PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMP

TAHUN 2019

1. **Jawaban : 2**

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ -x & x+4 \end{vmatrix} = 2x$$

$$(x-2)(x+4)-(-2)(-x) = 2x$$

$$(x^2+2x-8)-2x = 2x$$

$$x^2-2x-8 = 0$$

Jumlah nilai x yang memenuhi persamaan di atas adalah

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$$

Di mana a,b berturut-turut adalah koefisien x^2 dan x.

2. **Jawaban : 156**

Misalkan $A = \overline{ab}, B = \overline{cd}$ dan $C = \overline{efg}$, maka persamaan $A + B = C$ dapat ditulis sebagai

$$\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{efg} \leq 86 + 75 = 161$$

Dalam hal ini, kita mendapatkan bahwa jumlah bilangan dua digit terbesar yang dapat diperoleh adalah 161.

Karena $C = \overline{efg}$ merupakan bilangan tiga digit, maka jelas bahwa $e = 1$. Dengan demikian, sekarang dapat kita tulis

$$(10a+b)+(10c+d) = 100+10f+g$$

$$10(a+c-f)+(b+d-g) = 100$$

Kita peroleh bahwa $a+c-f$ harus bernilai 10, sedangkan $b+d-g$ harus bernilai 0.

Untuk itu, $(a,c,f) = (8,7,5)$ atau $(a,c,f) = (7,8,5)$ dan $(b,d,g) = (4,2,6)$ atau $(b,d,g) = (2,4,6)$.

Dari sini, kita tahu bahwa $f = 5$ dan $g = 6$. Dengan demikian,

$$C = \overline{efg} = 156$$

3. **Jawaban : 60**

Karena volume balok: $V = abc = 240$, maka a, b, c diketahui merupakan factor dari 240. Dengan memperhatikan syarat $a+b+c = 19$ dan $a > b > c > 3$, kita peroleh $a = 8, b = 6$, dan $c = 5$. Luas semua sisi balok yang berukuran b dan c adalah

$$L = 2 \times (b \times c) = 2 \times (6 \times 5) = 60 \text{ cm}^2$$

4. **Jawaban : 0**

Kuadrat dari setiap bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan nol. Secara matematis, ditulis $x^2 \geq 0$ dan akibatnya $x^2 + y^2 \geq 0$.

Nilai minimum x^2+y^2 terjadi saat $(x,y) = (0,0)$. Substitusikan titik ini ke persamaan $(4-x)^2+(y-3)^2 = 25$, diperoleh

$$(4-0)^2+(0-3)^2 = 4^2+(-3)^2 = 25 \qquad \text{(terpenuhi)}$$

Jadi, nilai $c = d = 0$, sehingga

$$ac + bd = a(0) + b(0) = 0$$

5. **Jawaban : 14**

   Dengan menerapkan Binomial Newton dan memperhatikan koefisien setiap suku: 1,4,6,4, yang merupakan bagian dari bilangan pada segitiga pascal, maka dapat kita faktorkan rumus fungsi f seperti berikut.

   $$\begin{aligned} f(x) &= (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + 9 \\ &= (x+1)^4 + 9 \end{aligned}$$

   Substitusikan $x = \sqrt[4]{5} - 1$, diperoleh

   $$\begin{aligned} f\left(\sqrt[4]{5} - 1\right) &= (\sqrt[4]{5} - 1 + 1)^4 + 9 \\ &= \left(\sqrt[4]{5}\right)^4 + 9 \\ &= 5 + 9 = 14 \end{aligned}$$

