**PEMBAHASAN**

**OSP MATEMATIKA SMP**

**TAHUN 2012**

1. **Jawaban : 16 cm**

   Karena bola berada dalam silinder maka jari - jari bola sama dengan jari - jari alas silinder. Misalkan jari - jari alas silinder adalah $r$. Karena tinggi silinder 5 cm dan volumenya 20 $\text{cm}^2$ maka luas alas silinder $= \pi r^2 = \frac{20}{5} = 4\ \text{cm}^2$. Padahal luas permukaan bola $= 4\pi r^2 = 4 \cdot 4 = 16\ \text{cm}^2$.

2. **Jawaban : 6**

   Misalkan ketiga bilangan tersebut adalah $a, b, c$ dengan $a < b < c$, maka diperoleh

$$a + b + c = 19$$
$$\frac{a-1}{b-1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3a = b + 2$$
$$\frac{b+3}{c+3} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 5c = 6b + 3$$

   Dari ketiga persamaan di atas didapat

$$\begin{aligned} a + b + c = 19 &\Leftrightarrow 15a + 15b + 15c = 285 \\ &\Leftrightarrow 5(b+2) + 15b + 3(6b+3) = 285 \\ &\Leftrightarrow 38b = 266 \\ &\Leftrightarrow b = 7 \end{aligned}$$

   karena $b = 7$ maka $a = 3$ dan $c = 9$. Sehingga $c - a = 9 - 3 = 6$.

3. **Jawaban : $\frac{3}{4}a - 1$**

   Misal $N = \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots$, maka

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = a$$
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = a$$

$$1+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\right)+N=a$$
$$1+\frac{1}{4}a+N=a$$
$$N=\frac{3}{4}a-1$$

4. **Jawaban : $\frac{2}{35}$**

   Pasangan bilangan prima yang jumlahnya juga merupakan bilangan prima di antara lima belas bilangan prima yang pertama adalah (2, 3), (2, 5), (2, 11), (2, 17), (2, 29) dan (2, 41).

   - Jika kartu pertama terambil angka 2 maka kartu kedua harus salah satu dari 3, 5, 11, 17, 29 atau 41 sehingga peluangnya adalah $\frac{1}{15}\cdot\frac{6}{14}=\frac{1}{35}$.
   - Jika kartu pertama terambil angka 3, 5, 11, 17, 29 atau 41 maka kartu kedua harus angka 2 sehingga peluangnya adalah $\frac{6}{15}\cdot\frac{1}{14}=\frac{1}{35}$.

   Jadi, peluang terambil dua kartu dengan jumlah dua bilangan yang tertulis merupakan bilangan prima adalah $\frac{1}{35}+\frac{1}{35}=\frac{2}{35}$.

5. **Jawaban : $\frac{1}{2}s^o+45^o$**

   $\angle AMB = 90^\circ - s^o$ dan $\angle ADB = \frac{1}{2}AMB = 45^o - \frac{1}{2}s^o$

   $$\angle CPD = \angle CAD + \angle ADB$$
   $$= s^\circ + 45^\circ - \frac{1}{2}s^o$$
   $$= \frac{1}{2}s^o + 45$$

6. **Jawaban : 41325**

   Perhatikan,

   - Jika angka pertama adalah 1 maka bilangan yang terbentuk ada 4! = 24
   - Jika angka pertama adalah 2 maka bilangan yang terbentuk ada 4! = 24
   - Jika angka pertama adalah 3 maka bilangan yang terbentuk ada 4! = 24

Oleh karena itu, banyak bilangan yang dimulai dengan angka 1, 2, atau 3 adalah 24 + 24 + 24 =72. Selanjutnya mudah dilihat bahwa bilangan ke- 73 adalah 41235, bilangan ke-74 yaitu 41253 dan bilangan ke-75 ialah 41325.

7. **Jawaban : 62**

Dari keterangan pada soal kita punya,

$$k = 3x + 2$$
$$2k = 5y + 4$$
$$8k = 7z + 6$$

untuk suatu bilangan bulat $x, y, z$.

Substitusikan persamaan pertama ke persamaan kedua diperoleh,

$$5y + 4 \Leftrightarrow 6x + 4 = 5y + 4$$
$$\Leftrightarrow 6x = 5y$$

karena 5 tidak membagi 6 maka haruslah 5 membagi $x$. Dengan demikian $x$ = 5m untuk suatu bilangan bulat $m$. Substitusikan $x = 5m$ ke pers. pertama, diperoleh $k = 3(5m) + 2 = 15m + 2$. Selanjutnya substitusikan nilai $k = 15m + 2$ ke pers. ketiga, didapat

$$8(15m + 2) = 7z + 6 \Leftrightarrow 120m + 16 = 7z + 6$$
$$\Leftrightarrow 120m = 7z - 10$$
$$\Leftrightarrow m = 7z - 119m - 7 - 3$$
$$\Leftrightarrow m + 3 = 7z - 119m - 7$$

perhatikan ruas kanan habis dibagi 7 sehingga ruas kiri juga harus habis dibagi 7. Dengan kata lain $m + 3 = 7n \Leftrightarrow m = 7n - 3$ dengan $n$ merupakan bilangan bulat. Substitusikan nilai $m = 7n - 3$ ke $k = 15m + 2$ sehingga didapat

$$k = 15(7n - 3) + 2 = 105n - 43$$

karena $k$ adalah bilangan bulat positif maka nilai terkecil dari $k$ yaitu 62 diperoleh ketika $n = 1$.

