PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMA

TAHUN 2012

1. **Penyelesaian :**
   Bukti:
   Misalkan d = FPB(a, b) dan k = KPK(a, b). Maka, kita dapat menulis a = dx dan b = dy untuk beberapa bilangan bulat x dan y yang relatif prima (yaitu, FPB(x, y) = 1).

   Sifat FPB dan KPK:
   - $d \cdot k = a \cdot b$
   - $k = \frac{ab}{d}$

   Substitusikan d dan k ke dalam n:
   - $n = d + k - a - b$
   - $n = d + \frac{ab}{d} - dx - dy$
   - $n = d + \frac{dx \cdot dy}{d} - dx - dy$
   - $n = d + dxy - dx - dy$
   - $n = d(1 + xy - x - y)$
   - $n = d(1 - x - y + xy)$
   - $n = d(1 - x)(1 - y)$

   Analisis n:
   - Karena x dan y adalah bilangan bulat, maka (1 - x) dan (1 - y) juga bilangan bulat.
   - n = d(1 - x)(1 - y) adalah bilangan bulat karena d, (1 - x), dan (1 - y) adalah bilangan bulat.

   Paritas n:
   - Perhatikan bahwa a dan b memiliki paritas yang sama dengan dx dan dy.
   - Jika a dan b keduanya genap, maka d genap dan x serta y keduanya ganjil. Maka, (1 – x) dan (1 – y) genap, sehingga n genap.
   - Jika a dan b keduanya ganjil, maka d ganjil dan x serta y keduanya ganjil. Maka, (1 – x) dan (1 – y) genap, sehingga n genap.
   - Jika a dan b memiliki paritas yang berbeda, maka d ganjil dan salah satu dari x atau y genap. Maka, salah satu dari (1 – x) atau (1 – y) ganjil dan yang lain genap, sehingga n genap.

   Non-negatifitas n:
   - Karena d = FPB(a, b), maka $d \leq a$ dan $d \leq b$.

- k = KPK(a, b) ≥ a dan k ≥ b.
- n = d + k - a - b = (k - a) + (d - b) ≥ 0 karena k ≥ a dan d ≤ b tidak mungkin terjadi secara bersamaan kecuali jika d = b dan k = a, atau a = b = d = k.

Jadi, n adalah bilangan bulat genap tak negatif.

Selain itu, metode brute force sederhana dapat digunakan:
Misalkan $l = [a, b], g = (a, b)$.
Bagian 1: n genap.
Kasus 1: a, b ganjil.
Maka l, g keduanya ganjil. Jadi $l + g - a - b \equiv 1 + 1 - 1 - 1 \equiv 0 \bmod 2$.
Kasus 2: Salah satu dari a, b ganjil, dan yang lainnya genap.
Maka l genap dan g ganjil. Jadi $l + g - a - b \equiv 0 + 1 - 1 - 0 \equiv 0 \bmod 2$.
Kasus 3: a, b genap.
Maka l, g keduanya genap. Jadi $l + g - a - b \equiv 0 + 0 - 0 - 0 \equiv 0 \bmod 2$.
Bagian 2: n non-negatif.
Perhatikan bahwa $g \leq a, b \leq l$ dan $gl = ab$. Jadi,
$an = al + ag - a^2 - ab$
$= -(gl - ag - al + a^2)$
$= -(g - a)(l - a)$
$= (a - g)(l - a)$
Karena $a - g \geq 0$, $l - a \geq 0$, maka $an \geq 0$. Karena $a \geq 0$, maka $n \geq 0$.
Jadi, kita sudah selesai.

2. **Penyesuaian :**

Bukti:

- Gunakan ketaksamaan AM-GM pada setiap factor di ruas kiri.
- Untuk factor $(1 + a_k)^{k+1}$, kita bisa menulisnya sebagai $(1 + a_k) \cdot (1 + a_k) \cdot \ldots \cdot (1 + a_k)$ sebanyak (k + 1) kali.
- Terapkan AM-GM untuk k + 1 suku: 1, a_k, a_k, …, a_k (sebanyak k kali a_k).
- Rata-rata aritmatika: $\frac{1+k\cdot a_k}{k+1}$
- Rata-rata geometric:
  $\sqrt[k+1]{1 \cdot (a_k)^k} = \sqrt[k+1]{(a_k)^k}$
- Menurut AM-GM, $\frac{1+k\cdot a_k}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{(a_k)^k}$
- Maka, $(1 + a_k)^{k+1} \geq ((k+1)\sqrt[k+1]{(a_k)^k})^{k+1} = (k+1)^{k+1}(a_k)^k$
- Namun, ketaksamaan yang diminta adalah $(1 + a_k)^{k+1} \geq (k+1)^{k+1} a_k$. Ini bisa dibuktikan dengan menerapkan AM-GM pada k suku 1 dan satu suku a_k (atau sebaliknya) yang diulang-ulang.
- Pendekatan yang lebih umum dan tepat adalah menggunakan ketaksamaan weighted AM-GM atau Jansen’s inequality pada fungsi konveks f(x) = In(x).

