PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMA

TAHUN 2024

1. Diketahui bahwa $\overline{ab}$ dan $\overline{cd}$ adalah dua bilangan yang hasil kalinya adalah 555. Jika $\overline{ab} < \overline{cd}$, maka nilai dari $a + b$ adalah **6**.
2. Misalkan f dan g fungsi linear yang memenuhi persamaan
$$f(x + g(y)) = 7x + 4y + 12 \text{ untuk setiap bilangan real } x,y.$$
Jika diketahui $g(7) = 5$, maka $g(-12 + f(4)) =$ **13**.
Catatan: Fungsi linear adalah fungsi berbentuk $h(x) = ax + b$ dengan a,b konstanta bilangan real.
3. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $AB = 15$, $AC = 14$, $BC = 13$. Diketahui bahwa terdapat sebuah segitiga sama sisi PQR dengan $P,Q,$ dan R masing-masing terletak pada sisi $BC, CA,$ dan AB sehingga PQ sejajar dengan AB.
Nilai $\frac{PQ}{AB}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$, dengan a,b,c,d adalah bilangan bulat positif, d tidak habis dibagi bilangan kuadrat yang bernilai lebih dari satu, dan $\text{FPB}(a,b,c) = 1$
Nilai dari $a + b + c + d$ adalah **302**.
4. Masing-masing petak pada papan berukuran 2025×3 akan diwarnai dengan salah satu dari warna hitam atau putih, sedemikian sehingga pada setiap sub-papan berukuran 2×2, terdapat masing-masing sebanyak ganjil petak bewarna hitam dan ganjil petak bewarna putih.
Misalkan banyaknya cara pewarnaan petak yang mungkin adalah A. Sisa dari A ketika dibagi 1000 adalah **728**.
5. Banyaknya bilangan asli a yang kurang dari 187 sehingga $\text{FPB}(a, 187) = 1$ dan $a^2 - 1$ bukan kelipatan dari 187 adalah **156**.

6. Pada persegi $ABCD$ dengan panjang sisi $\sqrt{2}+\sqrt{6}$, titik X terletak pada diagonal AC sehingga $AX > XC$. Garis bagi dalam sudut AXB memotong sisi AB pada titik U. Garis bagi dalam sudut CXD memotong sisi CD pada titik V.

   Jika $\angle UXV = 150^\circ$, maka nilai dari $\lfloor 3 \times UV^2 \rfloor$ adalah **45**.

   Catatan: Notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.

7. Diberikan himpunan $S = 1,2, \ldots, 17$. Misalkan N adalah banyaknya pasangan terurut (A,B) dengan A,B himpunan bagian dari S sehingga $|A \cap B| \leq 2$.

   Nilai dari $\frac{N}{3^{15}}$ adalah **196**.

   Catatan: Notasi $|X|$ menyatakan banyaknya anggota himpunan X.

8. Misalkan a,b,c merupakan bilangan-bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan

$$ax^2 + bx + c \leq (14x-3)^2$$

   untuk setiap bilangan real x.

   Nilai terkecil yang mungkin dari $a + 2b + 5c$ adalah **-73**.

9. Diberikan bilangan real $C \leq 2$. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif x,y dengan $xy = 1$ berlaku ketaksamaan

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{C}{x+y} \geq 1 + \frac{C}{2}$$

   Solusi. Dengan ketaksamaan AM-QM diperoleh $\sqrt{(x^2+y^2)/2} \geq (x+y)/2$. Cukup dibuktikan bahwa

$$\frac{x+y}{2} + \frac{C}{x+y} - \left(1 + \frac{C}{2}\right) \geq 0$$

   Dengan ketaksamaan AM-GM, $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2 \geq C$. Akibatnya

$$
\begin{aligned}
\frac{x+y}{2}+\frac{C}{x+y}-\left(1+\frac{C}{2}\right) &= \left(\frac{x+y}{2}-1\right)+C\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{x+y-2}{2}+C\cdot\frac{2-(x+y)}{2(x+y)}\\
&= \frac{(x+y-2)}{2}\left(1-\frac{C}{x+y}\right)\\
&= \frac{(x+y-2)\,(x+y-C)}{2\,(x+y)}\\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

dan kita selesai.

10. Diberikan sebuah papan $n \times n$ yang terbagi menjadi petak-petak berukuran 1×1 yang kesemuanya berwarna putih. Aqua memilih beberapa buah petak dari papan ini, dan mewarnainya dengan warna hitam. Ruby kemudian meletakkan tepat satu buah domino berukuran 1×2 di papan, sehingga domino tersebut menutupi tepat dua buah petak di papan. Ruby dapat memutar domino tersebut menjadi domino 2×1. Setelah Aqua mewarnai, ternyata ada tepat 2024 cara bagi Ruby untuk meletakkan sebuah domino di papan sehingga domino tersebut menutupi tepat satu buah petak hitam dan satu buah petak putih.

    Temukanlah nilai n terkecil yang mungkin sehingga Aqua dan Ruby dapat melakukan hal ini.

    Solusi. n terkecil yang mungkin adalah 33. - Bukti $n \geq 33$: Perhatikan bahwa terdapat $n(n-1)$ cara meletakkan domino 1×2 di papan berukuran $n \times n$, dan terdapat $n(n-1)$ cara meletakkan domino 2×1 di papan berukuran $n \times n$. Dengan demikian, diperoleh

    $$2n(n-1) \geq 2024 \Longrightarrow n \geq 33.$$

    Sekarang akan kita tunjukkan bahwa $n = 33$ mungkin. Warnai papan seperti papan catur (hitamputih selang-seling) dengan petak ke 1×1 berwarna hitam, kecuali semua petak pada baris ke-33 dan kolom ke-33 semua berwarna putih. Perhatikan bahwa Ruby hanya dapat meletakkan domino pada papan berukuran 32×32, atau papan posisi $(32,i)(33,i)$ dengan i genap, atau papan posisi $(j,32)(j,33)$ dengan j genap. Dengan demikian, banyaknya cara meletakkan domino pada papan ada:

$2.32.31 + 16 + 16 = 2016$.

