PEMBAHASAN
OSP MATEMTIKA SMA
TAHUN 2020

1. **Jawaban :**
   Perhatikan, kita akan membagi dua kasus yaitu:
   - Untuk $\frac{n}{5}$ bulat
     Dapat dimisalkan n = 5p, untuk p bilangan cacah, maka diperoleh
     $\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{5p}{5}\right\rfloor = p.$
     Perhatikan juga bahwa 8 membagi $\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor$, maka dapat dimisalkan p = 8r untuk r bilangan cacah, sehingga n = 40r.
     Mengingat 8 tidak membagi n, maka hal ini jelas kontradiksi dengan n = 40r = 8(5r).
     Jadi, untuk kasus $\frac{n}{5}$ bulat, tidak ada n yang memenuhi.
   - Untuk $\frac{n}{5}$ tidak bulat
     Dapat dimisalkan n = 5p + q, untuk p bilangan cacah dan q = 1,2,3,4, maka diperoleh $\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{5p+q}{5}\right\rfloor = p + \left\lfloor\frac{q}{5}\right\rfloor = p.$
     Perhatikan juga bahwa 8 membagi $\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor$, maka dapat dimisalkan p = 8r untuk bilangan r bilangan cacah,
     Sehingga n = 40r + q
     Mengingat n < 800, sehingga
     $n < 800 \Rightarrow 40r + q < 800$
     $\Leftrightarrow \quad r \leq 19$
     Diperoleh $r \in \{0,1,2, \ldots, 19\}$ dan $n(r) = 20$.
     Karena 8 tidak membagi n, maka ada 4 buah n untuk setiap r dengan q = 1,2,3,4.
     Jadi, jelas bahwa banyak n yang memenuhi adalah 4 x 20 = 80.

   Jadi, banyak n yang memenuhi adalah 80.
2. **Jawaban :**
   Perhatikan bahwa pada bagian pertama terdiri dari 3 soal, dengan dua pilihan. Artinya terdapat $2^3 = 8$ kemungkinan jawaban berbeda.

Sedangkan, pada bagian kedua terdiri dari 5 soal pilihan ganda dengan lima pilihan. Artinya terdapat $5^5 = 3125$ kemungkinan jawaban berbeda.
Sehingga total banyak kemungkinan jawaban berbeda adalah 8 x 3125 = 25000 kemungkinan.
Dengan Pigeon Hole Principle (PHP) agar senantiasa terdapat dua siswa dengan jawaban sama persis pada kedua bagian sosial, maka banyak siswa minimal adalah 25000 + 1 = 25001 siswa.

3. **Jawaban :**

Perhatikan, $A = \sqrt{\log x}$, $B = \sqrt{\log y}$, sehingga jelas bahwa $A, B \geq 0$.

$$C = \log \sqrt{x} = \log x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\log x}\right)^2 = \frac{1}{2}A^2$$

$$D = \log \sqrt{y} = \log y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\log y}\right)^2 = \frac{1}{2}B^2$$

Padahal, $A + B + C + D = 24$, sehingga

$$\begin{aligned} A + B + C + D = 24 \quad &\Rightarrow A + B + \tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{2}B^2 = 24 \\ &\Leftrightarrow 2A + 2B + A^2 + B^2 = 48 \\ &\Leftrightarrow (A+1)^2 + (B+1)^2 = 50 \end{aligned}$$

Jelas bahwa (A,B) = {(0,6),(4,4),(6,0)}.
Perhatikan lagi,
Untuk (A,B) = (4,4) diperoleh