   Jadi, nilai dari $f(\sqrt[4]{5} - 1) = 14$

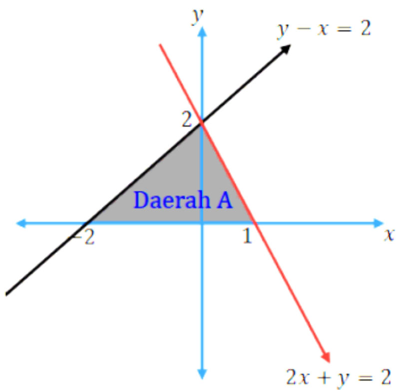
6. **Jawaban : $\frac{1}{2}$**

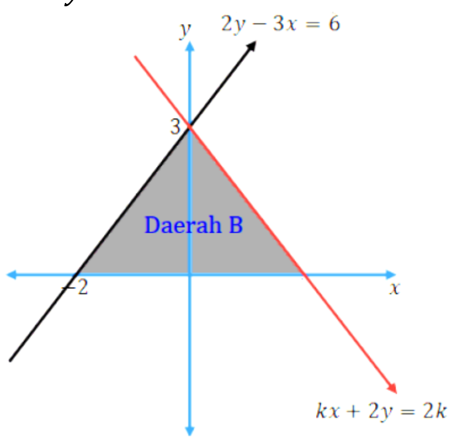
   Dari data pada soal, diketahui bahwa mesin A, B dan C berturut-turut dapat menyelesaikan $\frac{1}{30}$ bagian/menit, $\frac{1}{36}$ bagian/menit, dan $\frac{1}{45}$ bagian/menit. Dengan demikian, bila dikerjakan bersama-sama oleh ketiga mesin dalam waktu enam menit, maka bagian pekerjaan yang terselesaikan adalah

   $$\begin{aligned} 6 \times \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45}\right) &= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15} \\ &= \frac{5+6+4}{30} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

7. **Jawaban : 3**

   Gambarkan grafik dari daerah A dan B. Dalam hal ini, untuk himpunan A, kita menggambar garis $y - x = 2$ dan $2x + y = 2$ pada system koordinat Kartesius, sedangkan untuk himpunan B, kita hanya menggambar garis $2y - 3x = 6$.





   Perhatikan bahwa daerah A membentuk sebuah segitiga yang luasnya adalah

   $$L_A = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

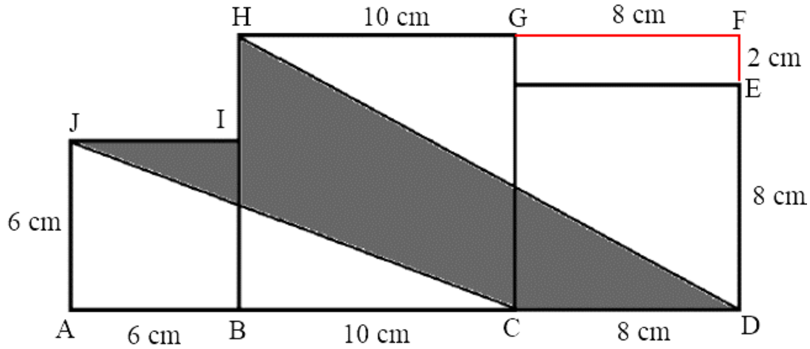
Dengan demikian, luas daerah B haruslah $L_B = 2 \times L_A = 2 \times 3 = 6$.
Misalkan $2y - 3x = 6$ dan $kx + 2y = 2k$ berpotongan di (0,3), sehingga garis $kx + 2y = 2k$ melalui (0,3). Untuk itu, diperoleh

$$k(0) + 2(3) = 2k \Leftrightarrow k = 3$$

Ini sesuai bahwa luas daerah B adalah $L_B = \frac{4\times 3}{2} = 6$

Jadi, nilai $k = 3$.

8. **Jawaban : 78**
Perhatikan sketsa gambar berikut.

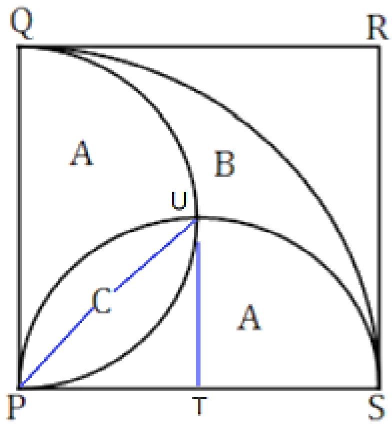


Luas daerah yang diarsir sama dengan jumlah luas persegi $ABJI, BCGH$, dan persegi Panjang $CDFG$ dikurangi luas segitiga siku-siku JAC dan DFH.

$$\begin{aligned} L_{arsir} &= L_{ABJI} + L_{BCGH} + L_{CDFG} - L_{JAC} - L_{DFH} \\ &= 6^2 + 10^2 + (8 \times 10) - \frac{6\times 16}{2} - \frac{18\times 10}{2} \\ &= 36 + 100 + 80 - 48 - 90 = 78 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah 78 cm^2.

