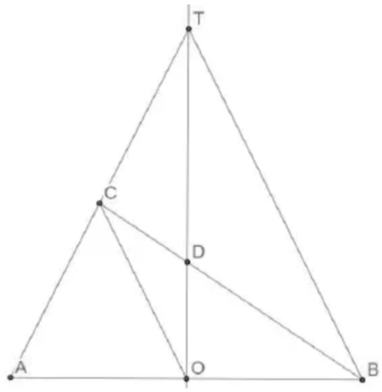
PEMBASAHAN
OSK MATEMATIKA SMP
TAHUN 2024

1. **Jawaban : D**
Misalkan peluang Ginting menang suatu pertandingan adalah x, maka peluang Ginting memenangkan suatu set adalah $\frac{8}{5}x$. Di saat yang sama maka peluang Jonathan memenangkan suatu set adalah $1-\frac{8}{5}x$. Sekarang, kita mau cari dulu berapakah nilai x nya. Tinjau bahwa alur memenangkan suatu pertandingan badminton adalah menang 2 kali langsung, kalah dulu lalu menang 2 kali, atau menang kalah menang. Maka peluang untuk Ginting bisa memenangkan pertandingan dapat dinyatakan sebagai,
$$\left(\frac{8}{5}x\right)^2+\left(1-\frac{8}{5}x\right)\left(\frac{8}{5}x\right)^2+\left(1-\frac{8}{5}x\right)\left(\frac{8}{5}x\right)^2=x$$
Akan ekuivalen dengan
$$\frac{1}{125}x(32x-25)(32x-5)=0$$
Dapat dicek x yang mungkin adalah $x = 0, \frac{25}{32}, \frac{5}{32}$. Karena nilai $\frac{8}{5}x<1$, maka x yang mungkin adalah $\frac{5}{32}$. Maka jika peluang ginting memenangkan pertandingan adalah $\frac{5}{32}$, maka peluang Jonathan untuk memenangkan pertandingan adalah $1-\frac{5}{32}=\frac{27}{32}$.
2. **Jawaban : A**
Tinjau bahwa dari persamaan kedua dan ketiga di atas, jika kita kalikan dapat kita peroleh
$$bc=cb(a+2)(a-2)$$
Karena b, c positif, maka $1=(a+2)(a-2) \Longrightarrow a^2=5$, disaat yang sama karena a positif juga, maka $a=\sqrt{5}$. Dimasukkan ke persamaan 1, dapat diperoleh $a = bc = c^2(\sqrt{5}+2)=\sqrt{5}$, didapat $c^2=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} \Longrightarrow 5-2\sqrt{5}$. Dengan cara yang sama, $b^2=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} \Longrightarrow 5+2\sqrt{5}$. Maka
$$a^2+b^2+c^2=5+5-2\sqrt{5}+5+2\sqrt{5}=15$$
3. **Jawaban : B**
Kita akan gambar kerucutnya dari tampak sampingnya



Karena T adalah tinggi kerucut, maka dapat kita punya TA = TB. Dari soal, kita punya AC = OC, sehingga didapat ∠TBA = ∠TAB = ∠CAO = ∠COA yang mengakibatkan CO||TB. Dari kesebangunan ΔATB kita bisa punya

$$\frac{AC}{CT} = \frac{AO}{OB} = 1 \Leftrightarrow OC = AC = CT = 11$$

Perhatikan bahwa O dan C masing-masing midpoint dari AB dan AT, sehingga kita bisa punya D merupakan titik berat segitiga ABT. Dari fakta garis berat, didapat BD = 2CD = 14. Sekarang tinjau bahwa TD garis bagi dari < CTB, sehingga didapat

$$TD^2 = CT \cdot BT - CD \cdot BD = 11 \cdot 22 - 7 \cdot 14 \Longrightarrow TD = 12$$

Di saat yang sama 2DO = TD. Maka OT = 18 Dengan Phytagoras didapat $OB^2 = \sqrt{BT^2 - OT^2} = \sqrt{22^2 - 18^2} = \sqrt{160}$ Sehingga volume kerucut akan sama saja dengan

$$1/_3 \times \pi \times OT \times OB^2 = 960\pi$$

Maka volume dari kerucutnya adalah 960π.

4. **Jawaban : C**

   Tinjau bahwa dengan definisi soal, maka kita mau cari berapa banyak nilai k yang mungkin sehingga $6^4 < 6^3k < 6^6$, yang mana akan ekuivalen dengan $6 < k < 216$ atau $7 \leq k \leq 215$ sebab k bulat. Maka banyak nilai k yang mungkin adalah 215 – 7 + 1 = 209.