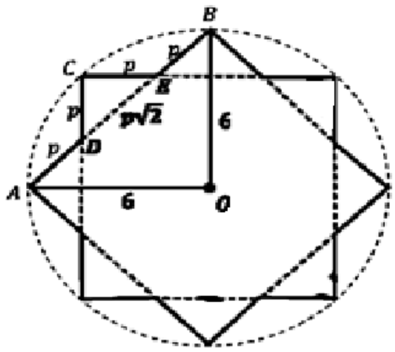
$$\begin{aligned} xy = 10^n \Rightarrow \quad n &= \log xy \\ &= \log x + \log y \\ &= (\sqrt{\log x})^2 + (\sqrt{\log y})^2 \\ &= A^2 + B^2 \\ &= 4^2 + 4^2 \\ &= 16 + 16 \\ &= 32 \end{aligned}$$

Untuk (A,B) = {(0,6),(6,0)} diperoleh

$$\begin{aligned} xy = 10^n \Rightarrow \quad n &= \log xy \\ &= \log x + \log y \\ &= (\sqrt{\log x})^2 + (\sqrt{\log y})^2 \\ &= A^2 + B^2 \\ &= 6^2 + 0^2 \\ &= 36 + 0 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 32 atau 36.

4. **Jawaban :**



Perhatikan, dari gambar dibawah diperoleh

$$AD + DE + EB = 6\sqrt{2} \Rightarrow 2p + p\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow p(2+\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow p = \frac{6\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow p = 6(\sqrt{2}-1)$$

Diperoleh $p^2 = \left(6(\sqrt{2}-1)\right)^2 = 36(3-2\sqrt{2})$

Sehingga, keliling bangun tersebut adalah

$$K = 16p \Rightarrow \quad K = 16\left(6(\sqrt{2}-1)\right)$$
$$= 96(\sqrt{2}-1)$$

Sedangakan, luas bangun tersebut adalah

$$L = 4([AOB] + [CDE]) \Rightarrow \quad L = 4\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6 + \frac{1}{2}p^2\right)$$
$$= 4\left(18 + 18(3-2\sqrt{2})\right)$$
$$= 144\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

Jadi $\left(\frac{L}{K}\right)^2 = \left(\frac{144\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{96(\sqrt{2}-1)}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$

5. **Jawaban :**

Perhatikan, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ artinya A_1 dan A_2 adalah dua himpunan bagian yang berbeda Kemudian, $A_1 \cup A_2 \subseteq A_3$ artinya $|A_1| + |A_2| \leq |A_3|$. Sedangkan, $A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_6$ artinya $|A_3| \leq \cdots \leq |A_6|$.

Sehingga, akan kita bagi kasus-kasus sebagai berikut

- $|A_1| = |A_2|$
  - $|A_1| = |A_2| = 1$, sehingga $(|A_3|,|A_4|,|A_5|,|A_6|) = (2,2,2,2)$, $(2,2,2,3)$, $(2,2,3,3)$, $(2,3,3,3)$, $(3,3,3,3)$, $(2,2,2,4)$,$(2,2,4,4)$,$(2,4,4,4)$,$(4,4,4,4)$,$(2,2,3,4)$,$(2,3,3,4)$,$(2,3,4,4)$,$(3,3,3,4)$,$(3,3,4,4)$,$(3,4,4,4)$.

    Banyak $(A_1,A_2) = \binom{4}{1}\binom{3}{1} = 12$

    Banyak $(A_3,A_4,A_5,A_6) = \binom{2}{0} + 4\left(\binom{2}{1} + \binom{2}{2}\right) + 6\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 25$

    Jadi, banyak $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6) = 12 \times 25 = 300$
  - $|A_1| = |A_2| = 2$, sehingga $(|A_3|,|A_4|,|A_5|,|A_6|) = (4,4,4,4)$

    Banyak $(A_1,A_2) = \binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 6$

    Banyak $(A_3,A_4, A_5,A_6) = 1$

    Jadi, banyak $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6) = 6 \times 1 = 6$
- $|A_1| \neq |A_2|$
  - $|A_1| = 1 \wedge |A_2|$ 2, dan sebaliknya sehingga $(|A_3|,|A_4|,|A_5|,|A_6|) = (3,3,3,3)$,$(3,3,3,4)$,$(3,3,4,4)$,$(3,4,4,4)$,$(4,4,4,4)$.

