PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMA

TAHUN 2017

1. **Penyelesaian :**

Misalkan titik H_C, H_B, H_D adalah kaki-kaki tegak lurus.

Kasus 1: g memotong ruas garis BC di X dan DC di Y. Maka △ABX ~ △YCX ~ △YDA dan seterusnya

$$\frac{H_D - H_B}{H_C} = \frac{AD - XB}{XC} = \frac{BC - XB}{XC} = 1$$

Kasus 2: g berpotongan dengan ruas garis CD - dengan cara yang sama seperti kasus 1.

Kasus 3. g tidak berpotongan dengan ruas garis BC tetapi g berpotongan dengan garis BC di X. Maka $\triangle H_CXC \sim \triangle H_BXB \sim \triangle H_DAD$ dan seterusnya.

$$\frac{H_D + H_B}{H_C} = \frac{XB + AD}{XC} = \frac{XC}{XC} = 1$$

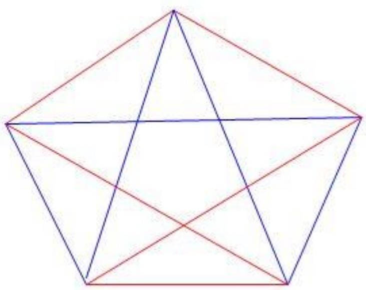
Kasus 4. g tidak memotong segmen CD tetapi g memotong garis CD. Sama seperti kasus 4.

2. **Penyelesaian :**

Anggaplah kelima orang tersebut sebagai lima titik A, B, C, D, E dan perhatikan segitiga ABC sebagai contoh:

Segmen berwarna biru untuk jabat tangan, segmen merah untuk tidak berjabat tangan, karena segitiga memiliki tiga sisi, harus ada dua segmen yang berwarna sama sehingga terbentuklah trio. (Jika sebuah segitiga memiliki ketiga sisi berwarna sama, maka akan terbentuk tiga trio dan kasus ini harus dihindari). Untuk grafik lima titik, terdapat C(5,3) = 10 segitiga yang berbeda, sehingga jumlah trio minimum yang mungkin adalah 10.

Grafik terlampir adalah contoh pola untuk 10 trio.



3. Penyelesaian :

1 istimewa, terbukti di tautan

2 istimewa, karena:

$$(2^m(n+1))^2 + (2^m n)^2 - 2(2^m n)^2 = 2^{2m}(2n+1)$$
$$(2^m(n+1))^2 + (2^m(n+1))^2 - 2(2^m n)^2 = 2^{2m+1}(2n+1)$$

3 tidak special, karena:

$a^2 + b^2 - 3c^2 = 3$ tidak ada solusi.

Bukti: Misalkan a,b,c ada, maka a = b = 0 (mod 3) → a = 3a_1, b = 3b_1

$3a_1^2 + 3b_1^2 - c^2 = 1$ tetapi $3a_1^2 + 3b_1^2 - c^2 = 0,2$ (mod 3) -kontradiksi.

4. Penyelesaian :

Misalkan $x = 2a, y = 2b$

$a^{100} - b^{100} = a - b = a^{200} - b^{200}$

$a^{100} + b^{100} = 1$ lalu $|a| \leq 1, |b| \leq 1$dan $a = 1, b = 0$, $a = 0, b = 1$ adalah solusi,

Misalkan $|a|, |b| < 1$.

$a^{100} - a = b^{100} - b \rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{b^{99} - 1}{a^{99} - 1} > 0$ jadi a,b memiliki tanda yang sama.

$\dfrac{a^{100} - b^{100}}{a - b} = 1 = a^{99} + a^{98}b + ... + b^{99} \rightarrow a > 0, b > 0$ Jadi,

$a^{99} + b^{99} < 1 = a^{100} + b^{100} = a * a^{99} + b * b^{99} < a^{99} + b^{99}$-kontradiksi.

Jadi a = 1, b = 0, a = 0, b = 1 adalah semua solusinya.

Jawaban: (x, y) = (2, 0), (0, 2).

