PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMA

TAHUN 2018

1. **Penyelesaian :**

   a. Mengingat FPB(xy, z) = 1 $\Leftrightarrow$ FPB(x, z) = FPB(y, z) = 1, dengan menggunakan algoritma Euclidean kita peroleh

$$\begin{aligned}\text{FPB}(an+1, 2n+1) = 1 &\Longrightarrow \text{FPB}(an+1-(2n+1), 2n+1) = 1\\ &\Longrightarrow \text{FPB}((a-2)n, 2n+1) = 1\\ &\Longrightarrow \text{FPB}(a-2, 2n+1) = 1.\end{aligned}$$

   b. Karena FPB(a – 2, 2n + 1) = 1 berlaku untuk semua bilangan bulat n, kita memperoleh FPB(a – 2, p) = 1 untuk semua bilangan prima p > 2 dengan meletakkan n = $\frac{p-1}{2}$, yang menyiratkan bahwa a – 2 = $\pm$ 2^m untuk suatu bilangan bulat m > 0. Jelas FPB($\pm$ 2^m, 2n + 1) = 1 untuk semua bilangan bulat nonnegatif m dan semua bilangan bulat n. Oleh karena itu, semua kemungkinan a adalah 1 atau 2 + 2^m untuk setiap bilangan bulat nonnegatif m.

2. **Penyelesaian :**

   Gambarkan garis singgung persekutuan di A dan beri nama XY dengan ∠YAD lancip.

$$\angle YAD = \angle ACD = \angle BCP.$$

   Lagi, $\angle XAQ = \angle QBA = \angle CBP$

   Dengan menambahkan kedua kondisi di atas kita mendapatkan,

$$\angle YAD + \angle XAQ = \angle BCP + \angle CBP$$

   Karena, 180 – $\angle QAD = \angle QPD$

   Ini, A, D, P, Q adalah konsiklis.

3. **Penyelesaian :**

   Jawabannya adalah:

   1. (3, 0), (2, 0), (1, 0),

2. $(0, n)$ di mana $1 \leq n \leq 3$,
3. $(-1, n)$ di mana $2 \leq n \leq 5$,
4. $(-2, n)$ di mana $4 \leq n \leq 7$,
5. $(-3, n)$ di mana $6 \leq n \leq 8$,
6. $(-4, n)$ di mana $9 \leq n \leq 10$.

Jika Andi tidak kalah di giliran pertama dan $n \neq 0$, maka Andi dapat melanjutkan permainan tanpa batas dan menghindari kekalahan.

Perhatikan bahwa polinomial $x^2 + ax + b$ memiliki akar riil jika dan hanya jika $a^2 \geq 4b$.

Pertama, amati bahwa jika komputer memasukkan polinomial $x^2 + ax + b$ di mana $a + b \leq 0$, maka setidaknya salah satu dari a dan b adalah non-positif. Jika $a \leq 0$, Andi memilih $x^2 + ax + (a + b)$. Jika tidak, $b \leq 0$, dan Andi memilih $x^2 + (a + b)x + b$. Bagaimanapun, polinomial yang dihasilkan memiliki konstanta dan koefisien x non-positif (dan dengan demikian memiliki akar riil). Pada setiap putaran berikutnya, komputer hanya dapat melempar polinomial dengan properti ini, sehingga Andi tidak akan kalah. Misalkan posisinya adalah 1.

Kedua, jika komputer melempar polinomial $x^2 + ax + b$ dengan $a, b > 0$, maka Andi dapat memilih $x^2 + (a + b)x + b$. Perhatikan bahwa $(a + b)^2 \geq (b + 1)^2 \geq 4b$, sehingga memiliki akar riil. Kemudian, pada setiap putaran berikutnya, komputer hanya akan dapat melempar polinomial $x^2 + ax + b$ dengan $a, b > 0$, dan Andi dapat mengulangi strategi tersebut dan menghindari kerugian. Misalkan ini adalah posisi 2.

Ketiga, jika komputer memasukkan polinomial $x^2 + ax + b$ di mana $b < 0$ dan $a + b > 0$, maka dengan memilih $x^2 + ax + (a + b)$ sebagai $a > a + b > 0$, mencapai posisi 2 setelah komputer mengubahnya menjadi $x^2 + (a + b)x + a$. Biarkan posisinya menjadi 3.

Oleh karena itu, untuk kasus yang tersisa, karena $n \neq 0$, kita asumsikan bahwa $m + n > 0$ tetapi $m < 0$. Jelas, jika Andi dapat memilih $x^2 + (m + n)x + n$, karena $n > n + m > 0$, maka ia telah mencapai posisi 2. Sementara itu, jika Andi dapat memilih $x^2 + mx + (m + n)$, maka komputer memasukkan $x^2 + (m + n)x + m$ di mana $m + n > 0 > m$, sehingga mencapai posisi 3 jika $2m + n = (m + n) + m > 0$, atau mencapai posisi 1 jika tidak, jika $2m + n = (m + n) + m \leq 0$. Bagaimanapun, Andi tidak akan kalah.

