PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMA

TAHUN 2011

1. Penyelesaian :

1. Memahami Jaring-jaring Dadu:
   Jaring-jaring dadu menunjukkan angka-angka pada setiap sisi kubus. Ketika dilipat menjadi kubus, angka-angka pada sisi yang berlawanan akan berpasangan. Dari gambar, kita bisa melihat pasangan sisi berlawanan:
   - 1 berlawanan dengan 32
   - 2 berlawanan dengan 16
   - 6 berlawanan dengan 8
2. Menghitung Jumlah Angka pada Dadu:
   Jumlah total angka pada satu dadu adalah 1 + 2 + 6 + 8 + 16 + 32 = 65.
3. Menentukan Jumlah Angka yang Terlihat (S):
   Jumlah angka yang terlihat pada dadu tersebut adalah 65 – y.
4. Mencari n Terkecil:
   Ini berarti kita harus memilih sisi dengan nilai terbesar sebagai sisi bawah. Sisi terbesar pada dadu adalah 32. Jika 32 adalah sisi bawah, maka 1 adalah sisi yang berlawanan dan akan menjadi sisi atas. Jika 32 adalah sisi bawah, maka jumlah yang terlihat pada satu dadu adalah 65 – 32 = 33.
   Jadi, S = 2n x 33 = 66n.
   Kita ingin S > 2011, jadi 66n > 2011.
   $n > \frac{2011}{66}$
   n > 30.469
   Karena n adalah bilangan asli, maka n terkecil yang memenuhi adalah 31.

2. Penyelesaian :

Ganti 2011 dengan bilangan prima p ≡ 3 (mod 4). Kemudian dengan teleskopik kita peroleh

$$a_{p-1} \equiv \frac{\prod_{k=1}^{(p-1)/2} 2k}{\prod_{k=1}^{(p-1)/2}(2k-1)} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{(p-1)/2} 2k\right)^2}{(p-1)!} \pmod p$$

Namun, (p – 1)! ≡ -1 (mod p) berdasarkan teorema Wilson. Selain itu, 2k ≡ -(p – 2k) (mod p), jadi

$$\left(\prod_{k=1}^{(p-1)/2} 2k\right)^2 \equiv (-1)^{(p-1)/2}(p-1)! \equiv -(-1) = 1 \pmod p$$

lagi dengan teorema Wilson. Oleh karena itu
$a_{p-1} \equiv -1 \pmod p$, yaitu $p \mid a_{p-1} + 1$.
Untuk $p \equiv 1 \pmod 4$ kita akan memperoleh $p \mid a_{p-1} - 1$ dengan metode yang sama.

3. **Penyelesaian :**
Dari kondisi yang diberikan, kita memiliki

$$(a^{2011} - 1)(b^{2011} - 1)(c^{2011} - 1) < 0$$

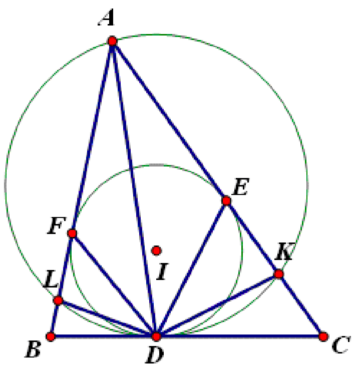
yang dapat ditulis ulang menjadi

$$(a-1)(a^{2010}+a^{2009}+\ldots+a+1)(b-1)(b^{2010}+b^{2009}+\ldots+b+1)(c-1)(c^{2010}+c^{2009}+\ldots+c+1) < 0$$

dan ini berlaku jika dan hanya jika

$$(a-1)(b-1)(c-1) < 0.$$

4. **Penyelesaian :**
Misalkan $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$, $\angle DAK = \theta$. Kita memiliki $\angle CDE = \alpha + \beta$, $\angle ADC = 2\alpha + 2\beta - \theta$, jadi $\angle ADE = \alpha + \beta - \theta$, dengan alasan yang sama $\angle ADF = \alpha + \gamma - (2\alpha - \theta) = \gamma + \theta - \alpha$, jadi $\angle LDK + \angle LAK = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^o$, D pada lingkaran luar $\triangle AKL$. Karena $\angle CDK = \angle ADC - 2\angle ADK = \theta = \angle DAK$, maka lingkaran luar $\triangle AKL$ bersinggungan dengan CD. Dengan demikian, lingkaran luar $\triangle AKL$ bersinggungan dengan lingkaran dalam $\triangle ABC$ di D.



5. **Penyelesaian :**
Misalkan $p = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{q(10)}}$. Maka, rumus $f(p) - p = \sum_{k=1}^{q}(2^{k-1}11^{q-k} - 10^{q-k})a_k$ dapat diperoleh dengan mudah. Jadi,

$$f(p) \equiv \sum_{k=1}^{q}(2^{k-1}2^{q-k} - 1)a_k = \sum_{k=1}^{q}(2^{q-1} - 1)a_k \pmod 9$$

Untuk $6 \mid q - 1$ kita memiliki $2^{q-1} - 1 \equiv 0 \pmod 9$ dengan persamaan Fermat, dan karena $6 \mid 2011 - 1 = 2010$ tesis ini terbukti.