9. **Jawaban : 7 : 2**



Perhatikan gambar di atas!
Untuk memudahkan perhitungan, kita ambil m = 14
Luas ¼ lingkaran PUT = ¼ x 22/7 x 7^2 = 38,5
Luas daerah segitiga PUT = ½ x 7 x 7 = 24,5
Luas Tembereng PU = 38,5 – 24,5 = 14

Luas daerah C = 2 x 14 = 28
Luas setengah lingkaran PUS = ½ x 22/7 x 7^2 = 77
Luas daerah A = 77 – 28 = 49
Luas 2A = 2 x 49 = 98
Luas seperempat lingkran QS = ¼ x 22/7 x 14^2 = 154
Luas B = 154 – 98 – 28 = 28

$$\frac{2A}{B} = \frac{98}{28} = 7 : 2$$

10. **Jawaban : $\frac{7}{20}$**

Menggunakan cara Analitik.
Persoalan ini termasuk persoalan peluang bersyarat, sehingga harus dibagi menjadi 5 kasus bergantung dari pukul berapa lampu tersebut menyala.

(Kasus 1) Misalkan A adalah kejadian lampu menyala pukul 19.00 dan padam pada rentang waktu yang ditentukan sehingga lampu menyala selama antara 9 dan 10 jam.
Peluang lampu menyala pukul 19.00 dari lima pilihan waktu yang ada adalah $\frac{1}{5}$.
Agar lampu menyala selama antara 9 dan 10 jam, maka lampu harus padam antara pukul 04.00 dan 05.00 (dari yang terjadwal padam pada pukul 04.00 sampai 06.00), sehingga peluang untuk kasus ini adalah

$$P(A) = \frac{1}{5} \times \frac{5-4}{6-4} = \frac{1}{10}$$

(Kasus 2) Misalkan B adalah kejadian lampu menyala pukul 19.30 dan padam pada rentang waktu yang ditentukan sehingga lampu menyala selama antara 9 dan 10 jam.
Peluang lampu menyala pukul 19.30 dari lima pilihan waktu yang ada adalah $\frac{1}{5}$.
Agar lampu menyala selama antara 9 dan 10 jam, maka lampu harus padam antara pukul 04.30 dan 05.30 (dari yang terjadwal padam pada pukul 04.00 sampai 06.00), sehingga peluang untuk kasus ini adalah

$$P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{5{,}5-4{,}5}{6-4} = \frac{1}{10}$$

(Kasus 3) Misalkan C adalah kejadian lampu menyala pukul 20.00 dan padam pada rentang waktu yang ditentukan sehingga lampu menyala selama antara 9 dan 10 jam.
Peluang lampu menyala pukul 20.00 dari lima pilihan waktu yang ada adalah $\frac{1}{5}$.
Agar lampu menyala selama antara 9 dan 10 jam, maka lampu harus padam antara pukul 05.00 dan 06.00 (dari yang terjadwal padam pada pukul 04.00 sampai 06.00), sehingga peluang untuk kasus ini adalah

$$P(C) = \frac{1}{5} \times \frac{6-5}{6-4} = \frac{1}{10}$$

(Kasus 4) Misalkan D adalah kejadian lampu menyala pukul 20.30 dan padam pada rentang waktu yang ditentukan sehingga lampu menyala selama antara 9 dan 10 jam.
Peluang lampu menyala pukul 20.30 dari lima pilihan waktu yang ada adalah $\frac{1}{5}$.