- Alternatifnya, gunakan ketaksamaan Bernoulli yang diperumum: Jika x > -1 dan n adalah bilangan asli, maka $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
- Untuk $(1 + a_k)^{k+1}$, kita bisa menggunakan ketaksamaan yang lebih spesifik atau menggunakan induksi matematika.

Kondisi kesamaan:

- Kesamaan dalam ketaksamaan AM-GM berlaku jika dan hanya jika semua suku yang terlibat sama.
- Dalam konteks ini, kesamaan $(1 + a_k)^{k+1} = (k + 1)^{k+1}a_k$ berlaku jika $1 = a_k$.
- Oleh karena itu, kesamaan pada ketaksamaan keseluruhan $(1 + a_1)^2(1 + a_2)^3 \dots (1 + a_n)^{n+1} \geq (n + 1)^{n+1}a_1a_2 \dots a_n$ akan berlaku jika $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

3. **Penyelesaian :**

Bukti:
Kita akan menggunakan sifat-sifat lingkaran luar dan garis bagi sudut dalam segitiga.
Langkah 1: Menentukan hubungan sudut
- ∠BAC = 2α
- ∠ABC = 2β
- ∠ACB = 2γ

Karena ∠BAC = 2α, maka garis bagi sudut ∠BAC membagi sudut menjadi dua sudut yang sama besar, yaitu α.

Langkah 2: Menentukan posisi titik P dan Q
- Titik P adalah perpotongan antara garis BO dan garis bagi ∠BAC.
- Titik Q adalah perpotongan antara garis CO dan garis bagi ∠BAC.

Langkah 3: Menentukan hubungan sudut di titik P dan Q
- ∠ABP = β
- ∠ACP = γ
- ∠BAP = α
- ∠CAQ = α

Langkah 4: Menentukan posisi titik R
- Titik R adalah perpotongan antara garis BQ dan CP.

Langkah 5: Membuktikan AR tegak lurus BC
- Kita akan menggunakan sifat garis bagi sudut dan sifat lingkaran luar.
- Perhatikan bahwa ∠BOC = 2 · ∠BAC = 4α karena ∠BOC adalah sudut pusat yang menghadap busur BC.
- ∠BPC = 180° - ∠PBC - ∠PCB = 180° - β - γ = 180° - (90° - α) = 90° + α.

- Dengan cara yang sama, ∠BQC = 90º + α.

Langkah 6: Menentukan hubungan sudut di titik R
- Perhatikan segiempat BQCR. Karena ∠BQC = ∠BPC = 90º + α, maka segiempat BQCR adalah segiempat siklik.
- ∠BRC = 180º - ∠BQC = 180º - (90º + α) = 90º - α.

Langkah 7: Membuktikan AR tegak lurus BC
- Perhatikan segitiga ABR dan ACR.
- ∠BAR = α dan ∠CAR = α
- ∠ABR = β dan ∠ACR = γ.
- Kita perlu menunjukkan bahwa ∠ARB = 90º + β dan ∠ARC = 90º + γ.
- Karena ∠BRC = 90º - α, maka ∠ARB = 180º - ∠BRC - ∠BAR = 180º - (90º - α) - α = 90º.
- Dengan demikian, AR tegak lurus BC.

Jadi, garis AR tegak lurus terhadap garis BC.

4. **Penyelesaian :**
Anggap titik-titik tersebut sebagai bilangan kompleks pada bidang datar, dilambangkan dengan huruf kecil a_i, b_i, p_i, p. Dari relasi $p_{i+1} = 2b_{i+1} - p_i$ di mana $p_0 = p$, kita peroleh $p_{2012} = 2(b_{2012} - b_{2011} + \dots + b_2 - b_1) + p$. Selanjutnya, kita tentukan jumlah maksimum nilai yang mungkin dari penjumlahan bergantian
$b_{2012} - b_{2011} + \dots + b_2 - b_1 = S - 2(b_{2011} + b_{2009} + \dots + b_1)$, di mana S = $b_1 + b_2 + \dots + b_{2012}$. Karena hanya ada $\binom{2012}{1006}$ kemungkinan pilihan $b_1, b_3, \dots, b_{2009}, b_{2011}$, maka $N \le \binom{2012}{1006}$. Batas atas tersebut dapat dicapai dengan menetapkan $a_k = 2^k$.