Oleh karena itu, klaim tersebut berlaku.

Klaim tersebut berarti bahwa dalam kasus $n \neq 0$, Andi kalah jika dan hanya jika ia kalah pada giliran pertama; yaitu, jika dan hanya jika $(m + n)^2 < 4n$ dan $m^2 < 4(m + n)$ berlaku. Perhatikan bahwa ini berarti $m \leq 0 < n$ dan $m + n > 0$. Yang pertama kemudian setara dengan $m + n < 2\sqrt{n}$ dan kemudian $(2\sqrt{n} - 1)^2 < 1 + (-m)$. Sementara itu, yang kedua setara dengan $n > (-m) + \left(\frac{-m}{2}\right)^2$. Akibatnya,

$$(-m)+\left(\frac{-m}{2}\right)^2 < n < (1+\sqrt{1+(-m)})^2 = 2+(-m)+2\sqrt{1+(-m)}$$

Namun, dapat dengan mudah diperiksa bahwa jika $-m \geq 6$, maka $\left(\frac{-m}{2}\right)^2 \geq 2 + 2\sqrt{1+(-m)}$. Jadi, $0 \leq (-m) \leq 5$. Kemudian, hasilnya dapat ditemukan dengan pemeriksaan manual.

Sisa kasusnya adalah $n = 0$, yang jika $m \leq 0$ maka Andi menang karena kedua koefisien tidak akan pernah positif (kecuali koefisien x^2 yang sudah jelas), dan jika $m \geq 4$ maka Andi dapat memilih $x^2 + mx + m$ dan menghindari kerugian, sementara ia kalah jika $1 \leq m \leq 3$ karena ia terpaksa memilih $x^2 + mx$, maka komputer mengembalikan $x^2 + m$, yang membuatnya tidak dapat bergerak.

4. **Penyelesaian :**

Dengan mengurutkan x, y, z sebagai $a \leq b \leq c$, kita peroleh

$a + 2b = 3u$

$a + 2c = 3v$ (dan $c - b = 3\frac{v-u}{2}$ dan $u \leq v$)

$b + 2c = 3w$ (dan $b - a = 3(w - v)$ dan $v \leq w$)

dan $(u,v,w) = (2017, 2018, 2019)$ dan $(x,y,z) = (b,a,c)$

Sistem dengan mudah memberikan

$$(a,b,c) = \left(u + 2v - 2w, u - v + w, \frac{-u+v+2w}{2}\right)$$

$$(a, b, c) = \left(2015, 2018, \frac{4039}{2}\right)$$

$$\boxed{(x, y, z) = \left(2018, 2015, \frac{4039}{2}\right)}$$

5. **Penyelesaian :**

Misalkan $2^n p^2 + 1 = x^2$, maka kita peroleh $(x – 1)(x + 1) = $2^n p^2$, tetapi (x – 1, x + 1) = 2, dan x + 1 > x – 1, maka kita harus peroleh $x – 1 = 2^a$, dan $x + 1 = 2^b p^2$, maka kita peroleh $2 = 2^b p^2 – 2^a$, maka $1 = 2^{b-1} p^2 – 2^{a-1}$, maka kita harus peroleh a = 1, maka x = 3, maka hasilnya p = 2, atau kita harus peroleh b = 1, maka hasilnya $x = p^2 – 1$, dst.

6. **Penyelesaian :**

Jawabannya adalah semua genap n ≥ 6. Untuk n tersebut, Ani dapat memasukkan 4 kelereng ke dalam ember pertama dan $\frac{n-4}{2}$ ke dalam dua ember lainnya. Setelah itu, ia dapat menggunakan strategi berikut. Jika Budi mengambil *x* kelereng dari ember kedua (masing-masing ketiga), ia akan mengambil *x* dari ember ketiga (masing-masing kedua).

Mari kita tunjukkan bahwa untuk semua n lainnya, Budi memiliki strategi yang menang. Faktanya, kita akan mengkarakterisasi semua tripel bilangan bulat nonnegatif (a, b, c) sedemikian rupa sehingga jika terdapat a, b, c kelereng di ember pertama, kedua, dan ketiga secara berurutan, pada suatu titik waktu, maka pemain berikutnya yang bergerak akan kalah. Sebut tripel tersebut (a, b, c) kalah. Berdasarkan konvensi, kita akan mengatakan bahwa (0, 0, 0) kalah.

Klaim. Suatu tripel $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ dikatakan kalah jika dan hanya jika salah satu dari:

1. Dua dari a, b, c kongruen modulo 4, dan yang lainnya adalah 0 mod 4.

Atau

2. a, b, c kongruen dengan 1, 2, 3 modulo 4 dalam urutan tertentu.