    Banyak $(A_1,A_2) = 2!\binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 24$

    Banyak $(A_3,A_4, A_5,A_6) = \binom{1}{0} + 4\binom{1}{1} = 5$

    Jadi, banyak $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6) = 24 \times 5 = 120$
  - $|A_1| = 1 \wedge |A_2|$ 3, dan sebaliknya sehingga $(|A_3|,|A_4|,|A_5|,|A_6|) = (4,4,4,4)$

    Banyak $(A_1,A_2) = 2!\binom{4}{1} + \binom{3}{3} = 8$

    Banyak $(A_3,A_4, A_5,A_6) = 1$

    Jadi, banyak $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6) = 8 \times 1 = 8$

Jadi, total banyak $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6) = 300 + 6 + 120 + 8 = 434$.

6. **Jawaban :**

Perhatikan, misal $4n + 808 = 4(n + 202)$ artinya $n + 202$ juga merupakan bilangan kuadrat.

Misalkan $n + 202 = a^2$ dan $9n + 1621 = b^2$ maka diperoleh

$9n + 1621 = b^2 \quad \Rightarrow 9(n + 180) + 1 = b^2$

$\Leftrightarrow 9(n + 202 - 22) + 1 = b^2$
$\Leftrightarrow 9(a^2 - 22) + 1 = b^2$
$\Leftrightarrow 9a^2 - 197 = b^2$
$\Leftrightarrow 9a^2 - b^2 = 197$
$\Leftrightarrow (3a + b)(3a - b) = 197$

Karena 197 bilangan prima, sehingga $3a + b = 197$ dan $3a - b = 1$.

Sehingga,

$$\begin{array}{l} 3a + b = 197 \\ \underline{3a - b = \quad 1}_{+} \\ \quad 6a = 198 \Rightarrow a = 33 \end{array}$$

Jadi, $n + 202 = a^2 \Rightarrow n + 202 = 33^2$
$\Leftrightarrow n + 202 = 1089$
$\Leftrightarrow n = 1089 - 202$
$\Leftrightarrow n = 887$

7. **Jawaban :**

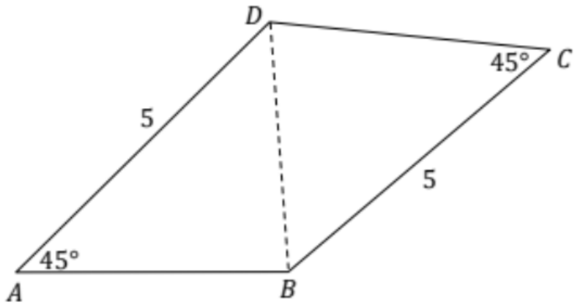
Perhatikan, misal $u_1 = a$ diperoleh

$$\begin{aligned} u_1 &= a \\ u_2 &= a + 1 \\ u_3 &= a + 1 + 2 \\ u_4 &= a + 1 + 2 + 1 \\ u_5 &= a + 1 + 2 + 1 + 2 \\ &\vdots \\ u_{20} &= a + 1 + 2 + 1 + 2 + \cdots + 1 \end{aligned}$$
$+$

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = 20a + 1(19 + 17 + \cdots + 1) + 2(18 + 16 + \cdots + 2) \Rightarrow 360 = 20a + 100 + 180$$
$\Leftrightarrow 360 = 20a + 280$
$\Leftrightarrow 20a = 360 - 280$
$\Leftrightarrow 20a = 80$
$\Leftrightarrow a = 4$

8. **Jawaban :**

Perhatikan ilustrasi berikut



Dengan aturan kosinus diperoleh

$BD^2 = AB^2 + 5^2 - 2 \cdot AB \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ$

$\underline{BD^2 = CD^2 + 5^2 - 2 \cdot CD \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ}$ -

$0 = AB^2 - CD^2 + 10(CD - AB) \cos 45^\circ \Rightarrow \quad CD^2 - AB^2 = 5\sqrt{2}(CD - AB)$

$\Leftrightarrow (CD + AB)(CD - AB) = 5\sqrt{2}(CD - AB)$

$\Leftrightarrow \quad CD + AB = 5\sqrt{2}$

Sehingga, keliling ABCD = (BC + AD) + (CD+AB) = $10 + 5\sqrt{2}$

Sehingga, p = 10, q = 5, dan r = 2.

