + 1) dengan P(δ) = P(n) – 10^{69}, yang sekali lagi kontradiktif (karena lantainya tidak sama). Jadi, kasus ini mustahil.

Jadi semua solusinya adalah P(x) = c, x + c untuk c ∈ ℤ.

8. Penyelesaian :

Kesulitan utama dari soal ini adalah menyadari bahwa ketika n = 4, terdapat 6 suku di sebelah kanan yang terlalu sulit untuk dipecahkan. Jadi, carilah pasangannya.

Jawabannya adalah n = 4, yang dicapai dengan pasangan (2, 6, 6, 6).

Kita hanya perlu membuktikan bahwa n = 3 tidak dapat dicapai.

Sekarang, kita punya

$$\gcd(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{\gcd(a_1, a_2)} + \frac{1}{\gcd(a_1, a_3)} + \frac{1}{\gcd(a_2, a_3)}$$

Perhatikan bahwa jika k | gcd(a_1, a_2, a_3), maka k | gcd(a_i, a_j), ∀1 ≤ i < j ≤ 3$. Jadi,

$$k \leq \gcd(a_1, a_2, a_3) \leq \frac{3}{k}$$

memaksa k ≤ 1. Oleh karena itu, gcd(a_1, a_2, a_3) = 1.

Sekarang, bash saja $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

WLOG $x \leq y \leq z$, dan misalkan $x = \gcd(a_1, a_2)$, $y = \gcd(a_1, a_3)$, $z = \gcd(a_2, a_3)$ untuk penyederhanaan.

$$\frac{3}{z} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

Jadi, $z \leq 3$, dan untuk alasan yang jelas $z > 1$.

Jika $z = 3$, maka kita harus memiliki persamaan, yang memaksa $x = y = z = 3$, tetapi $\gcd(x,y,z) \mid \gcd(a,b,c)$, yang merupakan kontradiksi.

Jika $z = 2$, maka kita harus memiliki $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. Pemecahan kasus sederhana seperti ini akan menghasilkan $(y,z) = (4, 4)$ atau $(3, 6)$.

Yang pertama tidak mungkin karena $4 \mid \gcd(a_1, a_3), \gcd(a_2, a_3)$ menunjukkan bahwa $4 \mid a_1, a_2$ memaksa $4 \mid \gcd(a_1, a_2)$.

Yang kedua juga tidak mungkin karena $2 \mid \gcd(a_1, a_2), \gcd(a_2, a_3)$ menunjukkan bahwa $2 \mid a_1, a_3$, tetapi $\gcd(a_1, a_3) = 3$.