Bukti. Sebutlah tiga bilangan bulat nonnegatif yang memenuhi salah satu dari dua kondisi di atas sebagai bilangan emas. Mari kita buat dua pengamatan terlebih dahulu. Pertama, kita akan menunjukkan bahwa jika (a, b, c) adalah bilangan emas, maka penghilangan 1, 2, atau 3 akan selalu membuatnya bukan bilangan emas. Kedua, kita akan menunjukkan bahwa jika (a, b, c) bukan bilangan emas, kita selalu dapat menghilangkan 1, 2, atau 3 kelereng dari suatu ember untuk membuatnya menjadi bilangan emas. Kedua fakta ini jelas, dan pembuktian dari hasil ini diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Dengan pengamatan ini, klaim tersebut dapat dengan mudah diikuti.

Dari klaim tersebut, dapat disimpulkan bahwa tidak ada tripel (a, b, c) $\in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ sehingga a + b + c ganjil yang dapat kalah. Oleh karena itu, bagaimana pun Ani mendistribusikan kelereng di antara ember untuk n ganjil, Budi selalu dapat menang karena konfigurasinya tidak akan kalah. Sebagai penutup, cukup ditunjukkan bahwa Budi menang untuk n = 4. Namun, hal ini jelas, karena harus ada 2, 1, 1 kelereng di ketiga ember dalam urutan tertentu, sehingga Budi dapat menjamin kemenangan dengan mengambil kedua kelereng dari ember dengan 2 sebagai langkah pertamanya.

7. **Penyelesaian :**

Jika AB = AC, kita sudah selesai. WLOG AB < AC. Karena titik tengah KM terletak pada lingkaran luar, $KIMI_a$ adalah belah ketupat dengan I_a adalah pusat A-. Kita perlu menunjukkan bahwa O adalah titik tengah IN. Jadi, kita perlu menunjukkan bahwa $ r = $2 \cdot \frac{a}{2}$ cot A = a cot A. Jadi, kita perlu

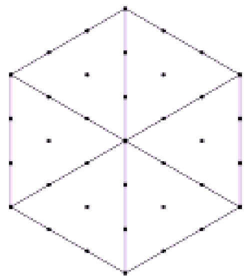
$$r = (s-a)\tan\frac{A}{2} = a\cot A \Leftrightarrow s - a = s\cos A.$$

Sekarang $KIMI_a$ adalah belah ketupat, jadi ∠AKI = 90° – A. Jadi,

$$\frac{s}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{AI}{\cos A} = \frac{s-a}{\cos A\cos\frac{A}{2}} \implies s = \frac{s-a}{\cos A}.$$

terbukti.

8. Penyelesaian :



Pertama-tama, gambarlah dua heksagon berbeda lainnya sedemikian rupa sehingga titik puncaknya terletak pada 6 ruas garis (yang terhubung ke pusat heksagon). Tandai yang kecil dengan H_1, yang sedang dengan H_2, dan yang terbesar dengan H_3. Asumsikan Alzim mewarnai pusat H_3 (kotak heksagonal yang disebutkan dalam soal) pada putaran pertama, kita akan menunjukkan strategi kemenangannya.

Kasus 1. Badril mewarnai dua titik puncak H_1 sedemikian rupa sehingga terdapat 3 titik kolinear pada putaran kedua.
Pada putaran ketiga, Alzim akan mewarnai salah satu titik puncak H_2 sedemikian rupa sehingga tidak ada titik biru yang terhubung oleh 6 ruas garis yang disebutkan sebelumnya, memaksa Badril untuk menggambar dua titik lagi pada titik puncak H_2 untuk menghentikan Alzim pada langkah keempat. Kemudian, pada langkah kelima, Alzim akan mewarnai titik puncak H_3 sehingga terdapat 3 titik merah kolinear yang dihubungkan oleh 6 ruas garis. Alzim akan menang karena Alzim memiliki lebih dari dua pilihan untuk membentuk segitiga sama sisi.

Kasus 2. Badril tidak melakukan pewarnaan seperti pada kasus 1.
Pada giliran ketiga, Alzim akan mewarnai salah satu titik sudut H_1 sehingga tidak ada titik biru yang terhubung oleh titik-titik sudut H_1, sehingga memaksa Badril untuk menggambar dua titik lagi pada titik sudut H_1 untuk menghentikan Alzim. Pada langkah kelima, Alzim akan menggambar satu titik lagi pada segmen garis 6 sehingga terdapat tiga titik merah berurutan yang terhubung oleh garis 3 pada diagram yang berpotongan di pusat segi enam. Jika Alzim hanya memiliki satu cara untuk melakukan ini, maka ia akan menang. Jika ia memiliki dua cara untuk melakukan ini, salah satu cara tersebut menghasilkan lebih dari

dua pilihan untuk membentuk segitiga sama sisi dengan mempertimbangkan dua titik yang diwarnai Badril pada giliran kedua. Bagaimanapun, Alzim akan menang.

Dengan demikian, terbukti bahwa Alzim memiliki strategi yang unggul.