Jadi, p + q + r = 10 + 5 + 2 = 17

9. Jawaban :

Perhatikan,

$$P\left(x + \frac{2}{x}\right) = \frac{x^3+1}{x} + \frac{x^3+8}{2x^2} + 3 \quad \Rightarrow P\left(x + \frac{2}{x}\right) = x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + 3$$

$$\Leftrightarrow P\left(x + \frac{2}{x}\right) = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - 1$$

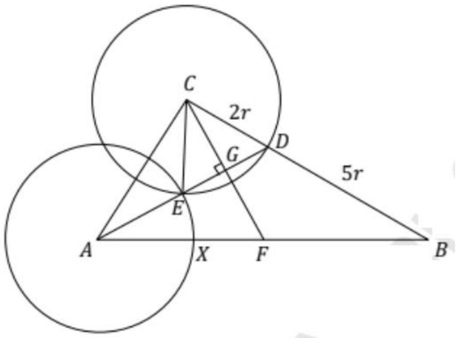
$$\Leftrightarrow P\left(x + \frac{2}{x}\right) = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - 1$$

Misal $x + \frac{2}{x} = y$, maka diperoleh $P(y) = y^2 + \frac{1}{2}y - 1$

Jadi, $P(1) = 1^2 + \frac{1}{2}(1) - 1 = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

10. Jawaban :

Perhatikan,



Dari garis bagi diperoleh

$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

Sehingga, misal CE = CD = 2r, maka diperoleh BD = 5r.

Misal, F pada AB sedemikian sehingga AD tegak lurus CF di titik G, akibatnya AC = AF = 6 sehingga BF = 9 dan CE = CD = 2r dan GE = GD.

Dengan menelause diperoleh

$$\frac{DG}{GA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} = 1 \quad \Rightarrow \frac{DG}{GA} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{7r}{2r} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{DG}{GA} = \frac{3}{7}$$

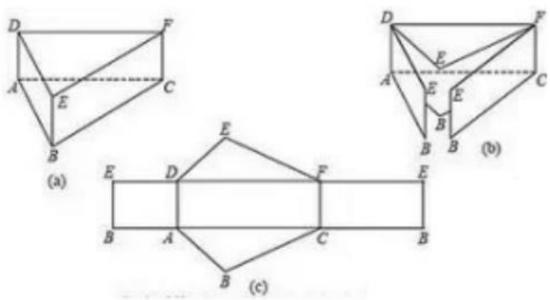
Sehingga, DG = $\frac{3}{10}$AD = $\frac{27}{10}$ dan akibatnya GA = AD – DG = $9 - \frac{27}{10} = \frac{63}{10}$.

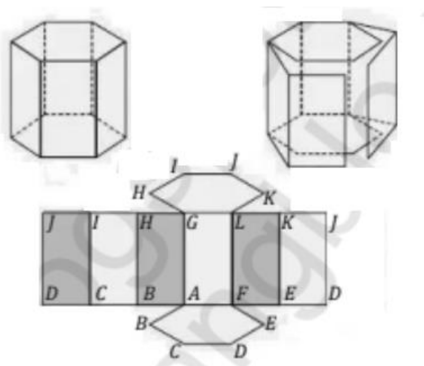
Mengingat DG = GE maka AE = AG – GE = $\frac{63}{10} - \frac{27}{10} = \frac{18}{5}$.

Dan karena AE = AX = $\frac{18}{5}$, maka BX = AB – AX = $- \frac{18}{5} = \frac{57}{5}$.

