PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMA

TAHUN 2019

1. **Penyelesaian :**

Misalkan n prima. Misalkan n = p (ini hanya membantu saya mengingat bahwa itu prima)

Maka sisi kirinya sama dengan

$$\frac{(p)(p-1)}{2}$$

Sementara RHS sama dengan

$$\frac{(2p+r+1)(r)}{2}$$

Sekarang kalikan kedua sisi dengan 2, persamaan yang diberikan menjadi

$$p(p-1) = (2p+r+1)(r)$$

Perhatikan bahwa $p < 2p + r + 1$, sehingga persamaan di atas menyiratkan bahwa $p - 1 > r$

Selain itu, karena p prima, ia harus membagi salah satu dari 2 faktor di sisi kanan.

Namun, $p - 1 > r$, sehingga p tidak dapat membagi r.

Oleh karena itu, p harus membagi $2p + r + 1$, yang menyiratkan bahwa $p \mid r + 1$

Karena r adalah bilangan bulat positif, ini menyiratkan bahwa r harus setidaknya $p - 1$.

Namun, ini jelas akan membuat sisi kanan persamaan lebih besar daripada sisi kiri persamaan dalam persamaan awal.

Memang, dengan memasukkan $r \geq p - 1$ ke dalam persamaan awal, kita mendapatkan bahwa

$$\begin{aligned} RHS - LHS &\geq [(p+1)+(p+2)+\cdots+(2p-1)]-[1+2+\cdots+(p-1)] \\ &= [(p+1)-1]+[(p+2)-2]+\cdots+[(2p-1)-(p-1)] \\ &= p+p+\cdots+p \\ &= p(p-1) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Kontradiksi.

Oleh karena itu, n bukan bilangan prima

Namun, mudah untuk memeriksa bahwa LHS < RHS ketika n = 1 juga

Oleh karena itu, n pasti komposit.

2. **Penyelesaian :**

Berikut solusi yang lebih ramah.

Misalkan bilangan-bilangan tersebut adalah $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{19}, b_1, b_2, \dots, b_{200}$. Kita tahu bahwa $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{200} > a_1 + a_2 + \dots + a_{19}$.

Misalkan f(k) adalah fungsi yang memetakan $\{1, 2, \dots 19\} \to \{1, 2, \dots, 200\}$ sedemikian rupa sehingga merupakan n terbesar sehingga untuk setiap k

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{f(k)} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

Jika untuk suatu k, kesetaraan berlaku. Maka kita sudah selesai.

Jika tidak, perhatikan bahwa

$$0 < g(k) = b_1 + b_2 + \cdots + b_{f(k)} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \leq 18$$

Untuk setiap $k \in \{1, 2, \dots, 19\}$.

Dengan Pigeon Hole, pasti ada dua i dan j yang nilainya g(k) sama.

Kurangi keduanya, jadi kita sudah selesai.

3. **Penyelesaian :**

Saya akan membuat sketsa singkat.

Perhatikan bahwa ABFE adalah persegi panjang, maka BF = AE.

Selain itu, BENF adalah trapesium sama kaki.

Oleh karena itu, kita dapat membuktikan bahwa ABNE adalah layang-layang.

Misalkan EN ∩ BC = K. Kita dapat membuktikan bahwa NKCG adalah layang-layang.

Sekarang, kita dapat membuktikan bahwa △ABE ~ △DGF.

Jadi,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{GD}{DH}$$

Seseorang dapat membuktikan bahwa FK = KC karena △FNC adalah segitiga siku-siku.

$$\frac{\frac{AB}{2}}{BF} = \frac{GC}{CF}$$

Maka, kita peroleh

Jadi, kita harus memiliki AB = 2BP. Cukup dengan membuktikan bahwa P berada pada garis bagi tegak lurus MN, yang merupakan persamaan keserupaan sederhana.

4. **Penyelesaian :**

Induksi langsung berhasil; Bagilah soal menjadi 2 kasus, genap dan ganjil. Kasus dasar untuk masing-masing bagian, N = 2 dan N = 3, dapat diverifikasi dengan mudah secara manual. Untuk langkah induksi dari N ke N + 2, perhatikan bahwa himpunan $\{N^2 + 1, N^2 + 2, \ldots, N^2 + 4N + 4\}$ memenuhi persamaan:

$$(N^2+1)+(N^2+2)+\ldots+(N^2+N+1)=(N^2+N+2)+\ldots+(N^2+2N)+(N^2+2N+2)$$
$$(N^2+2N+1)+(N^2+2N+3)+\ldots+(N^2+3N+3)=(N^2+3N+4)+\ldots+(N^2+4N+3)+(N^2+4N+4)$$

Sekarang, jika bilangan bulat yang dihapus kurang dari N^2, kita selesaikan dengan induksi, dengan dua persamaan di atas terisi 2 baris terakhir dalam persamaan segitiga. Lebih lanjutnya, idenya adalah membuat dua persamaan terakhir "berfungsi" dengan mengubah suku yang dihapus menjadi N^2 dan menukar posisi suku-suku di dalamnya.

5. **Penyelesaian :**

$$\lfloor an+b\rfloor \geq \lfloor a+bn\rfloor$$
$$an+b+1 \geq a+bn-1$$
$$an-a+b-bn \geq -2$$
$$a(n-1)+b(1-n) \geq -2$$
$$(n-1)(a-b) \geq -2$$

Jadi, kita punya $(1 - n)(a - b) \leq 2$. Demikian pula, kita bisa mendapatkan $(1 - m)(b - a) \leq 2$. Keduanya menyiratkan a = b.