Agar lampu menyala selama antara 9 dan 10 jam, maka lampu harus padam antara pukul 05.30 dan 06.00 (dari yang terjadwal padam pada pukul 04.00 sampai 06.00, tidak boleh melebihi jam 06.00), sehingga peluang untuk kasus ini adalah

$$P(D) = \frac{1}{5} \times \frac{6-5,5}{6-4} = \frac{1}{20}$$

(Kasus 5) Misalkan E adalah kejadian lampu menyala pukul 21.00 dan padam pada rentang waktu yang ditentukan sehingga lampu menyala selama antara 9 dan 10 jam.
Peluang lampu menyala pukul 21.00 dari lima pilihan waktu yang ada adalah $\frac{1}{5}$.
Agar lampu menyala selama antara 9 dan 10 jam, maka lampu harus padam pada pukul lebih dari 06.00 (dari yang terjadwal padam pada pukul 04.00 sampai 06.00), sehingga hal ini tak mungkin terjadi. Jadi,

$$P(E) = \frac{1}{5} \times 0 = 0$$

Dengan demikian, peluang totalnya adalah
$P(A \cup B \cup C \cup D \cup E)$
$= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E)$
$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + 0 = \frac{7}{20}$

11. **Jawaban : 3**
Diketahui B(n) sebagai bilangan bulat terkecil yang habis dibagi oleh semua bilangan bulat 1, 2, … , n. Dengan kata lain,
B(n) = KPK(1, 2, …, n)
Agar B(n) = B(n + 2) berlaku, maka n + 1 maupun n + 2 tidak boleh bilangan prima.
Adapun nilai n yang membuat n + 1 atau n + 2 prima adalah

1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,15,16,17,18,21,22

*Untuk n = 7, diperoleh
B(7) = KPK(1,2, …, 7)
B(9) = KPK(1,2, …,7, (2 x 4), (3^2))
Karena 9 = 3^2 (berbentuk bilangan kuadrat), maka B(7) ≠ B(9).
*Untuk n = 13, diperoleh
B(13) = KPK(1,2, …, 13)
B(15) = KPK(1,2, …, 13, (2 x 7), (3 x 5))
Karena 14 dan 15 dapat dinyatakan dalam faktorisasi prima yang semuanya berbeda, maka B(13) = B(15).
*Untuk n = 14, diperoleh
B(14) = KPK(1,2, …, 14)
B(16) = KPK(1,2, …, 13, (3 x 5), (2^4))
Karena 16 = 2^4 dan merupakan pangkat tertinggi untuk basis 2, maka B(14) ≠ B(16).
*Untuk n = 19, diperoleh
B(19) = KPK(1,2, …, 19)
B(21) = KPK(1,2, …, 19, (2^2 x 5), (3 x 7))

Karena 21 = 22 dapat dinyatakan dalam faktorisasi prima yang semuanya berbeda dan sudah muncul untuk faktorisasi bilangan sebelumnya, maka B(19) ≠ B(21).
*Untuk n = 20, diperoleh
B(20) = KPK(1,2, …, 20)
B(22) = KPK(1,2, …, 20, (3 x 7),(2 x 11))
Karena 21 dan 22 dapat dinyatakan dalam faktorisasi prima yang semuanya berbeda, maka B(20) = B(22).
*Untuk n = 23, diperoleh
B(23) = KPK(1,2, …, 23)
B(25) = KPK(1,2, …, 23, (2^3 x 3), (5^2))
Karena 25 = 5^2 (berbentuk bilangan kuadrat), maka B(23) ≠ B(25).
*Untuk n = 24, diperoleh
B(24) = KPK(1,2, …, 24)
B(26) = KPK(1,2, …, 24, (5^2), (2 x 13))
Karena 25 = 5^2 (berbentuk bilangan kuadrat), maka B(24) ≠ B(26).
*Untuk n = 25, diperoleh
B(25) = KPK(1,2, …, 25)
B(27) = KPK(1,2, …, 25, (2 x 13), (3^3))
Karena 27 = 3^3 dan merupakan pangkat tertinggi untuk basis 3, maka B(25) ≠ B(27).
Jadi, hanya ada 3 nilai n yang mungkin.