8. **Jawaban : 16184525**

Misalkan $n = 2010$ maka didapat

$p = n^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1$ dan $q = (n+2)^2 + (n+3)^2 = 2n^2 + 10n + 13$

sehingga diperoleh

$$2p - 1 = 2(2n^2 + 2n + 1) - 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

Dan

$$2q - 1 = 2(2n^2 + 10n + 13) - 1 = 4n^2 + 20n + 25 = (2n+5)^2$$

Selanjutnya kita peroleh

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - 2(p+q) + 4pq} &= \sqrt{(2p-1)(2q-1)} \\
&= \sqrt{(2n+1)^2(2n+5)^2} \\
&= (2n+1)(2n+5) \\
&= 4021 \cdot 4025 \\
&= 16184525
\end{aligned}$$

9. **Jawaban : $-\frac{21}{16}$**

Dengan rumus jumlah dan hasil kali akar - akar persamaan kuadrat diperoleh,

$$a + b = \frac{7}{4} \text{ dan } ab = -\frac{1}{4}$$

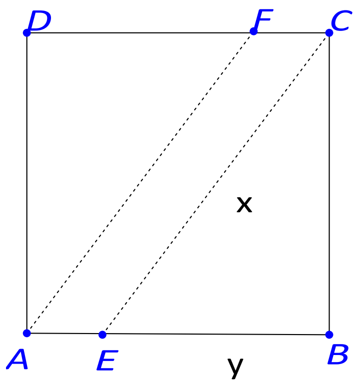
Selain itu karena $a$ adalah penyelesaian dari persamaan kuadrat $4x^2 - 7x - 1 = 0$ kita peroleh,

$$4a^2 - 7a - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(4a-7) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4a - 7 = \frac{1}{a}$$

Demikian pula $4b - 7 = \frac{1}{b}$.

10. **Jawaban : 13**

Perhatikan gambar berikut!




Misalkan panjang sisi persegi adalah $a$. Misalkan pula $CE = x$ dan $BE = y$. Berdasarkan keterangan soal luas jajar genjang $AECF$ adalah $\frac{1}{3}a^2$. Padahal kita tahu pula luas jajar genjang $AECF = x \cdot 1 = x$, maka didapat $x = \frac{1}{3}a^2$. Demikian pula pada $\triangle EBC$ berlaku

$$\begin{aligned}
\text{Luas } \triangle EBC &= \frac{1}{3}a^2 \\
\frac{1}{2} \cdot BE \cdot BC &= \frac{1}{3}a^2 \\
\frac{1}{2} \cdot y \cdot a &= \frac{1}{3}a^2 \\
y &= \frac{2}{3}a
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan dalil pythagoras pada $\triangle EBC$ didapat,

$$\begin{aligned}
y^2 + a^2 = x^2 &\Leftrightarrow \left(\tfrac{2}{3}a\right)^2 + a^2 = \left(\tfrac{1}{3}a^2\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{4}{9}a^2 + a^2 = \frac{1}{9}a^4 \\
&\Leftrightarrow \frac{13}{9} = \frac{1}{9}a^2 \\
&\Leftrightarrow a^2 = 13
\end{aligned}$$

Jadi, luas persegi adalah 13 $\text{cm}^2$.

**11. Jawaban :**

Misalkan $2^x = m$ dan $3^x = n$ maka persamaan pada soal equivalen dengan

$m + n - m^2 + mn - n^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 + n^2 - mn - m - n + 1 = 0$

dengan sedikit manipulasi diperoleh persamaan

$$\frac{1}{2}((m-n)^2 + (m-1)^2 + (n-1)^2) = 0$$

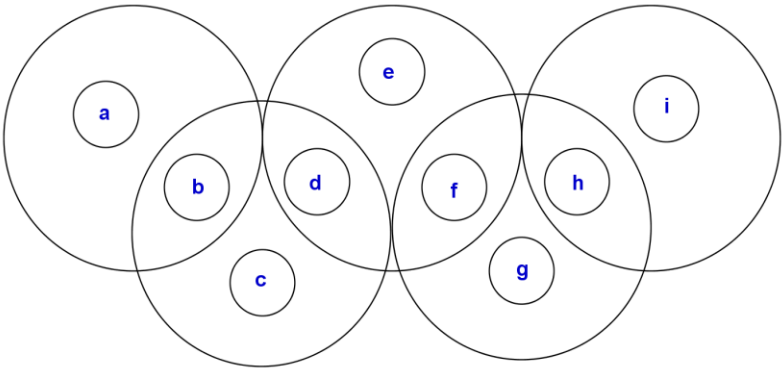
sehingga $m = n = 1$ atau dengan kata lain $2^x = 3^x = 1$ yang hanya dipenuhi jika dan hanya jika $x = 0$.

