PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMA

TAHUN 2021

1. **Jawaban: 2940**

   Bukti. Misal anak ke-i memperoleh x_i buku, di mana $i \in \{1,2,3\}$ dan $x_i \geq 2$ untuk setiap i. Maka, memisalkan $y_i = x_i - 1$, diperoleh y_i bilangan asli, dan $y_1 + y_2 + y_3 = 8 - 1 - 1 - 1 = 5$. Dengan Stars and Bars, diperoleh $\binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$ kasus yang ada. Semua kasus tersebut adalah (3, 3, 2) dan permutasinya, serta (4, 2, 2) dan permutasinya.
   Kasus 1. Untuk setiap permutasi (3, 3, 2) : Ada $\frac{3!}{2!} = 3$ permutasi kasus ini, dengan banyaknya cara per kasus sama dengan

   $$\binom{8}{3,3,2} = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{6\cdot2} = 8\times7\times5\times2 = 560.$$

   Maka pada ketiga kasus ini ada $3 \times 560 = 1680$ cara.

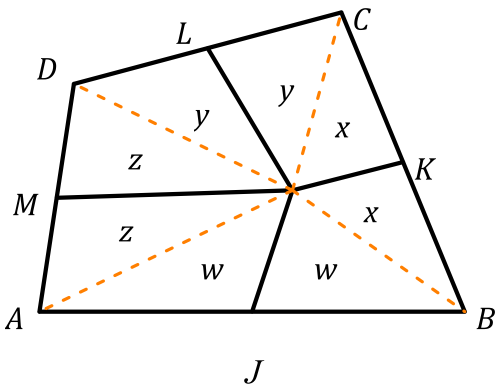
   Kasus 2. Untuk setiap permutasi (4, 2, 2) : Ada $\frac{3!}{2!} = 3$ permutasi kasus ini, dengan banyaknya cara per kasus sama dengan

   $$\binom{8}{4,2,2} = \frac{8!}{4!2!2!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2\cdot2} = 2\times7\times6\times5 = 420.$$

   Maka pada ketiga kasus ini ada $3 \times 420 = 1260$ cara.
   Sehingga ada $1260 + 1680 = 2940$ cara untuk mendistribusikan 8 buku cerita berbeda kepada tiga anak, dengan masing-masing anak menerima sedikitnya dua buku.

2. **Jawaban** : 88

   Bukti. Namakan segiempat awal sebagai segiempat $ABCD$, lalu buatlah garis-garis $PA, PB, PC,$ dan PD. Misalkan titik-titik J,K,L,M adalah titik-titik tengah dari sisi-sisi $AB, BC, CD,$ dan DA berturut-turut. Karena perbandingan luas segitiga jika tingginya sama, adalah sama dengan perbandingan alasnya, dapat dimisalkan bahwa $[\triangle AJP] = [\triangle BJP] = w$, $[\triangle KBP] = [\triangle KCP] = x$, $[\triangle PLC] = [\triangle PLD] = y$, $[\triangle PDM] = [\triangle PAM] = z$, seperti gambar berikut.



Maka diperoleh $w + z = 85$, $w + x = 72$, $x + y = 75$, dan kita ingin mencari $y + z$. Tinjau bahwa

$$(w + z) + (x + y) = (w + x) + (y + z) \Leftrightarrow y + z = 85 + 75 - 72 = 88,$$

artinya luas daerah yang belum diketahui adalah 88.

3. **Jawaban : 5**

Bukti. Tinjau x dalam modulo 6, lalu hanya perlu dikuli:

- $x \equiv 0 \pmod 6$: Maka $6|c$. Jadi nilai $c = 6$ satu-satunya kemungkinan.
- $x \equiv 1 \pmod 6$: Maka $6|a + b + c$, namun mengingat $C = 6$ diperoleh $6|a + b$.
- $x \equiv 2 \pmod 6$: Maka $6|4a + 2b + c \Leftrightarrow 6|4a + 2b \Leftrightarrow 3|2a + b$. Namun mengingat $6|a + b$, diperoleh $3|a + b$ atau $3|a$.
- $x \equiv 3 \pmod 6$: Maka $6|9a + 3b + c \Leftrightarrow 6|9a + 3b \Leftrightarrow 2|3a + b \Leftrightarrow 2|a + b$. (Tidak ada syarat baru, ingat $6|a + b$.)
- $x \equiv 4 \pmod 6$: Maka $6|16a + 4b + c \Leftrightarrow 3|8a + 2b = 2(4a + b)$ sehingga dengan Lemma Euclid diperoleh $3|4a + b \Leftrightarrow 3|a + b$. (Tidak ada syarat baru)
- $x \equiv 5 \pmod 6$: Maka $6|25a + 5b + c \Leftrightarrow 6|5(5a + b)$ sehingga dengan Lemma Euclid diperoleh bahwa $6|5a + 2b \Leftrightarrow 6|5a + b - 5(a + b) = -4b \Leftrightarrow 3| - 2b + 3b = 3|b$.

