PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMA

TAHUN 2016

1. **Penyelesaian :**

Pertama, perhatikan bahwa OEBF, OEAH, OHDG, dan OFGC bersifat siklik. Oleh karena itu

$$\begin{aligned}\angle EHG + \angle EFG \\ &= \angle EHO + \angle GHO + \angle EFO + \angle GFO \\ &= \angle EAO + \angle GDO + \angle EBO + \angle GCO \\ &= \angle EAC + \angle GDB + \angle EBD + \angle GCA \\ &= 2(\angle CAB + \angle ABD) \\ &= 2(180^\circ - 90^\circ) \\ &= 180^\circ,\end{aligned}$$

membuktikan bagian a. Untuk bagian b, perhatikan bahwa

$$\angle HEO = \angle HAO = \angle DAC = \angle DBC = \angle OBF = \angle OEF,$$

membuktikan bahwa OE membagi dua ∠FEH.

2. **Penyelesaian :**

Lemma: $2^b + 1 = x^a$ dengan $x > 0$, $a, b > 1$, hanya memiliki satu solusi $x = 3$, $a = 2$, $b = 3$.

Buktikan:

Kasus 1: $a = 2m$. $2^b = (x^m - 1)(x^m + 1)$ sehingga $x^m = 3$ sehingga $m = 1$, $a = 2$, $x = 3$, $b = 3$

Kasus 2: $a = 2m + 1$. $2^b = (x - 1)(x^{2m} + x^{2m-1} + \ldots + x + 1)$ sehingga $x - 1 = 2^b$ sehingga kontradiksi karena $a > 1$.

Solusi:

Kasus 1: $c > 2016$. $2^{2016}(2^{c-2016} + 1) = a^b$. Jadi, dari lemma $c = 2019$, $a = 3*2^{1008}$, $b = 2$

Kasus 2: $c < 2016$. $2^c(2^{2016-c} + 1) = a^b$. Jadi, dari lemma $c = 2013$, $b = 2$, tetapi 2^{2013} bukan bilangan kuadrat, jadi tidak ada solusi.

Kasus 3: $c = 2016$. 2017 prima, jadi tidak ada solusi.

3. Penyelesaian :

Saya rasa gerakan kedua tidak diperlukan.

Pertama, lakukan gerakan pertama empat kali sebagai berikut:

$(1,0,0,0,0) \to (0,1,0,0,1) \to (1,0,1,0,1) \to (2,0,1,1,0) \to (1,1,1,1,1)$.

Sekarang, perhatikan bahwa setiap kali kita memiliki x bola di setiap kotak untuk x > 0, jika kita cukup menerapkan operasi pertama pada setiap kotak tepat satu kali dalam urutan apa pun, kita akan mendapatkan x + 1 di setiap kotak setelah lima langkah ini. Oleh karena itu, cukup menerapkan $5 \cdot (7^{5^{2016}} - 1)$ operasi lagi untuk menyelesaikannya.

4. Penyelesaian :

Berikut ini adalah bukti yang agak buruk:

Misalkan $t = \arcsin \frac{21}{29}$ sehingga $\sin t = \frac{21}{29}$ dan $\cos t = \frac{20}{29}$

Dituliskan $C = \pi - A - B$ persamaannya adalah $\frac{\cos A}{\cos t} + \frac{\cos B}{\sin t} - \cos(A+B) = \frac{1}{\sin t \cos t}$

Yaitu $\left(\frac{1}{\sin t} - \cos A\right)\left(\frac{1}{\cos t} - \cos B\right) = \sin A \sin B$

Kita peroleh bahwa sin A sin B ≠ 0 dan dengan demikian :

$\frac{1}{\sin t} - \cos A = \alpha \sin A$ dan $\frac{1}{\cos t} - \cos B = \frac{1}{\alpha} \sin B$ untuk beberapa $\alpha > 0$

Dituliskan $u = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}}$ ini menjadi:

$\frac{\sin u}{\sin t} = \sin(A+u)$ dan $\frac{\cos u}{\cos t} = \cos(B-u)$

Jadi 0 < sin u < sin t dan 0 < cos u < cos t yang berarti u = t.

Dan juga $\boxed{(A,B,C) = \left(\frac{\pi}{2} - t, t, \frac{\pi}{2}\right)}$

5. **Penyelesaian :**

Misalkan p|ab adalah prima. Kita akan membandingkan $v_p(ab)$ dan $v_p((cd)^{max(a,b)})$

$v_p(a) \leq a$ - mudah ditunjukkan

Jika p|a, p|b → p|c, p|d dan dari $v_p(a) \leq a$, maka

$v_p(ab) \leq a + b \leq 2max(a,b) \leq max(a,b)(v_p(cd)) = v_p((cd)^{max(a,b)})$

Jika $p|a, p \nmid b$

Maka, $v_p(ab) = v_p(a) \leq max(a,b) \leq v_p(c^{max(a,b)}) \leq v_p((cd)^{max(a,b)})$

6. **Penyelesaian :**

Di sini saya akan menyajikan metode kombinatorial.