11. Jawaban :

Perhatikan ilustrasi berikut





Perhatikan dua kasus berikut

- Jika n ganjil, n = 2k + 1 untuk bilangan asli k

  Perhatikan gambar prisma segi-3 di atas, misal label pada titik-titik sudut prisma segi-3 adalah A,B,…,F ∈ {-1,1} dan diperoleh hasil perkalian label di

setiap sisi (muka) prisma segi-3 tersebut adalah ABED = ACFD = CBEF = DEF = ABC = -1.
Perhatikan juga bahwa ABED · ACFD · CBEF = $(ABC \cdot DEF)^2$
Secara umum untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$ misal $t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n = (a_1 \cdot a_2)^2$.
Sehingga, tidak mungkin n = 2k + 1.

- Jika n genap, n = 2k untuk bilangan asli k
  Perhatikan gambar prisma segi-6 di atas, misal label pada titik-titik sudut prisma segi-3 adalah A,B,…,L ∈ {-1,1} dan diperoleh hasil perkalian label di setiap sisi (muka) prisma segi-3 tersebut adalah CDJI = BCIH = … = DEKJ = ABCDEF = GHIJKL = -1.
  Untuk n genap maka dapat kita ambil sisi (muka) tegak selang-seling, yaitu:
  - Sisi (muka) tegak prisma segi-6 yang diarsir pada gambar, maka diperoleh CDIJ · ABHG · EFLK = ABCDEF · GHIJKL.
  - Sisi (muka) tegak prisma segi-6 yang tidak diarsir pada gambar, maka diperoleh BCIH · FAGL · DEKJ = ABCDEF · GHIJKL.

  Sehingga secara umum untuk n = 2k, dengan $k \geq 2$ maka berlaku $t_1 \cdot t_3 \cdot \ldots \cdot t_{2k-1} = t_2 \cdot t_4 \cdot \ldots \cdot t_{2k} = a_1 \cdot a_2$

  Akan diperiksa untuk k = 2m dan k = 2m + 1 untuk bilangan asli m.

  - Jika n = 2(2m + 1) = 4m + 2
    Secara umum, untuk n = 4m + 2, misal kita ambil sisi (muka) tegak selang-seling dari prisma segi-n maka akan berlaku $t_1 \cdot t_3 \cdot \ldots \cdot t_{4m+1} = t_2 \cdot t_4 \cdot \ldots \cdot t_{4m+2} = a_1 \cdot a_2$.
    Perhatikan $t_2 \cdot t_4 \cdot \ldots \cdot t_{4m+2} = (-1)^{2m+1} = (-1)^{2m} \cdot (-1) = ((-1)^2)^m \cdot (-1) = -1$.
    Padahal, $a_1 \cdot a_2 = (-1)(-1) = 1 \neq -1$. Jadi $t_2 \cdot t_4 \cdot \ldots \cdot t_{4m+2} \neq a_1 \cdot a_2$.
    Sehingga, tidak mungkin n = 4m + 2.
  - Jika n = 2(2m) = 4m
    Secara umum untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$ misal $t_1, t_2, \ldots, t_n$ adalah sisi (muka) alas dan atas dari prisma segi-n, maka berlaku $t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n = (a_1 \cdot a_2)^2$.
    Maka untuk n = 4m, diperoleh $t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_{4m} = (-1)^{4m} = 1$.
    Periksa juga, $(a_1 \cdot a_2)^2 = ((-1)(-1))^2 = 1$.
    Dan,

Secara umum, untuk n = 4m, misal kita ambil sisi (muka) tegak selang-seling dari prisma segi-n maka akan berlaku $t_1 \cdot t_3 \cdot \ldots \cdot t_{4m-1} = t_2 \cdot t_4 \cdot \ldots \cdot t_{4m} = a_1 \cdot a_2$.