Maka semua syarat yang diperlukan adalah $6|c$, $3|a, 3|b$, dan $6|a + b$. Akan dibuktikan ini memenuhi. Misal $a = 3p, b = 3q$, dan $c = 6$. Jelas $3|P(n)$. Lalu:

- Untuk n genap, diperlukan bahwa $6|P(n) = (3p)n^2 + (3q)n + 6 \Leftrightarrow 6|3n(pn + q)$. Tetapi n genap, maka $6|3n$, sehingga benar.
- Untuk n ganjil, misal $n = 2k - 1$. Maka dalam modulo 2, $P(2k - 1) = (3p)n^2 + 3qn + 6 \equiv pn^2 + 3qn \pmod 2 \equiv p(-1)^2 + 3q(-1) \equiv p - 3q \equiv p + q \pmod 2$, atau $2|p + q$ sehingga memenuhi juga.

Menggunakan permisalan yang sama, jelas dan $1 \leq q \leq 3$ dan $2|p + q$. Ada 5 pasangan (p,q) yang memenuhi, yakni $(p,q) = (1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3) \Leftrightarrow (a,b) = (3,3),(3,9),(6,6),(9,3),(9,9)$ dengan satu-satunya nilai c yang mungkin adalah 6, maka terdapat 5 tripel (a,b,c) yang memenuhi.

4. **Jawaban :**

Bukti. Misal $a = x^2 + y$ dan $b = y^2 + x$. Maka diperoleh $(a + 1)(b + 1) = 4$ dan $a^2 + b^2 = 2$. Memisalkan lagi bahwa $m = a + b$, diperoleh $ab + a + b + 1 = 4 \Leftrightarrow ab = 3 - m \Leftrightarrow 2ab = 6 - 2m$, sehingga $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2 + 6 - 2m = 8 - 2m = m^2$. Sehingga semua nilai m yang memenuhi adalah

$$m^2 + 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow (m + 4)(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = -4, \qquad m = 2.$$

Tinjau juga bahwa $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$, maka $2 - (6 - 2m) = 2m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$. Maka $m = -4$ tidak memenuhi. Sehingga diperoleh $m = 2$, dan $(a - b)^2 = 2(2) - 4 = 0 \Leftrightarrow a = b$, dan $a + b = 2$ maka $a = b = 1$. Jadi oleh sistem

$$x^2 + y = 1$$
$$y^2 + x = 1$$

Kita dapat mengeliminasi agar diperoleh $x^2 - y^2 + y - x = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0$ artinya $x = y$ atau $x + y = 1$.

Kasus 1. $x = y$: Masukkan ke persamaan 1 agar diperoleh $(y^2 + y + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 + y + 1 = \pm 2$. Sedangkan memasukkan ke peramaan bawah, diperoleh $2(y^2 + y)^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 + y = \pm 1 \Leftrightarrow y^2 + y + 1 = 2$ atau 0. Maka hanya $y^2 + y + 1 = 2$ memenuhi, yang membentuk solusi di sini adalah