Solusi ekuivalen dapat menggunakan fakta bahwa S(N) ≡ N (mod 9), dengan S(N) adalah jumlah digit dari N, sehingga perhitungannya menjadi lebih sederhana, karena kita hanya perlu memperhatikan jumlah digit dari angka-angka yang diperoleh. Faktanya, hal itu hanya memanfaatkan fakta bahwa $10^m \equiv 1 \pmod 9$ lebih awal (sehingga 11 digantikan oleh 2 dalam perhitungan).

6. **Penyelesaian :**
Untuk $1 \leq k < 2k \leq n$, kita memiliki $\frac{4k}{k} + \frac{k}{2k} + \frac{2k}{4k} = 5 \in \mathbb{N}$.
Untuk $1 \leq k < \ell \leq n$, $\ell \neq 2k$, kita memiliki $\frac{k}{2k} + \frac{2k}{k} + \frac{\ell}{2\ell} + \frac{2\ell}{\ell} = 5 \in \mathbb{N}$.

Jadi, untuk setiap $1 \leq k < n$, kita memiliki $n - k$ permutasi yang berbeda (gunakan salah satu permutasi di atas, dengan elemen lainnya tetap), berbeda dari permutasi identitas (yang jelas memenuhi), dan berbeda berpasangan untuk nilai k yang berbeda. Oleh karena itu jumlah total permutasi tersebut setidaknya $1 + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \geq n$.

7. **Penyelesaian :**
Pertama, ∠CAB komplementer dengan ∠CAE yang komplementer dengan ∠DEF, dan seterusnya, sehingga △ABC ~ △EFD. Jadi, pernyataan yang ingin kita buktikan ekuivalen dengan pembuktian bahwa $EF/AB \geq \sqrt{3}$.
Di bawah ini, kita akan merujuk sudut-sudut △ABC dengan huruf titik sudutnya (huruf kapital), sisi-sisinya (huruf kecil) dengan titik sudut di hadapannya (huruf kapital), dan jari-jari lingkaran △ABC dengan R, seperti biasa.

Kita punya $AE = AB \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = AB \cdot \frac{\sin B}{\sin C} \cdot \frac{1}{\sin A}$ dan $AF = AB \cdot \frac{\cos B}{\sin B}$

Menjumlahkan $EF = AB \cdot \left(\frac{\sin B}{\sin A \sin C} + \frac{\cos B}{\sin B}\right) = AB \cdot \frac{\sin^2 B + \cos B \sin A \sin C}{\sin A \sin B \sin C}$

jadi kita harus membuktikan bahwa
$$\frac{\sin^2 B + \cos B \sin A \sin C}{\sin A \sin B \sin C} \geq \sqrt{3}$$

Kalikan pembilang dan penyebutnya dengan $8R^2$.

Berdasarkan Hukum Sinus, $2R \sin B = b$ dan seterusnya, pembilangnya menjadi $2((2R \sin B)^2 + \cos B\,(2R \sin A)(2R \sin C)) = 2b^2 + 2ac \cos B$. Masukkan Hukum Kosinus $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ untuk melihat bahwa ini sama dengan $a^2 + b^2 + c^2$.

Penyebutnya menjadi 2ab sin C = 4S, dengan S adalah luas △ABC

Jadi, pecahannya sama dengan $\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$. Namun, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ (pertidaksamaan Weitzenbock), sehingga pecahannya setidaknya $\sqrt{3}$ sesuai yang diinginkan. Kesetaraan berlaku jika△ABC sama sisi.

8. Penyelesaian :

Minimumnya adalah 15 jalan. Sebagai contoh, beri label lima kota A_1 ke A_5 dan lima kota B_1 ke B_5, lalu hubungkan

(A_i dan A_{i+1}), (B_i dan B_{i+1}), dan (A_i dan B_i) untuk i = 1 ke 5, dengan mengambil indeks modulo 5.

Rute yang tidak melewati A_0 adalah $B_0B_1A_1A_2B_2B_3A_3A_4B_4B_0$, dan dari simetri konstruksinya, jelas bahwa ada rute untuk setiap kota.

Untuk membuktikan bahwa 15 jalan diperlukan, perhatikan bahwa 14 jalan atau kurang berarti 28 hubungan insidensi atau kurang, sehingga metode pigeonhole memberi kita sebuah kota (misalnya, X) dengan hanya dua jalan (menuju, misalnya, Y dan Z). Tetapi, rute apa pun yang melewati X juga harus melewati Y dan Z, jadi tidak akan ada rute yang melewati Y, suatu kontradiksi.