12. **Jawaban : 2020**
Jika n ganjil, maka jelas bahwa g(n) = n, sehingga
g(2019) + g(2021) + … + g(4037)
= 2019 + 2021 + … + 4037
= (1 + 3 + 5 + … + 4037) – (1 + 3 + 5 + … + 2017)
= $2019^2 – 1009^2$
Sekarang untuk n genap, kita bagi menjadi beberapa kasus.
Kasus 1: n ≡ 2 (mod 8) atau n ≡ 6 (mod 8)
Dengan demikian, g(n) = $\frac{n}{2}$, sehingga
g(2022) + g(2026) + … + g(4038)
= 1011 + 1013 + … + 2019
= (1 + 3 + 5 + … + 2019) – (1 + 3 + 5 + … + 1009)
= $1010^2 – 505^2$
Kasus 2: n ≡ 4 (mod 8)
Dengan demikian, g(n) = $\frac{n}{4}$, sehingga
g(2020) + g(2028) + … + g(4036)
= 505 + 507 + … + 1009
= (1 + 3 + 5 + … + 1009) – (1 + 3 + 5 + … + 503)
= $505^2 – 252^2$
Kasus 3: n ≡ 0 (mod 8)

*Jika n berkelipatan 8 tetapi bukan berkelipatan 16, maka f(n) = $\frac{n}{8}$, sehingga
f(2024) + f(2040) + … + f(4024)
= 253 + 255 + … + 503
= (1 + 3 + 5 + … + 503) – (1 + 3 + 5 + … + 251)
= $252^2 – 126^2$
*Jika n berkelipatan 16 tetapi bukan berkelipatan 32, maka f(n) = $\frac{n}{16}$, sehingga
f(2032) + f(2064) + … + f(4016)
= 127 + 129 + … + 251
= (1 + 3 + 5 + … + 251) – (1 + 3 + 5 + … + 125)
= $126^2 – 63^2$
*Jika n berkelipatan 32 tetapi bukan berkelipatan 64, maka f(n) = $\frac{n}{32}$, sehingga
f(2080) + f(2144) + … + f(4000)
= 65 + 67 + … + 125
= (1 + 3 + 5 + … + 125) – (1 + 3 + 5 + … + 63)
= $63^2 – 32^2$
*Jika n berkelipatan 64 tetapi bukan berkelipatan 128, maka f(n) = $\frac{n}{64}$, sehingga
f(2112) + f(2240) + … + f(4032)
= 33 + 35 + … + 63
= (1 + 3 + 5 + … + 63) – (1 + 3 + 5 + … + 31)
= $32^2 – 16^2$
*Jika n berkelipatan 128 tetapi bukan berkelipatan 256, maka f(n) = $\frac{n}{128}$, sehingga
f(2176) + f(2432) + … + f(3968)
= 17 + 19 + … + 31
= (1 + 3 + 5 + … + 31) – (1 + 3 + 5 + … + 15)
= $16^2 – 8^2$
*Jika n berkelipatan 256 tetapi bukan berkelipatan 512, maka f(n) = $\frac{n}{256}$, sehingga
f(2304) + f(2816) + f(3328) + f(3840)
= 9 + 11 + 13 + 15
= $8^2 – 4^2$
*Jika n berkelipatan 512 tetapi bukan berkelipatan 1024, maka f(n) = $\frac{n}{512}$, sehingga
f(2560) + f(3584) = 5 + 7 = $4^2 – 2^2$
*Jika n berkelipatan 1024, maka f(n) = $\frac{n}{1024}$, sehingga f(1024) = 3
*Jika n berkelipatan 2048, maka f(n) = $\frac{n}{2048}$, sehingga f(2048) = 1
Dengan demikian, kita peroleh