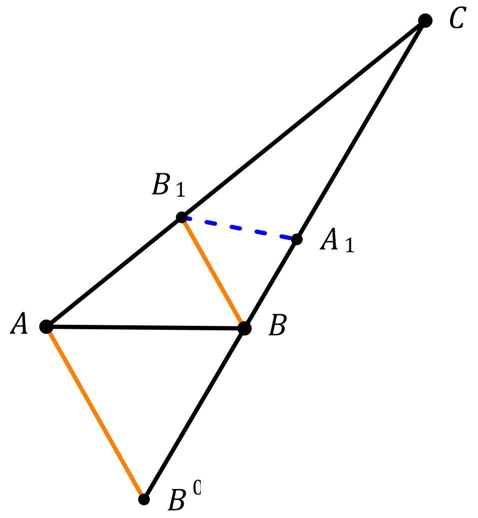
Kasus 2. $x + y = 1$: Substitusi jadi $y = 1 - x$ ke persamaan soal di persamaan kedua, sehingga diperoleh $(x^2 - x + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1$ (sebab 0). Sehingga $x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0$ maka $x = 0$ atau 1. Maka semua solusi di sini adalah $(x,y) = (0,1)$ dan $(1, 0)$.

Jadi, semua pasangan bilangan real (x,y) yang memenuhi adalah

5. **Jawaban :**

Bukti. Perpanjang sinar CB ke titik-titik B' sehingga $BB' = AB$. Tinjau bahwa $\angle B'BA = 60^\circ$ (pelurus $\angle ABC$) sehingga $\triangle B'BA$ samasisi.

Karena $\angle AB'B + \angle B'BB_1 = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, diperoleh bahwa garis BB_1 sejajar AB'. Maka $\triangle CB_1B \sim \triangle CAB'$, dan $\angle CB_1B = 60^\circ + \angle CAB$.



Lemma

Garis B_1A_1 membagi $\angle BB_1C$ menjadi dua sudut yang sama besar.

Bukti. Dengan kesebangunan tadi, $\frac{BB_1}{B_1C} = \frac{B'A}{AC} = \frac{BA}{AC}$. Selanjutnya, dengan teorema perbandingan sisi oleh garis bagi, $\frac{BA}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}$. Maka menggabungkan, diperoleh

$$\frac{BB_1}{B_1C} = \frac{BA_1}{A_1C}$$

yang merupakan konvers dari teorema garis bagi.

Dengan cara yang sama, B_1C_1 merupakan garis bagi $\angle AB_1B$. Maka,

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_1B + \angle BB_1C_1 = \tfrac{1}{2}(\angle BB_1C + \angle BB_1A) = \tfrac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

6. **Jawaban :**

   Bukti. Suta perlu melingkari $(1,2020),(2,2019),\cdots,(505,1516)$ (dengan kata lain, $(x,2021-x)$ untuk $1 \le x \le 505$ dan x bilangan bulat, maka jumlah tiap pasangannya 2021) dan 2021, sehingga nilai

   $$K = 2021 \times (505+1) = 2021 \times 506.$$

   Jumlah semua bilangan pada papan tulis adalah

   $$1+2+3+\cdots+2021 = \frac{2021 \cdot 2022}{2} = 2021 \times 1011.$$

   Sementara, diketahui bahwa

   $K + L = 2021 \times 1011 \Leftrightarrow 2021 \times 506 + L = 2021 \times 1011$

   $$\Leftrightarrow L = 2021 \times (1011 - 506) = 2021 \times 505.$$

   Maka, $K - L = 2021 \times 506 - 2021 \times 505 = 2021(506-505) = 2021.$

7. **Jawaban : 4, 7, 9, 13 dan 31**

   Bukti. Semua bilangan asli yang memenuhi adalah $n = 4,7,9,13$ dan 31. Dapat dilihat masing-masing dari bilangan tersebut memenuhi:

   $n = 4 \Rightarrow (2-1)|5$ (Memenuhi), $(2+1)|3$ (Memenuhi),

   $n = 7 \Rightarrow (2-1)|8$ (Memenuhi), $(2+1)|6$ (Memenuhi),

   $n = 9 \Rightarrow (3-1)|10$ (Memenuhi), $(3+1)|8$ (Memenuhi),

   $n = 13 \Rightarrow (3-1)|14$ (Memenuhi), $(3+1)|12$ (Memenuhi),

   $n = 31 \Rightarrow (5-1)|32$ (Memenuhi), $(5+1)|30$ (Memenuhi).

   Akan dibuktikan solusinya sudah lengkap. Misalkan $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$. Maka, n bilangan asli memenuhi ketaksamaan $k^2 \le n \le (k+1)^2 - 1 = k^2 + 2k$. Mengingat $n > 3 \Leftrightarrow n \ge 4$, dan $n = k^2 \ge 4$, maka $k \ge 2$ (sebab k bulat nonnegatif, mengingat syarat akar).