Jadi, satu - satunya penyelesaian persamaan pada soal adalah $x = 0$.

**12. Jawaban :**

Misalkan penyelesaian dari soal adalah seperti pada gambar di bawah ini:

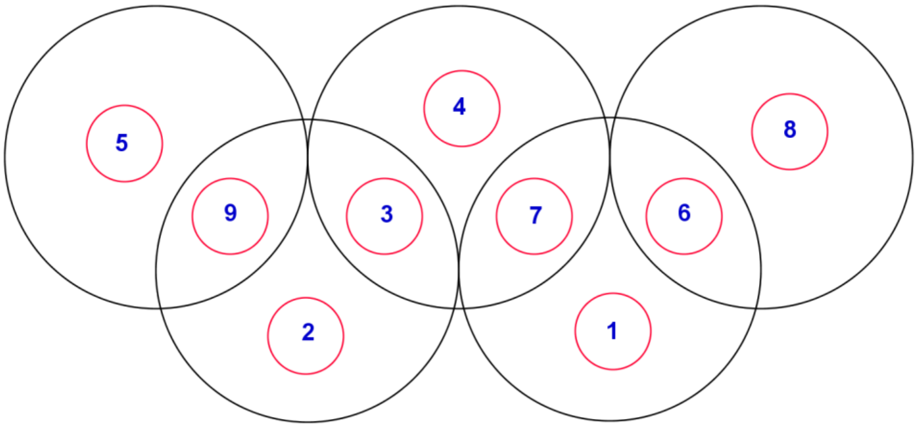
Kita tahu bahwa $a + b + c + d + e + f + g + h + i = 45$ dan karena jumlah di dalam




setiap lingkaran besar adalah 14, kita peroleh

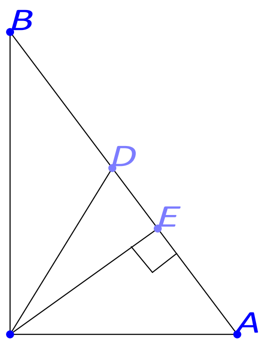
$$(a + b) + (b + c + d) + (d + e + f) + (f + g + h) + (h + i) = 5 \cdot 14$$
$$b + d + f + h + 45 = 70$$
$$b + d + f + h = 25$$

Selain itu, $a + b = h + i = 14$. Padahal dari sembilan bilangan tersedia yang jumlahnya 14 hanya $5 + 9$ dan $6 + 8$. Dengan memperhatikan $b + d + f + h = 25$, maka yang mungkin adalah $b = 9$ dan $h = 6$ (dalam hal ini jika $b = 6$ dan $h = 9$ sama saja karena simetris). Karena $b = 9$ dan $h = 6$ berarti $d + f = 10$. Dari sisa angka yanga ada, yang jumlahnya 10 hanya $3 + 7$ maka diperoleh $d = 3$ dan $f = 7$. Angka - angka sisanya yaitu $a, c, e, g, h$ menyesuaikan agar diperoleh jumlah 14 pada lingkaran besar. Salah satu penyelesaiannya adalah seperti berikut :




**13. Jawaban :**

Perhatikan sketsa di bawah ini!




C

Tarik garis $CE$ yaitu garis tinggi $\triangle ABC$ dari titik $E$. Sehingga diperoleh

$$\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CE$$

$$15\cdot 20=25\cdot CE$$

$$CE=12$$

Kemudian dengan pythagoras pada $\triangle ACE$ diperoleh $AE=9$. Selain itu ingat juga bahwa

$$\frac{AD}{AB}=\frac{\text{Luas }\triangle ADC}{\text{Luas }\triangle ABC}=\frac{14}{25}$$

Sehingga

$$AD=\frac{14}{25}\cdot AB=\frac{14}{25}\cdot 25=14$$

Oleh karena itu, $DE = AD - AE = 14 - 9 = 5$ cm. Perhatikan juga $\triangle CDE$ adalah segitiga siku - siku. Dengan demikian dengan dalil pythagoras pada $\triangle CDE$ didapat $CD = 13$.