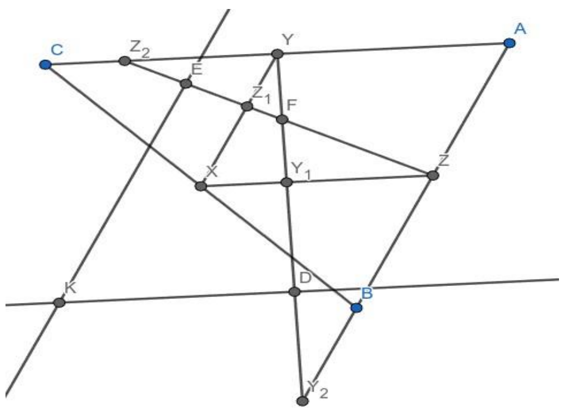
Kekurangan 8 cara dapat di atasi dengan mengubah warna papan pada posisi $(33,1)$,$(33,3)$ dan $(33,5)$ menjadi hitam, sehingga terdapat 8 tambahan cara meletakkan domino,

yakni: $(32,1)(33,1)$,$(32,3)(33,3)$,$(32,5)(33,5)$,$(33,1)(33,2)$,$(33,2)(33,3)$,$(33,3)(33,4)$, $(33,4)(33,5)$,$(33,5)(33,6)$.

11. Pada segitiga ABC, titik $X,Y,$ dan Z masing-masing merupakan titik tengah dari BC,CA, dan AB berturut-turut. Garis sumbu AB memotong garis XY dan garis AC berturut-turut pada Z_1 dan Z_2. Garis sumbu AC memotong garis XZ dan garis AB berturut-turut pada Y_1 dan Y_2.

    Misalkan K adalah titik sehingga $KZ_1 = KZ_2$ dan $KY_1 = KY_2$. Buktikan bahwa $KB = KC$.

    Solusi. Misal D, E, F masing-masing adalah titik tengah Y_1Y_2, titik tengah Z_1Z_2, dan perpotongan garis sumbu AB dan garis sumbu AC (i.e. titik pusat lingkaran luar ABC). Perhatikan bahwa K merupakan perpotongan garis sumbu Z_1Z_2 dan garis sumbu Y_1Y_2.



Pertama, karena $\angle FYZ_2 = \angle FZY_2 = 90^\circ$ dan $\angle YFZ_2 = \angle ZFY_2$, maka segitiga YFZ_2 dan segitiga ZFY_2 sebangun. Selain itu, karena Z_1 merupakan kaki garis tinggi dari Y ke

FZ_2 dan Y_1 merupakan kaki garis tinggi dari Z ke F_Y2, maka segitiga FZ_1Y dan FY_1Z juga sebangun. Sehingga berlaku

$$\frac{FZ_1}{FZ_2} = \frac{FY_1}{FY_2} \implies \frac{\frac{FZ_1+FZ_2}{2}}{FZ_1} = \frac{\frac{FY_1+FY_2}{2}}{FY_1} \implies \frac{FE}{FZ_1} = \frac{FD}{FY_1},$$

yang berarti terdapat homothety yang membawa FZ_1Y_1 ke FED. Homothety ini membawa X ke K karena $EK \perp EF$ dan $DK \perp DF$, dan $XZ_1 \perp Z_1F$ serta $XY_1 \perp Y_1F$. Akibatnya, X, K, dan F segaris. Karena FX adalah garis sumbu BC, akibatnya K juga terletak pada garis sumbu BC, i.e. $KB = KC$.

12. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli $1 \leq a,b \leq 2027$ yang memenuhi $2027 \mid a^6 + b^5 + b^2$.

    (Catatan: Untuk bilangan bulat a dan b, notasi $a \mid b$ berarti terdapat suatu bilangan bulat c sehingga $ac = b$.)

    Solusi. Kita klaim bahwa jawabannya adalah 2028. Kita akan gunakan lemma terkenal berikut.

    Claim. Apabila $p \equiv 2(\text{mod}3)$ merupakan bilangan prima, maka peta $x \longrightarrow x^3$ subjektif.

    Untuk menyelesaikan soal, tinjau bahwa $2027 \equiv 2(\text{mod}3)$ dan 2027 bilangan prima. Kita tinjau dua buah kasus: - Apabila $2027 \mid b$, maka $2027 \mid b^5 + b^2$ dan akibatnya $2027 \mid a$. Akibatnya, $a = b = 2027$ dan ini kerja. - Andai sebaliknya, maka kita punya

$$\left(\frac{a^3}{b}\right)^2 + 1 \equiv -b^3 \quad \boxed{\text{(mod 2027)}}$$

    Pilih sembarang $X = \frac{a^3}{b} \in \{1,2,\dots,2017\}$. Maka, RHS uniquely defined dan dari klaim, b uniquely defined. Terlebih lagi, $a^3 = b_X$ dan dari klaim, a uniquely defined. Oleh karena itu, terdapat 2027 solusi untuk kasus ini. Kita perlu hati-hati pada kasus ketika RHS $\equiv 0$ (mod2027) dan mengakibatkan kontradiksi, namun ini tidak mungkin sebab ini mengakibatkan $2027 \left| \left(\frac{a^3}{b}\right)^2 + 1\right.$ namun $2027 \equiv 3 \pmod 4$, sebuah kontradiksi.