   Lemma

   $n = k^2$ atau $n = k^2 + k + 1$ untuk suatu $k \ge 2$.

Bukti. Meninjau syarat kedua, diperoleh bahwa $k+1|n-1 \geq k^2-1$. Jelas bahwa $k+1|k^2-1 = (k-1)(k+1)$ dan $k+1|k^2+k = k(k+1)$ memenuhi. Jika $n > k^2+k+1$, haruslah $n \geq k^2+k+1 + (k+1) = k^2+2k+2 > k^2+2k \geq n \Leftrightarrow n > n$ (kontradiksi).

Maka substitusi nilai tersebut ke dalam syarat kedua.

Kasus 1. Untuk $n = k^2$: maka $k-1|k^2+1 \Leftrightarrow k-1|(k^2+1)-(k-1)(k+1) = k^2+1-(k^2-1) = 2$, sehingga $k-1 = 1$ atau 2 (sebab $k \geq 2$) sehingga $k = 2$ dan 3, atau $n = k^2 = 4$ atau 9.

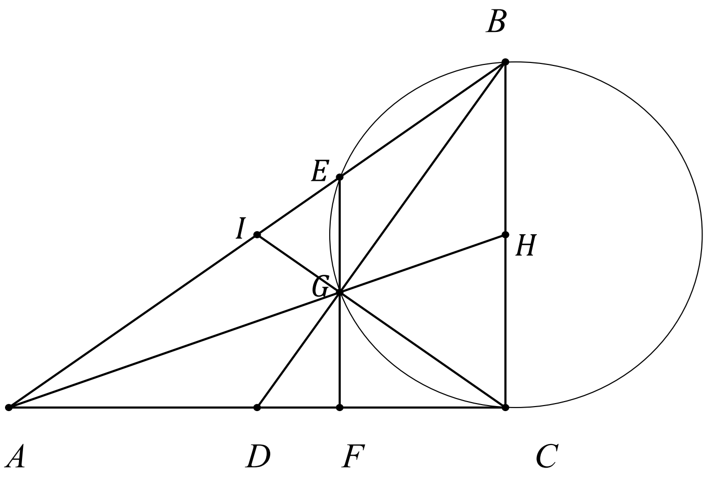
Kasus 2. Untuk $n = k^2+k+1$: maka $k-1|k^2+k \Leftrightarrow k-1|k^2+k+2-(k-1)(k+2) = k^2+k+2-(k^2+k-2) = 4$, sehingga $k-1 = 1,2,$ atau 4, yakni $k = 2,3,$ atau 5.

Maka $n = 2^2+2+1 = 7$, atau $n = 3^2+3+1 = 13$, atau $n = 5^2+5+1 = 31$.

Maka semua solusi sudah ditemukan.

8. **Jawaban :**

Bukti.



Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa jika $\angle AEC = \angle DGC$, maka $\angle ACB = 90^\circ$, lalu sebaliknya. Untuk itu, misalkan $EG \cap AC = F$, $AG \cap BC = H$, dan $CG \cap AB = I$.

Lemma

CGEB siklis.

Bukti. Tinjau

$$\angle CGB = 180^\circ - \angle CGD = 180^\circ - \angle CEA = \angle CEB$$

sehingga $CGEB$ siklis.

Karena $CGEB$ adalah trapesium siklis, maka diperoleh

$$\angle EGC = 180^\circ - \angle EBC = \angle GEB$$

sehingga panjang $GC = EB$. Kita punya panjang. $CI = \frac{3}{2}CG$. Di sisi lain, karena $EG \parallel BH$, maka $\triangle AEF \sim \triangle ABC$. Sehingga kita punya

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AG}{GH} = \frac{2}{1} \implies AE = 2EB = 2GC.$$

Kita peroleh $AB = AE + EB = 3GC \implies AI = \frac{3}{2}GC = CI$. Karena panjang $AI = CI = BI$, maka I adalah titik pusat (ABC). Akibatnya, $\angle ACB = 90^\circ$.