Perhatikan $t_2 \cdot t_4 \cdot \ldots \cdot t_{4m} = (-1)^{2m} = ((-1)^2)^m = 1$.

Periksa juga, $a_1 \cdot a_2 = (-1)(-1) = 1$.

Jadi, dapat dikonstruksi label pada setiap titik sudut prisma segi-n dengan n = 4m sehingga berlaku $t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_{4m} = (a_1 \cdot a_2)^2$ dan $t_2 \cdot t_4 \cdot \ldots \cdot t_{4m} = a_1 \cdot a_2$.

Sehingga, untuk $23 \leq n \leq 54$ nilai n yang memenuhi adalah 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52.

Jadi, hasil penjumlahan semua n adalah 24 + 28 + 32 + 36 + 40 + 44 + 48 + 52 = 304.

12. Jawaban :

Perhatikan, $\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{y}\right) = 139 \quad \Rightarrow 1+\frac{3x}{5y}+\frac{5y}{3x}+1 = 139$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{5y}+\frac{5y}{3x} = 137$$

Padahal, $\frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

Misal $a = \frac{x}{y}$ maka diperoleh $\frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$ dan $\frac{3x}{5y}+\frac{5y}{3x} = \frac{3a}{5}+\frac{5}{3a}$.

Sehingga, $\frac{3a}{5}+\frac{5}{3a} = 137 \quad \Rightarrow 9a^2+25 = 2055a$

$$\Leftrightarrow 9a^2-2055a+25 = 0$$

Dengan teorema vieta diperoleh $a_1 + a_2 = \frac{2055}{9}$ dan $a_1\, a_2 = \frac{25}{9}$.

Jika $M = \sqrt{a_1}+\frac{1}{\sqrt{a_1}}$ dan $m = \sqrt{a_2}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}$ dengan m < M, sehingga

$$\begin{aligned}(M-m)^2 &= \left(\sqrt{a_1}+\frac{1}{\sqrt{a_1}}-\sqrt{a_2}-\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right)^2\\ &= \frac{((\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})(\sqrt{a_1a_2}-1))^2}{(\sqrt{a_1a_2})^2}\\ &= \frac{((a_1+a_2)-2\sqrt{a_1a_2})(\sqrt{a_1a_2}-1))^2}{a_1a_2}\end{aligned}$$

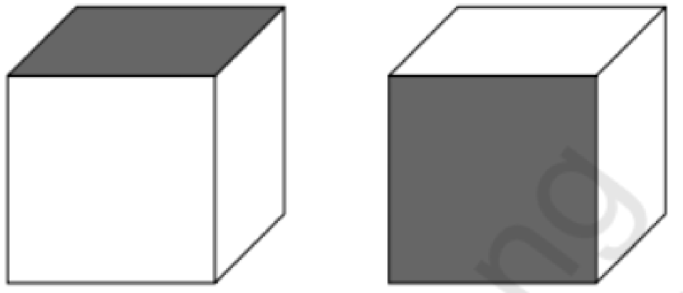
Diperoleh,

$$(M-m)^2 = \frac{\left(\frac{2055}{9}-2\sqrt{\frac{25}{9}}\right)\left(\sqrt{\frac{25}{9}}-1\right)^2}{\frac{25}{9}} = 36$$

Jadi, $M-m = 6$.

13. Jawaban :

Perhatikan ilustrasi berikut



Ada dua kemungkinan posisi sisi berwarna hitam.

- Sisi berwarna hitam sebagai sisi tegak.
  Pemutaran pada rusuk alas apapun, maka sisi berwarna hitam memiliki peluang sama besar untuk menjadi sisi tegak maupun bukan sisi tegak.
  Kita kodekan sebagai TB atau TT, masing-masing bernilai $\frac{1}{2}$.
- Sisi berwarna hitam bukan sisi tegak.
  Pemutaran pada rusuk alas apapun, maka sisi berwarna hitam pasti akan menjadi sisi tegak.
  Kita kodekan sebagai BT, bernilai 1.