5. **Penyelesaian :**
Pertama, perhatikan bahwa jumlah angka 1 di setiap baris dan setiap kolom *P* dan *Q* adalah sama (sepele karena kesamaan jumlah baris/kolom). Oleh karena itu, dengan jumlah yang diberikan, kita dapat mengidentifikasi *P* dan *Q* secara unik hanya dengan mengkonstruksi setiap baris (masing-masing kolom) dari jumlah yang diberikan. Misalnya, jika kita diberi tahu bahwa jumlah baris adalah 3, 2, 0 dan jumlah kolom adalah 2, 2, 1, 0, kita memiliki contoh yang diberikan untuk *P* dan *Q*. Masih perlu dibuktikan bahwa jumlah baris (masing-masing kolom) yang diberikan membentuk barisan yang tidak meningkat.

Misalkan jumlah baris bukan barisan yang tidak meningkat. Maka terdapat suatu *i* sedemikian rupa sehingga jumlah angka-angka pada baris *i* lebih kecil daripada jumlah angka-angka pada baris $i + 1$. Misalkan jumlah angka-angka pada baris *i* adalah *j*. Maka entri *Q* pada baris *i* dan kolom $j + 1$ adalah 0, sedangkan pada baris $i + 1$ dan kolom $j + 1$ adalah 1. Namun, hal ini bertentangan dengan fakta bahwa kolom-kolom *Q* diurutkan dalam urutan yang tidak meningkat. Argumen serupa dapat diterapkan pada baris-baris *P*.

6. **Penyelesaian :**
Definisikan $g(x)$ sebagai solusi lain

Kita memiliki $g(x + y) = g(x) + g(y) > g(x)$ sehingga g meningkat secara ketat dan monoton, dari persamaan fungsional Cauchy

Kita simpulkan $g(x) = cx$, c adalah konstanta real positif apa pun; $f(x) = cx - \frac{1}{2012}$ tetapi jika kita mengambil $k > 0$ sehingga $ck < \frac{1}{2012}$

Kita memiliki kontradiksi $f(k) < 0$.

7. **Penyelesaian :**
Asumsikan $n = p^2 \cdot q$ dengan $p > 1$, $p, q \in N$.
Maka, kita pilih $x = (p - 1)^2 \, . \, q$ dan $y = q$, dan selesai.
Di sisi lain, jika persamaan yang diberikan memiliki solusi, maka untuk beberapa $x_0, y_0 \in N$, kita peroleh,
$x_0 + y_0 + 2\sqrt{x_0 . y_0} = n \Longrightarrow \sqrt{x_0 y_0} = \frac{n - x_0 - y_0}{2}$. Karena RHS rasional, kita harus memperoleh $x_0 . y_0 = k^2$ untuk beberapa $k \in N$.
jika FPB$(x_0, y_0) = h$, maka $x_0 = ha$, $y_0 = hb$ di mana $(a, b) = 1$
jadi, $h^2 \cdot ab = k^2$, maka ternyata ab merupakan kuadrat sempurna. Jadi, a dan b merupakan kuadrat sempurna.

8. **Penyelesaian :**
Kita dapat dengan mudah melihat bahwa BD bersinggungan dengan (ABP) (dari kondisi PoP yaitu $MB^2 = MD^2 = MP \cdot MA$). Sekarang saya menyatakan bahwa DR sejajar dengan CE. Lihat bahwa $\angle CDR = \angle CAE = \angle DCE$, yang membuktikan pernyataan kita. Misalkan $S = AN \cap DR$. Jelas S adalah titik tengah DR berdasarkan homotetik yang berpusat di A dan memetakan $\triangle DAR \rightarrow \triangle CAE$. Sekarang kita juga dapat melihat bahwa DR bersinggungan dengan ABD karena $\angle ADR = \angle AEC = \angle ABD$. Kondisi titik tengah di S akan memberikan kita fakta bahwa DR juga bersinggungan dengan (AQR).

Sekarang, kita tinggal melakukan pencarian sudut. Perhatikan bahwa
$\angle RQD = 180^o - (\angle QRD + \angle QDR) = 180^o - (\angle RAQ + \angle DAQ) = 180^o - \angle CAE = 180^o - \angle BAD = 180^o - \angle BQD \Longrightarrow \angle RQD + \angle BQD = 180^o \Longrightarrow$ B, Q, R kolinear. Demikian pula, $\angle DPB = 180^o - (\angle PBD + \angle PDB) = 180^o - \angle BAP + \angle DAP) = 180^o - \angle BAE = 180^o - \angle DAR = 180^o - \angle DPR \Longrightarrow \angle DPB + \angle DPR = 180^o \Longrightarrow$ B, P, R kolinear. Kesimpulannya, B, P, Q, R kolinear. Oleh karena itu, terbukti.