Untuk pembuktian dari kanan ke kiri. Seperti pada bagian sebelumnya, kita peroleh $AE : EB = 2 : 1$. Secara analog, kita peroleh juga $\triangle AFG \sim \triangle ACH$ dan didapatkan $AF = 2FC$ dan $GF = \frac{2}{3}HC = \frac{1}{3}BC$. Kita peroleh juga $AD = \frac{1}{2}AC$ dan $DF = \frac{1}{6}AC$. Karena $EF \parallel BC$, maka $\angle AFE = 90^\circ$. Dari teorema Pythagoras pada $\triangle FGC$, kita peroleh

$$GC = \sqrt{FC^2 + FG^2} = \sqrt{\frac{AC^2}{9} + \frac{CB^2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{AC^2 + CB^2}.$$

Di sisi lain, pada $\triangle ABC$:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} \implies AE = \frac{2}{3}\sqrt{AC^2 + BC^2}.$$

Tinjau bahwa $\frac{CD}{CA} = \frac{1}{2} = \frac{CG}{AE}$. Tinjau bahwa I titik pusat (ABC), kita peroleh $\angle GCD = \angle ICA = \angle IAC = \angle EAC$ (serta mengingat perbandingan $AE : GC = AC : DG$), maka kita dapatkan $\triangle DCG \sim \triangle CAE$ sehingga berakibat $\angle DGC = \angle AEC$.

9. **Jawaban :**

Bukti. Motivasi dari pengerjaan ini adalah dengan meninjau beberapa hal yang dapat dilakukan terlebih dahulu.

Lemma

Semua bilangan rasional $\frac{a}{b} \in \left[1, \frac{2022}{2021}\right] \in X$.

Bukti. Ambil sembarang rasional $\frac{a}{b} \in \left[1, \frac{2022}{2021}\right]$. Tinjau bahwa $2021 \leq \frac{2021a}{b} \leq 2022$ dan 2021 $\in X$, maka oleh syarat (i) dan (ii), mengambil $x = \frac{2021a}{b}$ dan $y = 2021$, diperoleh

$$\frac{\frac{2021a}{b}}{2021} = \frac{a}{b} \in X$$

Selanjutnya, kita akan coba membuktikan bahwa semua bilangan asli termuat di X.

Lemma

Semua bilangan asli $n \in X$.

Bukti. Kita akan memulai dari menunjukkan $1 \in X$, ini mudah sebab mengambil $x = y \in X$ memenuhi (sebab $x = y > 0$). Lalu, dengan ini, kita buat suatu klaim.

Klaim - *Semua bilangan asli $m \geq 2021 \in X$.*

Kita akan membuktikan dengan induksi. Diketahui bahwa $1, 2021, 2022 \in X$. Maka, dengan mengambil $x = 1, y = 2022$ diperoleh $\frac{1}{2022} \in X$. *Base case* dari induksi diselesaikan terlebih dahulu. Karena

$$1 < \frac{2023}{2022} < \frac{2022}{2021} \quad \text{maka} \quad \frac{2023}{2022} \in X$$

sebab jelas nilainya rasional. Maka, mengambil $x = \frac{2023}{2022}$ dan $y = \frac{1}{2022}$, diperoleh bahwa

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{2023}{2022}}{\frac{1}{2022}} = 2023 \in X.$$

Dengan cara yang sama, misalkan suatu bilangan bulat positif $n \in X$, maka $\frac{1}{n} \in X$ dengan mengambil $x = 1$ dan $y = n$. Sekarang tinjau bahwa jika $m > n$ bulat positif, hal ini ekuivalen dengan menyatakan bahwa

$$mn + n < mn + m \iff n(m+1) < m(n+1) \iff \frac{m+1}{m} < \frac{n+1}{n} \leq \frac{2022}{2021}.$$

Dan jelas bahwa $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$, sehingga $\frac{n+1}{n} \in X$. Ini artinya mengambil $x = \frac{n+1}{n}$ dan $y = \frac{1}{n}$, diperoleh

$$\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}} = n + 1 \in X,$$

sehingga induksinya terbukti.