5. **Jawaban : B**

   Tinjau bahwa luas [ADH] = [AED] – [EDH], [EDH] = $\frac{DH}{GD}$[GED]. Dari soal kita bisa punya bahwa [AED] = $\frac{1}{4}$[ABC]. Dengan menalaus di segitiga BFC dengan transversal AD, dapat diperoleh

$$\frac{BF}{AF} \cdot \frac{AJ}{JD} \cdot \frac{DC}{BC} = 1$$

   Didapat BF = 2AF, dengan kesebagunan antara segitiga BGD dan BFC, didapat

$$\frac{BG}{GF}=\frac{BD}{DC}=1$$

Maka BG = BF = GF, didapat [GED] = [BGE] = $\frac{BG}{AB}\cdot\frac{BE}{BC}\cdot[ABC]=\frac{[ABC]}{12}$, menalaus sekali lagi di segitiga ABE dengan transversal DG, didapat

$$\frac{BE}{DE}\cdot\frac{DH}{GD}\cdot\frac{GA}{BA}=1\Rightarrow\frac{DH}{GD}=\frac{3}{2}$$

Memanfaatkan ini

$$[DEG]=\frac{3}{5}\cdot[DEG]=\frac{1}{20}[ABC]$$

Maka

$$[ADH]=[AED]-[EDH]=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\right)[ABC]=\frac{1}{5}[ABC]$$

Maka didapat $m+n=1+5=6$

6. **Jawaban : B**

Tinjau bahwa bentuk soal dapat kita ubah menjadi

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)=18$$

Misalkan $x+\frac{1}{x}=a$, maka $a^3-3a=18$. Tinjau bahwa

$$a^3-3a-18=0$$
$$(a-3)(a^2+3a+6)=0$$
$$(a-3)\left(\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right)=0$$

Karena jelas yang bentuk 1 nya lebih dari 0, maka $a=x+\frac{1}{x}=3$. Tinjau bahwa $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=7$, disaat yang sama $x^4+\frac{1}{4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=47$. Perhatikan bahwa

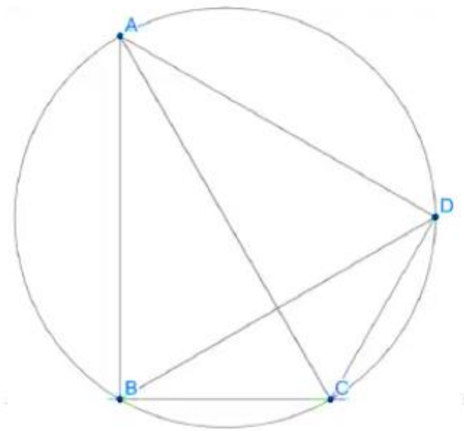
$$x^4\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=18x^4\Rightarrow x^7=18x^4-x\ \dots(1)$$
$$\frac{1}{x^4}\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=\frac{18}{x^4}\Rightarrow\frac{1}{x^7}=\frac{18}{x^4}-\frac{1}{x}\ \dots(2)$$

Menjumlahkan (1) dan (2), didapat

$$x^7+\frac{1}{x^7}=18\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$x^7+\frac{1}{x^7}=18\cdot 47-3=843$$

Maka $x^7+\frac{1}{x^7}+7=843+7=850$

7. **Jawaban : A**
Tinjau bahwa dari soal, nilai $xy = 98$ dan $x > y$. Maka haruslah $xy = 98 < x^2 \Rightarrow x \geq \sqrt{98}$. Perhatikan bahwa, karena Panjang sisi persegi adalah bilangan bulat, maka kemungkinan x hanyalah 49, artinya Panjang sisi persegi adalah 7. Disaat yang sama maka artinya luas persegi Panjang adalah 2, dan akan ada 2 kasus yaitu Ketika panjangnya 2 lalu lebarnya 1, atau panjangnya 1 lalu lebarnya 2.
   - Lebarnya 1, panjangnya 2. Maka kelilingnya akan sama dengan $AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + AH = 21 + AD - HE + GF + 2 + 2 = 21 + 7 + 2 + 2 = 32$ (TM) tidak ada di pilihan
   - Lebarnya 2, panjangnya 1. Maka kelilingnya akan sama dengan $AB + B + CD + DE + EF + FG + GH + AH = 21 + AD - HE + GF + 1 + 1 = 21 + 7 + 1 + 1 = 30$, ada di pilihan.
8. **Jawaban : D**
Perhatikan gambar berikut.