**14. Jawaban :**

Misalkan,

- $N$ : jumlah seluruh penduduk
- $D$ : jumlah penduduk dewasa
- $A$ : jumlah penduduk anak – anak
- $D_L$ : jumlah laki - laki dewasa
- $D_P$ : jumlah perempuan dewasa
- $A_L$ : jumlah anak laki – laki
- $A_P$ : jumlah anak - anak Perempuan

Selanjutnya berdasarkan keterangan pada soal diperoleh :

$A = D + 0{,}2D = 1{,}2D$ tetapi karena $A + D = N$ maka $N = A + D = 1{,}2D + D = 2{,}2D$, sehingga

$$D = \frac{1}{2{,}2}N \text{ dan } \quad A = \frac{1{,}2}{2{,}2}N$$

Dengan cara yang sama diperoleh $A_L = A_P + 0{,}1A_P = 1{,}1A_P$ tetapi karena $A_L + A_P = A$ maka $A = A_L + A_P = 1{,}1A_P + A_P = 2{,}1A_P$ sehingga

$$A_P = \frac{1}{2{,}1} \cdot A = \frac{1}{2{,}1} \cdot \frac{1{,}2}{2{,}2}N = \frac{20}{77}N$$

$$A_L = 1{,}1A_P = 1{,}1 \cdot \frac{1}{2{,}1} \cdot A = 1{,}1 \cdot \frac{1}{2{,}1} \cdot \frac{1{,}2}{2{,}2}N = \frac{2}{7}N$$

Demikian pula dengan cara yang sama diperoleh :

$D_P = D_L + 0{,}15D_L = 1{,}15D_L$ tetapi karena $D_L + D_P = D$ maka $D = D_L + D_P = D_L + 1{,}15D_L = 2{,}15D_L$ sehingga

$$D_L = \frac{1}{2{,}15} \cdot D = \frac{1}{2{,}15} \cdot \frac{1}{2{,}2}N = \frac{100}{11 \cdot 43}N$$

$$D_P = 1{,}15 \cdot \frac{1}{2{,}15} \cdot D = 1{,}15 \cdot \frac{1}{2{,}15} \cdot \frac{1}{2{,}2} N = \frac{115}{11 \cdot 43} N$$

Karena $A_L$, $A_P$ ,$D_L$ dan $D_P$ merupakan bilangan bulat positif maka haruslah $N$ merupakan kelipatan dari $7 \cdot 11 \cdot 43 = 3311$. Karena $N < 10000$ maka nilai $N$ terbesar yang mungkin adalah $N = 3 \cdot 3311 = 9933$.

Jadi, banyak penduduk terbesar yang mungkin di kota tersebut adalah 9933.

**15. Jawaban :**

Misalkan bilangan rasional yang dimaksud adalah $\frac{a}{b}$ dengan $a < b$ dan FPB$(a,b) = 1$ serta $ab = 20!$ Perhatikan karena FPB$(a,b) = 1$ maka keduanya tidak memiliki faktor prima yang sama. Selain itu kita punya $20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. Selanjutnya untuk mempermudah penulisan, misalkan $a_1 = 2^{18}$, $a_2 = 3^8$, $a_3 = 5^4$, $a_4 = 7^2$, $a_5 = 11$, $a_6 = 13$, $a_7 = 17$ dan $a_8 = 19$. Ada lima kasus yang mungkin yaitu :

i.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{8} a_n}$$

Untuk kasus ini banyaknya kemungkinan jelas hanya 1.

ii.

$$\frac{a}{b} = \frac{min\left(a_i, \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq i}}^{8} a_n\right)}{max\left(a_i, \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq i}}^{8} a_n\right)}$$

Untuk kasus ini banyaknya kemungkinan ada sebanyak $C_1^8 = 8$.

iii.

$$\frac{a}{b} = \frac{min\left(a_i a_j, \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq i,j}}^{8} a_n\right)}{max\left(a_i a_j, \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq i,j}}^{8} a_n\right)}$$

Untuk kasus ini banyaknya kemungkinan ada sebanyak $C_2^8 = 28$.

iv.

$$\frac{a}{b} = \frac{min\left(a_i a_j a_k, \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i,j,k}}^{8} a_n\right)}{min\left(a_i a_j a_k, \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i,j,k}}^{8} a_n\right)}$$

Untuk kasus ini banyaknya kemungkinan ada sebanyak $C_3^8 = 56$.

v.

$$\frac{a}{b} = \frac{min\left(a_i a_j a_k a_l, \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i,j,k,l}}^{8} a_n\right)}{max\left(a_i a_j a_k a_l, \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i,j,k,l}}^{8} a_n\right)}$$

Untuk kasus ini banyaknya kemungkinan ada sebanyak $\frac{C_4^8}{2!} = 35$.

Oleh karena itu bilangan rasional yang dimaksud ada sebanyak 1 + 8 + 28 + 56 + 35 = 128.