PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMA

TAHUN 2014

1. **Penyelesaian :**
   Ide serupa: perhatikan bahwa semua bilangan prima harus ganjil, sehingga semua bilangan harus berada di antara bilangan genap dan ganjil. Hal ini memaksa konfigurasi bilangan genap dan ganjil berikut:
   OEO
   EOE
   OEO
   Jika bilangan pusatnya adalah x, maka x + 2, x + 4, x + 6, x + 8 pastilah prima. Hal ini mustahil karena x + 4, x + 6, x + 8 mengandung kelipatan 3 yang lebih besar dari 3.

2. **Penyelesaian :**
   Dengan mengurangkan sisi-sisinya, kita mendapatkan
   y(y – 1) – x(x – 1) = m – n, perhatikan bahwa y(y – 1) dan x(x – 1) keduanya genap, sehingga 2|m – n.
   Sekarang, untuk sembarang k, sistem
   $x^2 + y = k^2 + k + 1$ dan $x + y^2 = k^2 + 3k + 1$ memiliki solusi (k, k + 1), mudah untuk membuktikan bahwa ini adalah satu-satunya solusi melalui beberapa estimasi.
   Jadi, jawabannya adalah bilangan apa pun yang habis dibagi 2.

3. **Penyelesaian :**
   Menunjukkan $F = (0,0), A = (2,2a), B = (2,2b), C = (2k,2kb), D = (2k,2ka)$

   Pertama kita cari koordinat E. Garis BD mempunyai persamaan $y = \dfrac{ka-b}{k-1}(x-2)+2b$

   dan garis AC memiliki persamaan $y = \dfrac{kb-a}{k-1}(x-2)+2a$. Pemecahan memberi

   $E = \left(\dfrac{4k}{k+1}, \dfrac{2k(a+b)}{k+1}\right)$. Karena AEPK adalah jajargenjang, kita bisa mendapatkan

   $K = \left(\dfrac{2k^2+2}{k+1}, \dfrac{2ak^2+2ak-2bk+2a}{k+1}\right)$ dan $L = \left(\dfrac{2k^2+2}{k+1}, \dfrac{2bk^2+2bk-2ak+2b}{k+1}\right)$

   Maka, $\left(\dfrac{2k^2+2}{k+1}, \dfrac{(k^2+1)(a+b)}{k+1}\right)$. Perhatikan bahwa gradien EF dan EM keduanya

   $\frac{a+b}{2}$. Selesai.

4. Penyelesaian :

Pertama, anggaplah P(x) tidak identik nol. Misalkan $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 x^0$. Dengan mengambil bilangan x, x, $\sqrt{2}x$ sebagai sisi-sisi segitiga siku-siku, kita peroleh bahwa $2P(x)^2 = P(\sqrt{2}x)^2$ atau $P(x)^2 + P(\sqrt{2}x)^2 = P(x)^2 \Leftrightarrow P\sqrt{2}x) = 0$. Karena P(x) berderajat n, ia dapat memiliki paling banyak n akar, sehingga kita peroleh bahwa $2P(x)^2 = P(\sqrt{2}x)^2$ untuk tak terhingga banyaknya x. Jadi, $2P(x)^2 - P(\sqrt{2}x)^2$ pasti identik nol. Dengan demikian, $\sqrt{2}P(x) = \pm P(\sqrt{2}x)$ atau akibatnya $\sqrt{2}[x^i]P(x) = \sqrt{2}a_i = \pm [x^i]\ P(\sqrt{2}x) = \pm (\sqrt{2})^i a_i$, yang menyiratkan bahwa $a_i = 0$ untuk semua $i \neq 1$. Jadi, kita peroleh bahwa P(x) = nx untuk setiap bilangan bulat n.

5. Penyelesaian :

Bukti:
- Misalkan m membagi n, maka n = mk untuk beberapa bilangan asli k.
- Kita dapat menulis $a_n = a_{mk}$.
- Dengan menggunakan sifat barisan yang diberikan, yaitu $a_k + a_l = a_m + a_n$ untuk setiap bilangan asli k, l, m, n dengan kl = mn, kita dapat memilih k = m dan l = k.
- Maka, $a_m + a_k = a_{m \cdot k} + a_1 = a_{mk} + a_1$.
- Dengan demikian, $a_{mk} = a_m + a_k - a_1$.
- Karena $a_{mk} = a_n$, maka $a_n = a_m + a_k - a_1$.
- Untuk membuktikan bahwa $a_m \leq a_n$, kita perlu menunjukkan bahwa $a_k - a_1 \geq 0$.
- Pilih k = 1 dan l = 1, maka $a_1 + a_1 = a_m + a_n$ untuk $m \cdot n = 1 \cdot 1 = 1$, yang berarti m = n = 1.
- Dalam kasus ini, $2a_1 = 2a_1$, yang tidak memberikan informasi tambahan.
- Namun, kita dapat memilih k = 1 dan l = m, maka $a_1 + a_m = a_1 + a_m$ untuk $1 \cdot m = m \cdot 1$.
- Untuk membuktikan $a_k \geq a_1$, kita dapat menggunakan induksi.
- Untuk k = 1, $a_1 = a_1$.
- Asumsikan $a_k \geq a_1$ untuk beberapa k.
- Pilih l = 1 dan m = k, maka $a_k + a_1 = a_k + a_1$ untuk $k \cdot 1 = k \cdot 1$.
- Sekarang, pilih k = k dan l = k, maka $a_k + a_k = a_k^2 + a_1$.
- Dengan demikian, $a_k^2 = 2a_k - a_1 \geq 2a_1 - a_1 = a_1$.
- Dengan induksi, kita dapat menunjukkan bahwa $a_k \geq a_1$ untuk semua k.
- Karena $a_n = a_m + a_k - a_1$ dan $a_k \geq a_1$, maka $a_n \geq a_m$.