Konstruksi segiempat siklis $ABCD$ dengan $\angle ABC = \angle ADC = 90^o$, $\angle BAD = 60^o$, serta AC merupakan garis bagi sudut dalam $\angle BCD$ dan $\angle BAD^*$. Misalkan juga

$$AB = p, \quad BC = q, \quad CD = r, \quad AD = s$$

Sadari bahwa $\angle ACB = 60^o = 2\angle BAC$, sehingga kita punya

$$q = BC = \frac{AC}{2}, p = \frac{AC\sqrt{3}}{2}$$

Analog, kita juga punya

$$r = \frac{AC}{2}, s = \frac{AC\sqrt{3}}{2}$$

Untuk memperoleh, WLOG $BC = 1$ sehingga didapatkan

$$\frac{pq+rs}{ps+qr}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3+1}$$
$$\frac{pq+rs}{ps+qr}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

9. **Jawaban : D**

   Kita tahu bahwa jumlah n bilangan bulat positif pertama adalah $\frac{n(n+1)}{2}$. Lalu penjumlahan 4 bilangan bulat positif berurutan $4a+6$ dengan a bilangan bulat positif. Perhatikan bahwa
   $$\frac{n(n+1)}{2}=4a+6$$
   $$n(n+1)=8a+12$$
   $$n(n+1)\equiv 4 \pmod 8$$
   Sehingga didapatkan
   $$n\equiv 3,4 \pmod 8$$
   Kita tahu bahwa untuk $n = 3$ bukan bilangan **JUMPAT**. Misalkan $n = 8k + 3$ atau $n = 8k + 4$ untuk suatu k bilangan bulat nonnegative.
   - Untuk $n = 8k + 3$ ($k \geq 1$), kita punya
   $$8k+3<2024$$
   $$k\leq 252$$
   - Untuk $n = 8k + 4$, kita punya
   $$8k+4<2024$$
   $$k\leq 253$$

   Sehingga banyaknya bilangan **JUMPAT** adalah $252 + 253 = 505$.

10. **Jawaban : D**

    Dengan teorema vieta dapat kita peroleh
    $$r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot r_4=81$$
    $$r_1+r_2+r_3+r_4=-a$$
    $$r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_2r_3r_4+r_1r_3r_4=108$$
    $$r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4=54$$
    Karena di soal $r_1\times r_2\times r_3\times r_4=\left(\frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{4}\right)^4$, akibatnya $\left(-\frac{a}{4}\right)^4$.
    Maka haruslah $a=\pm 12$. Tinjau bahwa $(x-3)^4=x^4-12x^3+54x^2-108x+81$, jelas untuk a = -12 tidak memenuhi karena semua akar harus berbeda, maka haruslah $a = 12$.

11. **Jawaban : B**

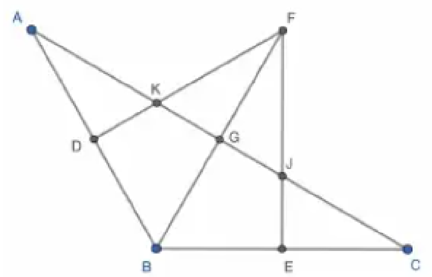
Misalkan $f(n)$ adalah banyaknya cara membentuk persegi Panjang n x 2 dengan persegi Panjang 1 x 2. Tinjau 2 kasus sebagai berikut.

- *Kasus* 1. Persegi 2 x 2 di paling ujung kanan diisi dengan 2 persegi Panjang 2 x 1.
  Untuk Kasus 1, terdapat $f(n-2)$ cara untuk mengisi ruang $(n-2)$ x 2 di sebelah kiri dan 1 cara untuk mengisi persegi 2 x 2 di paling ujung kanan dengan 2 x 1. Jadi untuk kasus ini, ada $\underline{f(n-2)}$
- *Kasus* 2. Persegi Panjang 1 x 2 di paling ujung kanan diisi dengan persegi Panjang 1 x 2. Untuk kasus 2, terdapat $f(n-1)$ cara untuk mengisi ruang $(n-1)$ x 2 disebelah kiri dan 1 cara untuk mengisi persegi Panjang 1 x 2 di paling ujung kanan dengan persegi Panjang 1 x 2.
  Jadi untuk kasus ini, ada $f(n-1)$

Sehingga dapat disimpulkan $f(n) = f(n-2) + f(n-1)$. Bisa dihitung bahwa $f(1) = 1$ dan $f(2) = 2$. Sehingga kita punya barisan 1,2,3,4,5,8,13,21,34,55,89, dimana $f(10) = 89$.