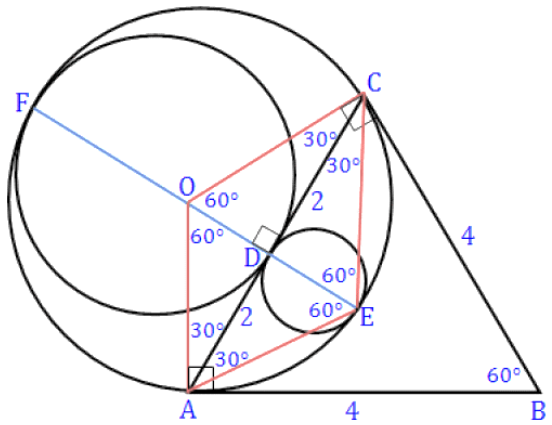
$$\begin{aligned} g(2019) + g(2020) + \dots + g(4038) &= (2019^2 - 1009^2) + (1010^2 - 505^2) + (505^2 - 252^2) + \\ &\quad \dots + (8^2 - 4^2) + (4^2 - 2^2) + (3 + 1) \\ &= 2019^2 - 1009^2 + 1010^2 \\ &= 2019^2 + (-1009 + 1010)(1009 + 1010) \end{aligned}$$

$= 2019^2 + 2019$
$= 2019(2019 + 1)$
$= 2019 \times 2020$

Jadi, nilai dari m = 2020.

13. **Jawaban : 2**

Perhatikan gambar berikut!



Luas segitiga sama sisi yang Panjang sisi nya s adalah $L = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$

Karena diketahui luas segitiga sama sisi ABC adalah $L_{ABC} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, maka Panjang sisinya adalah s = 4 cm.

Dengan demikian, AB = BC = AC = 4 cm

Misalkan O adalah titik pusat lingkaran besar dan D titik singgung lingkaran sedang dan lingkaran kecil, sekaligus titik tengah AC, sehingga AD = DC = 2 cm. Karena A dan C titik singgung sisi segitiga dengan lingkaran besar, maka BC ⊥ CO dan BA ⊥ AO, akibatnya ∠OCD = ∠OAD = 30°, ∠ODA = ∠ODC = 90°, dan ∠DOC = ∠DOA = 60°.

Diketahui OF = OC = OE = OA jari-jari lingkaran besar, sehingga segitiga ACE dan OAE sama kaki serta OE = 2OD = 2DE.

Perhatikan segitiga ODC berikut beserta perbandingan Panjang sisinya jika sudutnya 30°, 60°, 90°. Ini berarti, OD = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ = DE, sehingga OE = $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Jari-jari lingkaran kecil adalah

$$r_k = \frac{DE}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Jari-jari lingkaran besar adalah

$$r_b = OE = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Jari-jari lingkaran sedang adalah

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{OF+OE-DE}{2} \\ &= \frac{r_b+r_b-2r_k}{2} \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Luas daerah yang diarsir adalah

$L_{arsir} = L_{L.Besar} - L_{L.Kecil} - L_{L.Sedang}$

$= \frac{16}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi - \frac{9}{3}\pi$

$= \frac{6}{3}\pi = 2\pi = a\pi \text{ cm}^2$

Jadi, nilai a = 2

14. **Jawaban : $\frac{80}{81}$**

Misalkan huruf M, K, H berturut-turut diartikan sebagai pewarnaan untuk warna merah, kuning dan hijau.
Misalkan juga HHH dianggap sebagai satu kesatuan, kita sebut sebagai P.
Kasus 1: Ada tepat 3 warna hijau
Pewarnaan yang mungkin adalah
PMMM dan PKKK
Dengan total pewarnaan sebanyak $\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{3!} = 8$
PMMK dan PKKM
Dengan total pewarnaan sebanyak $\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} = 24$
Jadi, ada 8 + 24 = 32 untuk kasus ini.
Kasus 2: Ada tepat 4 warna hijau
Jika P dan H terpisah, maka pewarnaannya berbentuk