5. Penyelesaian :

Misalkan x_1, x_2, ... x_9 adalah akar-akar $P(x)$ = 0 maka $P(x) = (x - x_1)....(x - x_9)Q(x)$

Misalkan n bukan solusi dari P(x) = 0 maka

$$|(P(n)| = |(n - x_1)...(n - x_9)Q(n)| \geq 1^2 * 2^2 * 3^2 * 4^2 * 5 = 2880$$

6. Penyelesaian :

Jika 17|n maka $n \nmid 20^n \rightarrow n \nmid 20^n + 17k$

Jika $17 \nmid n$ maka $17k = a \pmod n$memiliki solusi untuk setiap a sehingga $k = (-20^n) * (17)^{-1} (\text{mod } n)$ maka $n | 20^n + 17k$

$2017 - [\frac{2017}{17}] = 1899$

7. **Penyelesaian :**

Misalkan
$B=(0,0), E=(a,0), C=(a+b,0), F=(a+b+\frac{ac}{a+b}, ta), D=(a+b+c, ta+tb), A=(c, ta+tb)$

Mudah untuk melihat bahwa kondisinya valid di sini. Sekarang, baris BD memiliki persamaan

$$y=\frac{t(a+b)}{a+b+c}x$$

dan garis AE memiliki persamaan

$$y=\frac{t(a+b)}{c-a}(x-a)$$

Kita dapat menyelesaikan ini untuk mendapatkan koordinat x dari M menjadi

$$\frac{a(a+b+c)}{2a+b}$$

Demikian pula persamaan garis AF adalah

$$y=\frac{tb(a+b)}{cb-(a+b)^2}(x-c)+t(a+b)$$

Kita dapat menyelesaikannya lagi untuk mendapatkan koordinat x dari N menjadi

$$\frac{(a+b)(a+b+c)}{a+2b}$$

Sekarang, kita perhatikan bahwa rasio BM : MN : ND sama dengan $a^2 + 2ab : a^2 + b^2 + ab : 2ab + b^2$, yang merupakan segitiga yang valid karena tidak ada satu pun di antaranya yang paling sedikit setengah dari jumlah dua lainnya.

8. **Penyelesaian :**

WLOG merepresentasikan koordinat kotak-kotak dengan elemen himpunan $\{1,2, \dots,2017\}^{x2}$ secara alami, seperti kisi-kisi. Untuk konstruksinya, ambil titik {(1, 518), (2, 518), … ,(517, 518)} dan {(518, 1), (518, 2), … ,(518, 517)}. Mudah dipahami mengapa hal ini berhasil. Sekarang, perhatikan bahwa jika terdapat 1008 kotak berurutan yang berbagi baris atau kolom yang tidak berisi detektor emas, dan terdapat 1008 kotak berurutan yang "sejajar" dan bergeser 1500 secara vertikal atau horizontal, maka himpunan kotak terakhir pasti berisi detektor emas. (Ini jauh lebih mudah diungkapkan secara visual.) Sekarang, bagilah lapangan menjadi 9 persegi panjang yang diberikan oleh himpunan koordinat $A_{i,j} = S_i \times S_j$ di mana $1 < i,j < 3$, dan $S_1 = \{1, 2, \dots ,517\}$, $S_2 = \{518, 519, \dots ,1500\}$, $S_3 = \{1501, 1502, \dots ,2017\}$. Misalkan $K(A_{i,j})$ menyatakan jumlah detektor emas dalam persegi panjang masukan, dan pertimbangkan beberapa penempatan optimal detektor tersebut. Dari pengamatan, dapat disimpulkan bahwa

$$K(A_{i,j})+K(A_{i,j+1})+K(A_{i+2,j})+K(A_{i+2,j+1})\geq 517$$

dan demikian pula

$$K(A_{i,j}) + K(A_{i+1,j}) + K(A_{i,j+2}) + K(A_{i+1,j+2}) \geq 517$$

Menjumlahkan semua pertidaksamaan yang dihasilkan menghasilkan

$$2(-K(A_{2,2}) + \sum_{1 \leq i,j \leq 3} K(A_{i,j})) \geq 4 \cdot 517$$

dan dengan demikian

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 3} K(A_{i,j}) \geq 1034$$

yang merupakan ketidaksetaraan yang diinginkan.