12. **Jawaban : B**

Perhatikan gambar berikut.



Misalkan garis BF dan AC berpotongan pada titik G. Mudah didapat bahwa segitiga ADK, CEJ, FDB dan FEB merupakan segitiga siku-siku yang membentuk perbandingan sudut 30°, 60°, 90°. Perhatikan bahwa $L_{ADK} + L_{CEJ} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ dan $L_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 120^o = 16\sqrt{3}$.

Sehingga, $L_{DBEJK} = L_{ABC} - (L_{ADK} + L_{CEJ}) = \frac{32\sqrt{3}}{3}$

Sekarang, $L_{FKJ} = L_{FDBE} - L_{DBEJK} = 2L_{FDB} - L_{DBEJK} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} - \frac{32\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

13. **Jawaban : C**

Tinjau bahwa, dari 21 titik, car akita bisa memiliki tiga titik adalah

$$\binom{21}{3}$$

Dari sisi lain, agar terbentuk segitiga, maka 3 titik yang terpilih tidak boleh dari 1 sisi yang sama, maka kita harus kurangkan dengan penumpukan di sisi *AB, BC, CD, DE* dan *AE*. Tinjau bahwa banyak kemungkinan cara milih 3 yang segaris adalah

$$\binom{8}{3}+\binom{6}{3}+\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}$$

Maka total banyak segitiga akan ekuivalen dengan

$$\binom{21}{3}-\left(\binom{8}{3}+\binom{6}{3}+\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}\right)=1239$$

14. **Jawaban : D**

Perhatikan bahwa, dari soal kita bisa peroleh 2 bilangan prima yang jelas membagi antara x dan y yaitu 2 dan 3, maka penjumlahan dari nilai anggota yang sudah ada adalah $2 + 3 = 5$. Maka dari factor prima yang membagi x dan y hanya boleh ada tambahannya 5. Tinjau bahwa karena y juga habis dibagi oleh 2, maka y dapat dinyatakan sebagai $6k = 2 \cdot 3 \cdot k$, artinya $x = 6k - 10 = 2(3k - 5)$.

Maka kita mau bahwa, pembagi diantara k dan $3k - 5$ harus ada 5 dan sisanya hanya 2 dan 3. Observasi bahwa nilai $x = 6k - 10 < 50 \Rightarrow k < 10$. Tinjau bahwa $\gcd(k, 3k - 5) = 1$ atau 5 jika $\gcd(k, 3k - 5) = 1$, tidak mungkin mungkin ada pembagi 5, maka haruslah $k = 5$, artinya $x = 20$, $y = 30$, didapat $x + y = 20 + 30 = 50$.

15. **Jawaban : D**

Bisa dilihat bahwa, satu-satunya susunan yang mungkin untuk hasil perkalian 105 hanyalah 3 x 5 x 7. Disaat yang sama penyusunan yang mungkin adalah 5 dikanan bawah, 7 ditengahnya dan 3 di kanan atas. Maka table kita sekarang menjadi:

		3	96
N		7	84
		5	45
24	144	105	

Dari data yang kita punya sekarang, tinjau bahwa 45 = 5 x 9 x 1, maka haruslah 9 di Tengah bawah dan 1 di kiri bawah, di saat yang sama artinya perkalian di kolom Tengah tersisa 16 atau 8 x 2, dan jelas 8 tidak mungkin di kolom baris Tengah artinya 2. Maka $N = \frac{84}{2\times 7} = 6$. Akibatnya semua tabel akan terisi dan akan jadi seperti di bawah ini

4	8	3	96
6	2	7	84
1	9	5	45
24	144	105	

16. **Jawaban : B**

Misalkan $x_1 < x_2 \dots < x_{10}$ adalah semua angka tersebut. Maka, berdasarkan soal x_3, x_5, x_6, x_8 ganjil dan sisanya genap.