Jadi, jika m membagi n, maka $a_m \leq a_n$.

6. Penyelesaian :

Karena $\angle AND + \angle ADM = \angle ACB + \angle ABC = 180^o - \angle MAN$, maka AMDN bersifat siklik, dengan D sebagai titik tengah busur lingkaran luarnya MN. Maka $\angle AND = \angle AMN$ dan $\angle DAN = \angle DAM$ menghasilkan $\triangle ADN \sim \triangle AMP \Longrightarrow AM \cdot AN = AP \cdot AD$ (1). Namun $\angle MDA = \angle ABC \Longrightarrow AD^2 = AM \cdot AB$ dan demikian pula $AD^2 = AN \cdot AC$, maka $AD^4 = AB \cdot AC \cdot AM \cdot AN$ (2). Penggabungan (1) dan (2) menghasilkan $AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$.

7. **Penyelesaian :**
Menggunakan fakta $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ dan $(r+k)\binom{m+n}{r+k}=(m+n)\binom{m+n-1}{r+k-1}$

dapat dengan mudah diperoleh bahwa cukup dengan membuktikan:

$$\frac{n}{m+n}\sum_{r=0}^{m}\frac{\binom{m}{r}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{m+n-1}{r+k-1}}=1.$$

Setelah menuliskan semua faktorial dan menyederhanakannya, kita hanya perlu:

$\sum_{r=0}^{m}\binom{r+k-1}{k-1}\binom{m+n-k-r}{n-k}=\binom{m+n}{n}.$

Hal ini dapat diinterpretasikan secara kombinatorial. Mari kita perhatikan m + n siswa yang berbaris dari kiri ke kanan dalam garis lurus. Beri label 1, 2, …, m + n dari kiri ke kanan. n dari mereka akan dipilih untuk membentuk sebuah komite. Kita akan membuktikan identitas di atas dengan mengerjakan kasus pada posisi siswa ke-k dari kiri di antara mereka yang terpilih untuk menjadi anggota komite. Memang, label siswa ke-k haruslah r + k untuk beberapa 0 < r < m. Identitasnya mudah dipahami dari sini.

8. **Penyelesaian :**
Mari kita identifikasi terlebih dahulu bilangan-bilangan indah tersebut secara lengkap. Misalkan d = FPB(x,y), x = da, y = db, dengan FPB(a,b) = 1 dan selanjutnya (a,b) ≠ (1,1) karena kita menginginkan x ≠ y. Karena kita membutuhkan $x + y|x^2 + y^2$, maka persamaannya adalah $a + b|d(a^2 + b^2)$.

- Jika a, b memiliki paritas yang berbeda, maka $FPB(a + b, a^2 + b^2) = 1$, sehingga kita membutuhkan a + b|d, sehingga d = e(a + b). Jadi,

  $$x=e(a+b)a,\ y=e(a+b)b \text{ dan } \frac{x^2+y^2}{x+y}=e(a^2+b^2)$$

- Jika a, b keduanya ganjil maka $FPB(a + b, a^2 + b^2) = 2$, maka kita perlu $\frac{a+b}{2}\mid d$

  sehingga $d=\frac{1}{2}e(a+b)$. Jadi $x=\frac{1}{2}e(a+b)a$, $y=\frac{1}{2}e(a+b)b$ dan,

  $\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{1}{2}e(a^2+b^2)=e\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)$, berjenis sama $\frac{x^2+y^2}{x+y}=e(a'^2+b'^2)$

  seperti diatas, dengan $a'=\frac{a+b}{2}, b'=\frac{|a-b|}{2}$ dan a', b' dari paritas yang berbeda.

Hal ini menunjukkan bahwa bilangan indah n adalah bilangan yang dapat direpresentasikan sebagai $n = e(a^2 + b^2)$ untuk a, b koprima dan berparitas berbeda (dengan demikian berbeda). Konsekuensi langsungnya adalah hasil perkalian bilangan indah $n = e(a^2 + b^2)$ dengan bilangan lain m adalah indah, karena $mn = (me)(a^2 + b^2)$.

Jelas 1 jelek dan 2 jelek. Bilangan prima ganjil $p \equiv 1 \bmod 4$ indah, karena terdapat (uniknya) a, b (koprima dan berparitas berbeda) sehingga $p = a^2 + b^2$ dan kita dapat mengambil e=1. Terakhir, bilangan prima ganjil $p \equiv -1 \bmod 4$ jelek.

Kita sekarang dapat memperluas karakterisasi lebih jauh. Jika suatu bilangan n memiliki faktor prima $p \equiv 1 \bmod 4$, maka bilangan tersebut indah. Sebaliknya, bilangan indah $n = e(a^2 + b^2)$ memiliki faktor prima $a^2 + b^2$. Oleh karena itu, bilangan indah adalah bilangan yang memiliki faktor prima $p \equiv 1 \bmod 4$.

Dengan demikian, titik b) dari soal terpecahkan, dan titik a) mengikuti karena $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$; dengan demikian 53, $2 \cdot 53$, $19 \cdot 53$, $2 \cdot 19 \cdot 53$ indah, sedangkan $2 \cdot 19$, 19, 2, 1 jelek, dan kita memiliki banyak pilihan untuk representasi yang dibutuhkan.