6. **Penyelesaian :**

Bekerja pada bilangan kompleks, di mana lingkaran dengan pusat O dan jari-jari OP adalah lingkaran satuan, misalkan a = a, b = b, p = 1, q = q dan o = 0.

B adalah refleksi A terhadap O:

$$\Rightarrow b = -a$$

$AP \perp PQ$

$$\frac{a-1}{\overline{a}-1} = -\frac{q-1}{\overline{q}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a-1}{\overline{a}-1} = q$$

$$\Rightarrow a - 1 = \overline{a}q - q$$

$$\Rightarrow \overline{a} = \frac{a+q-1}{q} ...(I)$$

$$AP \times BQ = |a-p||b-q|$$

AP × BQ tetap konstan ketika P bervariasi jika |a – p||b – q| tidak bergantung pada q

$$|a-p||b-q| = \sqrt{(a-1)(\overline{a}-1)(-a-q)(-\overline{a}-\overline{q})}$$

$$\Rightarrow |a-p||b-q| = \sqrt{(a\overline{a}-\overline{a}-a+1)(a\overline{a}+a\overline{q}+q\overline{a}+1)}$$

$$\Rightarrow |a-p||b-q| = \sqrt{(a(\frac{a+q-1}{q}) - \frac{a+q-1}{q} - a + 1)(a(\frac{a+q-1}{q}) + \frac{a}{q} + q(\frac{a+q-1}{q}) + 1)}$$

$$\Rightarrow |a-p||b-q| = \sqrt{(\frac{a^2+aq-a-a-q+1}{q} - a + 1)(\frac{a^2+aq-a+a}{q} + a + q - 1 + 1)}$$

$$\Rightarrow |a-p||b-q| = \sqrt{(\frac{a^2-2a+1}{q})(\frac{a^2+2aq+q^2}{q})}$$

$$\Rightarrow |a-p||b-q| = \sqrt{(\frac{(a-1)^2}{q})(\frac{(a+q)^2}{q})}$$

$$\Rightarrow |a-p||b-q| = \sqrt{\frac{(a-1)^2(a+q)^2}{q^2}}$$

$$\Rightarrow |a-p||b-q| = \sqrt{\frac{(a-1)(a+q)}{q}}^2$$

$$\Rightarrow |a-p||b-q| = \sqrt{\frac{a^2+aq-a-q}{q}}^2$$

$$\Rightarrow |a-p||b-q| = \sqrt{a\bar{a}-1}^2$$
$$\Rightarrow |a-p||b-q| \text{ tidak bergantung pada } q$$
$$\Rightarrow AP \times BQ \text{ tetap konstan saat P bervariasi}$$

7. Penyelesaian :

Jawaban :

$(x, y, p, m, n) = (1, 1, 2, 1, 1)$
$(x, y, p, m, n) = (2, 5, 3, 3, 2)$
$(x, y, p, m, n) = (5, 2, 3, 2, 3)$

Kemajuan:

Ketika m = n, kita memiliki

$x^2 + y = x + y^2 \implies x = y$

Jadi, $x(x+1) = p^m \implies x = y = m = n = 1, p = 2$

Saya pikir kita dapat menunjukkan p < 5 dengan mod 6. Tapi itu butuh banyak kerjaan.

8. Penyelesaian :

Kita akan membuat permutasi dari $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\}$, yaitu $\{b_1, b_2, \ldots, b_{2n}\}$, yang memenuhi

$$-n + 2 \leq \sum_{i=1}^{k} b_i \leq n + 1$$

untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Kita mengkonstruksinya dengan memilih satu per satu.

Untuk kasus dasar t = 1, ambil saja b_1 sebagai suku positif apa pun dalam a_i.

Asumsikan sifat ini berlaku untuk t = k. Kita akan menemukan b_{k+1} sehingga sifat ini juga berlaku untuk t = k + 1. Bagi menjadi beberapa kasus:

- $\sum_{i=1}^{k} b_i \leq 1$: Jelas, ada bilangan positif yang tidak dipilih (Karena jumlah totalnya adalah n + 1, lebih besar dari 1). Anggap bilangan tersebut sebagai b_{k+1}.
- $\sum_{i=1}^{k} b_i \geq 2$: Jika terdapat suku yang tidak dipilih dari a_i yang bernilai non-positif, pilihlah suku tersebut sebagai b_{k+1}. Jika tidak, setiap suku yang tidak dipilih lainnya bernilai positif, maka kita dapat mengambil salah satu suku tersebut sebagai b_{k+1},

karena jika $\sum_{i=1}^{k+1} b_i > n + 1$, maka terdapat suku yang tidak dipilih yang bernilai negatif (karena jumlah total a_i hanya n + 1).

Sekarang perhatikan 0, b_1, $b_1 + b_2$, … , $b_1 + b_2 + … + b_{2n}$. Ada nilai 2n + 1, tetapi dibatasi oleh – n + 2 dan n + 1. Karena hanya ada 2n bilangan bulat dalam [- n + 2, n + 1], maka menurut PHP terdapat dua suku yang sama. Mudah dipahami, ini menyiratkan bahwa beberapa dari a_1, a_2, … , a_{2n} berjumlah 0.