Perhatikan bahwa mediannya adalah $2024 = \frac{x_5+x_6}{2}$, namun keduanya ganjil. Setelah itu, perhatikan bahwa kuartil ketiganya adalah x_8 dan kuartil pertamanya x_3, maka karena rata-rata bilangan ganjilnya 2022 dan ada 4 bilangan ganjil, diperoleh $x_3 + x_5 + x_6 + x_8 = 4 \cdot 2022 = 8088$. Dari nilai median, diperoleh: $x_3 + x_8 = 8088 - 4048 = 2040$. Tetapi oleh informasi jangkauan antarkuartil, $x_8 - x_3 = 14$, sehingga $x_8 = 2027$ dan $x_3 = 2013$.

Untuk bilangan genapnya, pilih aja yang paling besar setiap kali memungkinkan (urutan logis untuk memilih angka tersebut juga seperti uraian berikut): $x_2 = 2012, x_1 = 2010, x_4 = 2022, x_{10} = 2034$, sehingga $x_9 = 2032$.

Maka jumlah semua bilangan genap maksimalnya $2010 + 2012 + 2022 + 2026 + 2032 + 2034 = 12136$, sehingga rata-rata maksimumnya adalah $\frac{12136+8088}{10} = 2022,4$.

17. **Jawaban : B**

Misalkan bilangan 3 angka tersebut adalah $\overline{xyz}$, di mana $x, y, z \neq 0$ dan saling berbeda.

Kita akan tinjau per posisi x, y, z nya.

Ketika nilai x nya adalah	Kemungkinan (y, z)	Kemungkinan $\overline{xyz}$
9	(8,7)	56
8	(8,7)	56
7	(8,7)	56
...	...	...
1	(8,7)	56

Jumlah semua nilai yang ada di posisi ratusan adalah $100 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots 9) \cdot 56$

Ketika nilai y nya adalah	Kemungkinan (x, z)	Kemungkinan $\overline{xyz}$
9	(8,7)	56
8	(8,7)	56
7	(8,7)	56
...	...	...
1	(8,7)	56

Penjumlahan semua nilai yang mungkin untuk posisi puluhan adalah $10 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 9) \cdot 56$

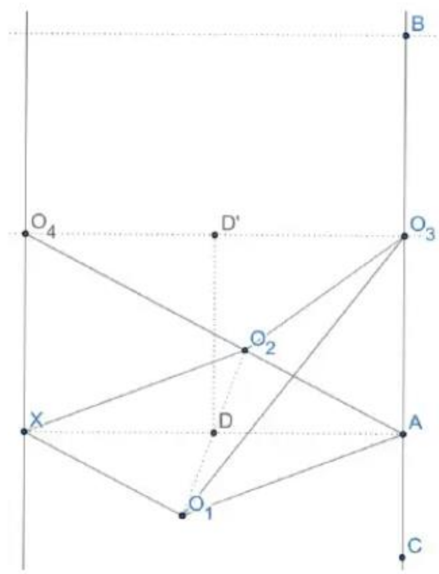
Ketika nilai z nya adalah	Kemungkinan (x, y)	Kemungkinan $\overline{xyz}$
9	(8,7)	56
8	(8,7)	56
7	(8,7)	56
...	...	...
1	(8,7)	56

Penjumlahan untuk semua nilai satuan yang mungkin adalah $(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) \cdot 56$. Maka jumlah semua nilai $\overline{xyz}$ dapat diperoleh dengan menjumlahkan jumlah penjumlahan per posisi x, y dan z yaitu

$$45 \times 56 \times 111 = 279720$$

18. **Jawaban :**

Perhatikan gambar berikut.



Misalkan:

- O_1 dan O_2 adalah titik pusat dua bola yang ada di dasar silinder.

- O_3 dan O_4 adalah titik pusat dua bola yang ada di atasnya agar air minimal. Maka bola dengan pusat O_3 dan O_4 menyinggung bola dengan pusat O_1 dan O_2.
- *C* adalah titik proyeksi O_3 terhadap dasar silinder
- *B* adalah titik proyeksi O_3 terhadap permukaan air
- *A* titik dimana ketinggiannya sama dengan O_1 terhadap dasar silinder
- *D'* adalah titik Tengah O_3O_4
- *D* adalah titik proyeksi *D*' terhadap O_1O_2
- *X* adalah refleksi titik *D* terhadap titik *A*