Maka, sekarang, cukup membuktikan bahwa semua bilangan asli $2 \leq m \leq 2020$ di X. Untuk itu, ambil $x = 2021m$ dan $y = 2021$. Karena $2021m \in \mathbb{Z}$ dan $2021m \geq 4042 \geq 2021$, maka $2021m \in X$. Sehingga diperoleh bahwa

$$\frac{x}{y} = \frac{2021m}{2021} = m \in X.$$

Karena oleh definisi bilangan rasional, sembarang bilangan rasional positif dapat dituliskan sebagai $\frac{a}{b}$ dengan $\gcd(a,b) = 1$ serta $a,b \in \mathbb{N}$, mengambil $x = a$ dan $y = b$ menghasilkan bilangan rasional sembarang yang diinginkan. Sehingga terbukti semua bilangan rasional positif termuat di dalam X.

10. **Jawaban :**

Bukti. Jawabannya adalah tidak. Hal tersebut akan dibuktikan, sebagai berikut:

Kita ingin mengubinkan 76 petak, atau akan menggunakan tepat 38 domino (karena kita tidak ingin ada domino yang tumpang tindih). Perhatikan bahwa setiap domino memotong tepat 1 garis. Asumsikan dengan kontradiksi, kita bisa mengubinkan papan catur tersebut agar memenuhi kondisi soal. Sebelum melanjutkan, untuk mempermudah penulisan, kita akan memberi nama setiap kolom dan baris, yakni kolom/baris n untuk $1 \leq n \leq 9$, yang bersifat terurut dari kiri ke kanan untuk kolom, dan atas ke bawah untuk baris. Lalu, namakan garis vertikal dari kiri ke kanan sebagai $v_1, v_2, \cdots, v_8$, dan garis horizontal dari atas ke bawah sebagai $h_1, h_2, \cdots, h_8$, secara berurutan.

Lemma

Banyaknya domino horizontal yang menutupi kolom-kolom 2, 4, 6, dan 9 adalah ganjil.

Bukti. Tinjau bahwa banyaknya petak pada kolom 2, 4, 6, dan 9 adalah ganjil (yakni: 9,9,9,7). Selanjutnya, perhatikan bahwa domino vertikal akan menutupi kolom tersebut sebanyak tepat 2 petak, sementara domino horizontal menutupi kolom tersebut sebanyak 1 petak. Jadi, mengingat bahwa banyaknya petak pada kolom-kolom tersebut ganjil, banyaknya domino horizontal yang menutupi kolom tersebut pasti ganjil.

Setiap domino horizontal pada kolom n akan memotong antara $v_n - 1$ atau v_n. Perhatikan dalil berikut.

Lemma

Garis v_1 dan v_2 pasti dipotong oleh minimal 5 domino. Maka garis-garis $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ dipotong oleh minimal 15 domino.

Bukti. Karena v_1 dan v_2 masing-masing harus dipotong oleh minimal 2 domino, dan setiap domino hanya bisa memotong salah satu dari garis vertikal tersebut, maka harus terdapat minimal 4 domino horizontal pada kolom 2. Mengingat banyaknya domino horizontal harus ganjil, maka terdapat minimal 5 domino horizontal yang salah satu petaknya pada kolom 2. Maka banyaknya domino agar dapat memotong garis-garis $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ masing-masing dipotong minimal 2 kali memerlukan setidaknya $5 + 5 + 5 = 15$ domino.

Sekarang kita perlu memperhatikan banyaknya domino minimum yang dapat memotong garis v_7 dan v_8.

Lemma

Garis v_7 dan v_8 minimal dipotong oleh 5 domino.

Bukti. Dengan argumen yang serupa, karena terdapat 7 petak pada kolom 9, garis v_8 harus dipotong oleh setidaknya 3 domino. Selain itu, domino-domino yang sudah ada tidak mungkin memotong garis v_7. Jadi harus terdapat setidaknya 2 petak horizontal yang menutupi kolom 7 dan 8. Sehingga diperlukan minimal $2 + 3 = 5$ domino.

Jadi banyaknya domino minimal agar semua garis vertikal dipotong oleh sedikitnya dua domino ini tercapai, adalah $15 + 2 + 3 = 20$.

Analog, untuk garis-garis horizontal, baris 2, 4, dan 6 juga memiliki 9 petak, sementara baris 9 memiliki 7 petak. Dengan argumen yang serupa, kita juga perlu setidaknya 20 domino yang menutupi garis-garis horizontal yang ada. Namun, $20 + 20 = 40 > 38$, sementara kita hanya bisa memuat 38 domino pada papan catur tersebut, yang merupakan suatu kontradiksi.