Misalnya, lingkaran ω berpusat di A dengan jari-jari 1, dan misalkan titik "merah" adalah titik sembarang pada ω

Dari titik A, kita tarik garis tegak lurus terhadap DC, CB, DB dan tandai perpotongannya dengan ω seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini. Kita juga menyatakan perpotongan antara ω dengan sisi segiempat seperti yang ditunjukkan di bawah ini.

Untuk setiap titik "merah" R, kita menggambar garis yang melewati titik sudut segiempat yang sejajar atau tegak lurus terhadap AR.

Dan misalkan perpotongannya membentuk 3 persegi panjang dengan diagonal "biru, hijau, merah muda" seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini.

Untuk persegi panjang dengan diagonal hijau, ketika kita memindahkan titik merah, mulai dari G_1 dan menuju G_2 dan berakhir di G_3. Kita telah menetapkan 4 titik sudut persegi panjang, A_1, A_2, A_3, A_4.

Pada G_1, kita melihat bahwa persegi panjang tersebut akan berimpit dengan BD, kita peroleh bahwa $\frac{A_iA_{i+1}}{A_{i+1}A_{i+2}} = \infty$ untuk beberapa $i \in \{1,2,3,4\}$.

Pada G_2, kita melihat bahwa persegi panjang akan berimpit dengan AC, kita peroleh bahwa $\frac{A_iA_{i+1}}{A_{i+1}A_{i+2}} = 0$

Pada G_3, kita melihat bahwa persegi panjang akan berimpit dengan BD lagi, kita memperoleh bahwa $\frac{A_iA_{i+1}}{A_{i+1}A_{i+2}} = \infty$

Dan perhatikan bahwa $\frac{A_iA_{i+1}}{A_{i+1}A_{i+2}}$ kontinu ketika titik merah bergerak sepanjang busur ω.

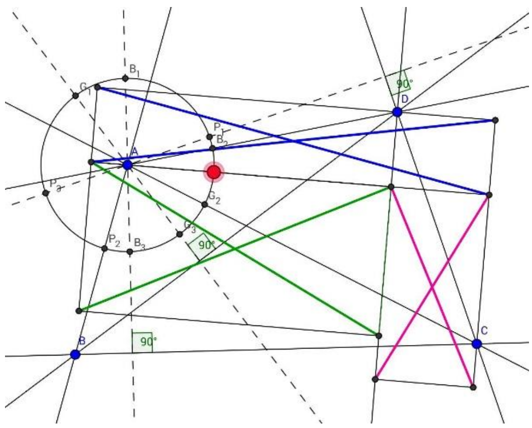
Dan ketika $\frac{A_iA_{i+1}}{A_{i+1}A_{i+2}} = 1$ kita mendapatkan bahwa persegi panjang itu adalah persegi.

Jadi, terdapat setidaknya dua titik merah R_1 pada busur minor G_1G_2 dan R_2 pada busur minor G_2G_3 yang menjadikan persegi panjang tersebut persegi.

Metode serupa juga berlaku untuk persegi panjang dengan diagonal merah muda dan biru, sehingga kita mendapatkan setidaknya 2 + 2 + 2 = 6 persegi "luar biasa".

P.S. Perhatikan bahwa karena AC tidak tegak lurus terhadap BC, kita mendapatkan bahwa G_1, G_2, G_3 semuanya merupakan titik yang berbeda.

Dan ketika dua titik merah berada pada arah yang berlawanan, persegi panjang yang diperoleh dari titik-titik merah tersebut adalah persegi panjang yang sama.



7. Penyelesaian :

Perhatikan bahwa $r_i + r_{p-i}$ habis dibagi p^2 karena eksponen pengangkatannya, karena FPB $(r_i, p) = 1$ dan $v_p(i^p + (p - i)^p) = v_p(p) + v_p(p) = 2$

Sekarang kita tahu bahwa karena merupakan sisa dari p^2 dan tidak ada yang sama dengan nol, maka:

$0 < r_i < p^2$

$0 < r_{p-i} < p^2$

$0 < r_i + r_{p-i} < 2p^2$

tetapi $r_i + r_{p-i}$ kelipatan p^2 secara otomatis gaya ini

$r_i + r_{p-i} = p^2$

maka jumlahkan semua suku ini

$r_1 + r_{p-1} = p^2$

8. **Penyelesaian :**

Dinyatakan bahwa $|a_i - i|$ adalah tetap untuk semua i, dan dapat disimpulkan bahwa untuk setiap nilai i yang diberikan, paling banyak ada satu kemungkinan permutasi:

$i+1, i+2, i+3, \ldots, 2i, 1, 2, 3, \ldots, i, 3i+1, 3i+2, 3i+3, \ldots, 4i, 2i+1, 2i+2, 2i+3, \ldots, 3i, \ldots\ldots$

Masalahnya setara dengan menemukan jumlah bilangan bulat n sehingga

$$2016 \equiv k \in \{3n+1, 3n+2, \ldots, 6n\} \mod 6n$$