Berdasarkan teorema Phytagoras, didapatkan

$$AO_1 = \sqrt{(DO_1)^2 + (DA)^2} = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}$$

$$AO_3 = \sqrt{(O_1O_3)^2 - (AO_1)^2} = \sqrt{22^2 - (12\sqrt{2})^2} = 14$$

Sehingga ketinggian air adalah

$$BC = BO_3 + AO_3 + AC = 11 + 14 + 11 = 36$$

Sehingga volume minimum air adalah

$$\pi \times 23^2 \times 36 - 4 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 11^3 = \frac{35836\pi}{3}$$

19. **Jawaban : D**

Misalkan keempat bilangan tersebut adalah *a, b, c, d* dimana $a \leq b \leq c \leq d$. Definisikan $\bar{x}, \emptyset, \Phi$ berturut-turut rata-rata, median, dan modus dari keempat bilangan tersebut. Akan dibagi menjadi beberapa kasus

KASUS 1. *a,b,c,d* bernilai sama semua. Maka diperoleh $\bar{x} = \emptyset$ yang tidak mungkin

KASUS 2. Terdapat tepat 3 bilangan yang sama dari *a,b,c,d* maka $\emptyset = \Phi = k$ dimana *k* merupakan bilangan yang sama. Maka tidak mungkin

KASUS 3. Terdapat tepat 2 bilangan yang sama dari *a,b,c,d*. Akan dibagi menjadi beberapa subkasus berdasarkan bilangan mana yang sama. Perhatikan bilangan yang sama harus berurutan (*a,b, b,c,* dan *c,d*) karena apabila tidak, akan diperoleh 3 bilangan yang sama

Subkasus 3.1. Jika $a = b$

Maka bilangan-bilangannya adalah *a,a,c,d* dimana $a < c < d$. Dapat diperoleh $\bar{x} = \frac{2a+c+d}{4}, \emptyset = \frac{a+c}{2}$ dan $\Phi = a$. Perhatikan bahwa karena $a < c < d \Rightarrow a < \frac{a+c}{2} < \frac{2a+c+d}{4}$, sehingga $a + 2 = \frac{a+c}{2} + 1 < \frac{2a+c+d}{4} \Rightarrow 4a + 8 = 2a + 2c + 4 = 2a + c + d$. Persamaan tersebut akan ekuivalen dengan $c = a + 2$ dan $d = c + 4$, dapat diperoleh $(a,b,c,d) = (a,a,a,+2, a+6)$, sehingga nilai terkecil dan terbesar jumlah berturut-turut adalah 12 dan 24.

Subkasus 3.2. Jika $b = c$

Maka bilangan-bilangannya adalah a,b,b,d dimana $a < b < d$. Dapat diperoleh $\bar{x} = \frac{a+2b+d}{4}, \emptyset = b$ dan $\Phi = b$, maka tidak mungkin

Subkasus 3.3. Jika $c = d$

Maka bilangan-bilangannya adalah a,b,c,c dimana $a < b < c$. Dapat diperoleh $\bar{x} = \frac{a+b+2c}{4}, \emptyset = \frac{b+c}{2}$ dan $\Phi = c$. Perhatikan bahwa $a < b < c \Rightarrow \frac{a+b+2c}{4} < \frac{b+c}{2} < c$, sehingga $\frac{a+b+2c}{4} + 2 = \frac{b+c}{2} + 1 = c \Leftrightarrow a + b + 2c + 8 = 2b + 2c + 4 = 4c$. Persamaan tersebut akan ekuivalen dengan $a + 4 = b$, $b + 2 = c$. Dapat diperoleh $(a,b,c,d) = (a,\ a + 4, a + 6, a + 6)$, sehingga nilai terbesar dan terkecil jumlah berturut-turut adalah 20 dan 32.

KASUS 4. Tidak terdapat a,b,c,d yang bernilai sama. Maka $\bar{x} = \frac{a+b+c+d}{4}, \emptyset = \frac{b+c}{2}$ dan $\Phi = d$. Karena $\max(\bar{x}, \emptyset, \Phi) = \Phi$, akan dibagi menjadi 2 subkasus.

Subkasus 4.1. $\bar{x} < \Phi < \emptyset$

Dapat diperoleh $\frac{a+b+c+d}{4} + 2 = \frac{b+c}{2} + 1 = d \Leftrightarrow a + b + c + d + 8 = 2b + 2c + 4 = 4d$. Ingat bahwa $d > c > b$, maka $d \geq c + 1$ dan $d \geq b + 2$. Diperoleh $2b + 2c + 4 = 4d > (2c + 2) + (2b + 4) \Leftrightarrow 4 > 6$, kontradiksi.