$\begin{cases} POHO \\ OPOH \\ POOH \end{cases}$

Bila O diganti menjadi MM, KK, KM atau MK, maka banyaknya pewarnaan = 4 x 2^3 = 24
Jika P dan H berdampingan, maka susunannya berbentuk $\begin{cases} PHMM \\ PHKK \end{cases}$
Dengan banyak pewarnaan = $\frac{3!}{2!} \times 2 = 6$.
Selain itu, juga bisa berbentuk PHKM dengan banyak pewarnaan = 3! = 6.
Total pewarnaan untuk kasus ini adalah 24 + 6 + 6 = 36
Kasus 3: Ada tepat 5 warna hijau
*P dan HH terpisah:
POHH: Jika O diganti M atau K, maka banyaknya pewarnaan = 2^2 = 4.
*PH dan H terpisah:
PHOH: Jika O diganti M atau K, maka banyaknya pewarnaan = 2^2 = 4.
*Semua H berdampingan:
PHHO: Jika O diganti M atau K, maka banyaknya pewarnaan = 2^2 = 4.
Total pewarnaan untuk kasus ini sebanyak 4 + 4 + 4 = 12 cara.
Kasus 4: Ada tepat 6 warna hijau
Jelas hanya ada 1 pewarnaan yang mungkin terjadi untuk kasus ini.
Dengan demikian, banyaknya total pewarnaan yang mungkin adalah 32 + 36 + 12 + 1 = 81

Peluang pewarnaan yang dilakukan oleh Maman berbeda dengan pewarnaan yang dilakukan oleh Nyoman adalah

$$1-\frac{81}{81}\times\frac{1}{81}=\frac{80}{81}$$

15. **Jawaban : 792**

Misalkan 5 bilangan yang terambil adalah a,b,c,d,e dengan a > b > c > d > e. Agar mendapatkan hadiah utama, maka harus memenuhi:

Kondisi 1:

$$a-b\geq 3 \Leftrightarrow a\geq b+3 \Leftrightarrow a>b+2$$

Kondisi 2:

$$b-c\geq 3 \Leftrightarrow b\geq c+3 \Leftrightarrow b>c+2$$
$$a>b+2>c+4$$

Kondisi 3:

$$c-d\geq 3 \Leftrightarrow c\geq d+3 \Leftrightarrow c>d+2$$
$$a>b+2>c+4>d+6$$

Kondisi 4:

$$d-e\geq 3 \Leftrightarrow d\geq e+3 \Leftrightarrow d>e+2$$
$$a>b+2>c+4>d+6>e+8$$

Dengan demikian,

$$20\geq a>b+2>c+4>d+6>e+8\geq 9$$

Misalkan $a=v, b+2=w, c+4=x, d+6=y, e+8=z$, maka ketaksamaan di atas dapat di tulis ulang menjadi

$$20\geq v>w>x>y>z\geq 9$$

Ini berarti, banyaknya kemungkinan peserta memenangkan hadiah utama ekuivalen dengan banyaknya cara memilih 5 bilangan bulat berbeda mulai dari 9 sampai 20 (ada 12 bilangan), yaitu

$$C_5^{12}=\frac{12!}{7!\,.\,5!}$$
$$=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 120}$$
$$=11\cdot 9\cdot 8=792$$

16. **Jawaban : $\frac{2018}{2019}$**

Perhatikan bahwa

$$f(5)=\frac{1}{(1)(2)}+\frac{1}{(2)(3)}+\frac{1}{(3)(4)}+\cdots+\frac{1}{(2018)(2019)}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2019}=\frac{2018}{2019}$$

Karena $f(5x+2)\geq f(5x)+2$ dan $f(5x=1)\leq f(5x+1)$, maka selanjutnya kita peroleh

$$f(5x+2)\geq f(5x)+2$$
$$=f(5x)+1+1$$

$\geq f(5x+1)+1 \geq f(5x+2)$
Dengan demikian, berlaku
$f(5x+2) \geq f(5x)+2 \geq f(5x+2)$
Ingat bahwa jika $a \leq b \leq a$, maka satu-satunya yang memenuhi pertidaksamaan adalah $a = b$.
Oleh karena itu, $f(5x+2) = f(5x)+2$
Jika diambil $x = 1$, diperoleh
$f\big(5(1)\big)+2 \geq f(5(1)+2)$
$\Leftrightarrow f(5)+2 = f(7)$
Untuk itu,