Subkasus 4.2. $\bar{x} < \emptyset < \Phi$

Dapat diperoleh $\frac{a+b+c+d}{4} + 2 = d + 1 = \frac{b+c}{2} \Leftrightarrow a + b + c + d + 8 = 4d + 4 = 2b + 2c$. Ingat bahwa $d > c > b$, maka $d \geq c + 1$ dan $d \geq b + 2$. Diperoleh $2b + 2c = 4d + 4 > (2c + 2) + (2b + 4) + 2 \Leftrightarrow 0 > 8$, kontradiksi.

Dari semua kasus yang diatas, dapat diperoleh jumlah terkecil dan terbesar dari keempat bilangan tersebut berturut-turut adalah 12 dan 32, sehingga jumlahnya adalah $12 + 32 = 44$.

20. **Jawaban : A**

Karena semua bilangan tersebut bilangan asli, bilangan 24 pasti terletak pada suatu lingkaran. Maka pilihan (C) dan (D) mustahil (sebab $44 = 24 + 20$ dan $42 = 24 + 18$ saja, tidak ad acara lain).

Andai pilihan (B) benar, maka dua angka yang diujung adalah 18 dan 20. Namun, hanya ada 24 (1 bilangan) yang lebih besar dari dua-duanya, serta keduanya memengaruhi nilai pada lingkaran yang berbeda. Ini mustahil juga.

Jadi, pilihan (A) satu-satunya yang mungkin, salah satu cara pengisiannya sebagai berikut:

$$20 \quad (24) \quad 4 \quad (9) \quad 5 \quad (11) \quad 6 \quad (18) \quad 12$$

Catatan. Kita tidka bisa mencapai bilangan yang lebih besar dari 32, tetapi lebih kecil dari 38; tidak ada 2 bilangan yang keduanya bukan 24; yang jumlahnya di antara 32 dengan 38. Jadi, Solusi di atas juga sudah menunjukkan bahwa 32 maksimal.

21. **Jawaban : B**

Jelas bahwa $\overline{stu} < 1000$ dan $\overline{vwxyz} \geq 10000$. Maka $\overline{rstu} > 9000$ yang berakibat $r = 9$. Lalu, jelas bahwa $\overline{rstu} < 10000$ dan $\overline{stu} < 1000$. Maka $\overline{vwxyz} < 11000$ yang berakibat $v = 1$ dan $w = 0$.

Sehingga, kita punya $\overline{9stu} + \overline{stu} = \overline{10xyz}$. Perhatikan bahwa karena 1,0,9 sudah digunakan, $\overline{xyz} \geq 234$, atau $\overline{stu} \geq 617$. Perhatikan juga bahwa z harus genap. Sehingga, kita punya 3 kasus:

- $s = 6$, maka $u \neq 8$ sebab $2u \equiv z \equiv 6 \pmod{10}$. Selain itu, $x \leq 3$.
  Jika $x = 2$, berarti terpaksa $u = 4$ sehingga $z = 8$. Diperoleh $9604 + 604 + 20t = 10208 + 10y \Leftrightarrow y = 2t$. Tapi kita kehabisan bilangan genap (digit yang sesuai untuk t tidak bisa ditemukan). Jika $x = 3$, berarti $u = 2$ atau $u = 4$.
  Kalau $u = 2$, berarti $z = 4$. $9602 + 602 + 20t = 10304 + 10y \Leftrightarrow 20t = 100 + 10y$ yang disederhanakan menjadi $2t = y + 10$. Nilai y harus genap maka $y = 8$, tetapi $t = 9$, sudah digunakan.
  Kalau $u = 4$, berarti $z = 8$, maka $10208 + 20t = 10308 + 10y \Leftrightarrow 2t = y + 10$. Maka $y = 2$, tetapi $t = 6$, sudah digunakan. Tidak ada Solusi di kasus ini.
- $s = 7$, kita tahu kalau z harus genap dan bilangan yang tersisa 2,3,4,5,6,8
  Jika $z = 2$, maka $u = 6$. Perhatikan bahwa y ganjil, karena memiliki digit dari $2t + 1$. Karena bilangan ganjil tersisa 3 dan 5, maka tidak ada Solusi untuk $z = 2$.
  Jika $z = 4$, maka $u = 2$. Perhatikan bahwa y genap, karena memiliki digit dari $2t$. Maka $y = 6$, $t = 8$, dan $x = 5$. Sehingga hanya 3 yang tidak terpakai.
- $s = 8$, Untuk kasus ini bisa dicoba konfigurasi secara mandiri.

Maka jawaban yang tepat adalah 3.

22. **Jawaban : B**

Tinjau bahwa

$$2024 = 2^3 \times 11 \times 23$$

Dapat dilihat bahwa 2024 memiliki (3+1) × (1+1) × (1+1) = 4 × 2 × 2 = 16 faktor positif. Dapat disadari juga bahwa factor yang kurang dari $\sqrt{2024}$ adalah {1, 2, 4, 8, 11, 22, 44}. Ada 8 faktor, maka yang lebih dari $\sqrt{2024}$ ada 16 – 8 = 8 faktor.

23. **Jawaban : A**

Pada soal ini mencari P maksimum dapat diartikan sebagai mencari nilai maksimum dari

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}$$

Akan dibuktikan nilai $P = \sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}=\sqrt{6}$

Menurut ketaksamaan

$$QM \geq AM$$

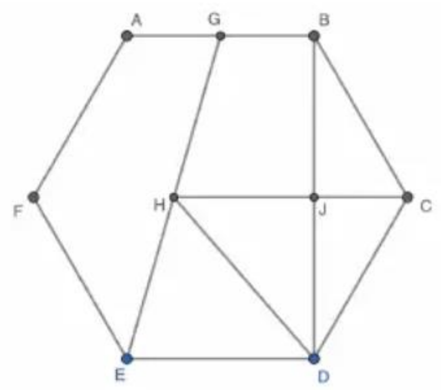
$$\sqrt{\frac{x-3+6-x}{2}} \geq \frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}}{2}$$

$$2\sqrt{\frac{9}{2}}=\sqrt{6} \geq \sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}$$

P maksimum = $\sqrt{6}$ (Terbukti). Dapat di cek bahwa kesamaan dapat tercapai Ketika $x - 3 = 6 - x \Rightarrow x = \frac{9}{2}$

24. **Jawaban : B**

Perhatikan gambar berikut ini.



Untuk memudahkan perhitungan, akan dimisalkan Panjang sisi dari segienam beraturan tersebut adalah $2x$. Definisikan titik J sebagai perpotongan garis BD dengan garis HC. Dari $\triangle BJC$, didapat bahwa $JC = x$ dan $BJ = JD = x\sqrt{3}$. Lalu, dari trapesium siku-siku $GBDE$, karena H dan J merupakan titik Tengah GE dan BD berturut-turut, maka $HJ = \frac{GB+DE}{2} = \frac{3x}{2}$. Sehingga,

$$\frac{L_{CDH}}{L_{ABCDEF}} = \frac{\frac{\left(\frac{3x}{2} + x\right) \cdot x\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2} \cdot 4x^2\sqrt{3}} = \frac{5}{24}$$

25. **Jawaban : B**

Misalkan $a = \overline{xyx}$. Sehingga, a dapat dinyatakan sebagai $a = 101x + 10y$. Maka, $b = 2a + 1 = 202x + 20y + 1$ dan $c = 2b + 1 = 404x + 40y + 3$. Sekarang, akan ditinjau batas nilai x dari c. Karena c merupakan bilangan ratusan, maka $404x + 40y + 3 \leq 999$. Lalu, karena x merupakan bilangan asli, maka nilai x yang mungkin hanyalah 1 dan 2.

- Kasus 1 : $x = 1$

  Pada kasus ini, didapat bahwa $c = 407 + 40y$. Lalu, dengan meninjau nilai modulo 10 dari c, didapat bahwa digit satuan dan ratusan dari c adalah 7. Maka, didapat bahwa

  $$700 \leq 407 + 40y \leq 799 \Longrightarrow 7 < y < 10$$

  Sehingga, nilai y yang mungkin hanyalah 8 dan 9.
  - Saat $y = 8$, maka $a = 181$, $b = 363$, dan $c = 727$ dan memenuhi soal.
  - Saat $y = 9$, maka $a = 191$, $b = 383$, dan $c = 767$ dan memenuhi soal.
- Kasus 2 : $x = 2$

  Pada kasus ini, didapat bahwa $c = 811 + 40y$. Namun, karena $c \equiv 1 \pmod{10}$, maka digit ratusan dari c haruslah 1 yang jelas tidak mungkin.

Dari kedua kasus tersebut, didapat bahwa terdapat 2 tripel (a,b,c) yang memenuhi.