$$g(7) = f(7) - 2 = f(5) + 2 - 2 = \frac{2018}{2019}$$

17. **Jawaban :**
Misalkan h(n) adalah banyaknya kata yang terdiri dari n digit., f(n) adalah banyaknya kata yang terdiri dari n digit dan diawali salah satu huruf konsonan B, C atau D, sedangkan g(n) adalah banyaknya kata yang terdiri dari n digit dan diawali salah satu huruf vocal A atau B.
Karena ada 3 konsonan dan 2 vokal maka

$$h(n) = 3f(n) + 2g(n)$$

tepat setelah huruf vocal hanya boleh diisi satu dari 3 konsonan, maka

$$g(n) = 3f(n-1)$$

tepat setelah huruf konsonan hanya boleh diisi satu dari 2 konsonan yang berbeda dengan konsonan sebelumnya atau satu dari vocal, maka

$$f(n) = 2f(n-1) + 2g(n-1)$$

Dengan demikian,

$$f(n) = 2f(n-1) + 6f(n-2), \text{ dengan } f(1) = 1,\ f(2) = 4$$

Sehingga diperoleh f(3) = 14, f(4) = 52, f(5) = 188, f(6) = 688, f(7) = 2504

$$h(n) = 3f(n) + 6f(n-1)$$

$$h(7) = 3f(7) + 6f(6) = 11640$$

Jadi, banyaknya kata yang terdiri dari 7 huruf adalah 11640.

18. **Jawaban :**
Misalkan banyaknya kendang hijau (H_1, H_2, H_3), kendang merah (M_1, M_2, M_3), kandang biru (B_1, B_2, B_3), dan kandang kuning (K_1, K_2, K_3).

$$H_1 + H_2 + H_3 = 4,\ \ H_i \geq 0 \text{ untuk } i = 1,2,3$$

Banyaknya cara mendistribusikan hamster ke dalam kandang hijau $= \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$

$$M_1 + M_2 + M_3 = 3,\ M_i \geq 0 \text{ untuk } i = 1,2,3$$

Banyaknya cara mendistribusikan hamster ke dalam kandang hijau $= \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$

$$B_1 + B_2 + B_3 = 2,\ B_i \geq 0 \text{ untuk } i = 1,2,3$$

Banyaknya cara mendistribusikan hamster ke dalam kandang hijau $= \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$

$$K_1 + K_2 + K_3 = 1,\ K_i \geq 0 \text{ untuk } i = 1,2,3$$

Banyaknya cara mendistribusikan hamster ke dalam kandang hijau = $\binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$
Untuk kandang hijau yang berisi hamster lebih banyak dari kandang lain, maka perhatikan table berikut.

H_1	H_2	H_3	M_1	M_2	M_3	B_1	B_2	B_3	K_1	K_2	K_3
4	0	0	Banyaknya			Banyaknya			Banyaknya		
Banyaknya= $\frac{3!}{2!} = 3$			$\binom{5}{2} = 10$			$\binom{4}{2} = 6$			$\binom{3}{2} = 3$		

H_1	H_2	H_3	M_1	M_2	M_3	B_1	B_2	B_3	K_1	K_2	K_3
3	0	1	2	1	0	Banyaknya			Banyaknya		
Banyaknya=3!=6			Banyaknya=3!=6			$\binom{4}{2} = 6$			$\binom{3}{2} = 3$		
			1	1	1						
			Banyaknya = 1								

H_1	H_2	H_3	M_1	M_2	M_3	B_1	B_2	B_3	K_1	K_2	K_3
2	1	1	1	1	1	1	1	0	Banyaknya		
Banyaknya= $\frac{3!}{2!} = 3$			Banyaknya = 1			Banyaknya= $\frac{3!}{2!} = 3$			$\binom{3}{2} = 3$		

Jadi, peluang bahwa kandang hijau berisi lebih banyak hamster disbanding kandang lain, baik kandang hijau sewarna, maupun kandang lain warna adalah

$$\frac{3 \times 10 \times 6 \times 3 + 6 \times 7 \times 6 \times 3 + 3 \times 1 \times 3 \times 3}{15 \times 10 \times 6 \times 3} = \frac{1323}{2700} = \frac{49}{100}$$