Misal diperoleh kode BTBTT artinya pada putaran pertama sisi berwarna hitam akan menjadi bukan sisi tegak (B), lalu pada putaran kedua sisi hitam akan menjadi sisi tegak (T), begitu seterusnya. Peluang kejadian dapat dihitung dengan memperhatikan kode TB dan TT, ada dua kali yaitu BTBTT dan BTBTT, yaitu $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Sehingga, jika sisi berwarna hitam adalah mula-mula bukan merupakan sisi tegak, maka jika kubus tersebut diputar pada salah satu rusuk pada alasnya berganti, dan diulangi sampai 8 kali akan diperoleh kombinasi sebagai berikut

- Ada sebanyak $\binom{3}{0}$ kemungkinan 3 buah BT, sehingga ada 4 buah TB atau TT peluangnya $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.
- Ada sebanyak $\binom{4}{2}$ kemungkinan 2 buah BT, sehingga ada 5 buah TB atau TT peluangnya $\left(\frac{1}{2}\right)^5$.
- Ada sebanyak $\binom{5}{4}$ kemungkinan 1 buah BT, sehingga ada 6 buah TB atau TT peluangnya $\left(\frac{1}{2}\right)^6$.

- Ada sebanyak $\binom{6}{6}$ kemungkinan 0 buah BT, sehingga ada 7 buah TB atau TT peluangnya $\left(\frac{1}{2}\right)^7$.

Peluang bahwa dalam 8 kali pemutaran, sisi berwarna hitam bukan sisi tegak lagi adalah

$$\sum_{i=0}^{3}\binom{3+i}{2i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4+i} = \binom{3}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{43}{128}.$$

14. Jawaban :

Jika Panjang garis tinggi terpanjang suatu segitiga adalah 8 dan Panjang garis tinggi yang lain 3, maka Panjang garis tinggi ketiga yang merupakan bilangan prima adalah 2 atau 3 atau 5 atau 7.

Akan diperiksa satu-persatu kasus tersebut

- Jika garis tinggi ketiga adalah 2.
  KPK(2,3,8) = 24, jadi perbandingan sisi segitiga dengan *a* Panjang sisi segitiga terpanjang adalah $a : b : c = \frac{24}{2} : \frac{24}{3} : \frac{24}{8} = 12 : 8 : 3$.
  Periksa apakah dapat dibentuk segitiga? Misal berturut-turut *a,b,c* adalah 12*x*, 8*x*, 3*x*, maka segitiga harus memenuhi ketaksamaan segitiga berikut
  $b + c > a \Rightarrow 8x + 3x \ngtr 12x$ (bukan segitiga)
- Jika garis tinggi ketiga adalah 3.
  KPK(3,3,8) = 24, jadi perbandingan sisi segitiga dengan *a* Panjang sisi segitiga terpanjang adalah $a : b : c = \frac{24}{2} : \frac{24}{3} : \frac{24}{8} = 8 : 8 : 3$.
  Periksa apakah dapat dibentuk segitiga? Misal berturut-turut *a,b,c* adalah 8*x*, 8*x*, 3*x*, maka segitiga harus memenuhi ketaksamaan segitiga berikut
  $b + c > a \Rightarrow 8x + 3x > 12x$ (benar *a,b,c* adalah sisi-sisi segitiga)
  Periksa juga apakah segitiga tumpul? Segitiga tumpul harus memenuhi ketaksamaan berikut
  $b^2 + c^2 < a^2 \Rightarrow (8x)^2 + (3x)^2 < (8x)^2$
  $\Leftrightarrow 64x^2 + 9x^2 < 64x^2$
  $73x^2 \nless 64x^2$ (bukan segitiga tumpul)
- Jika garis tinggi ketiga adalah 5.
  KPK(3,5,8) = 120, jadi perbandingan sisi segitiga dengan *a* Panjang sisi segitiga terpanjang adalah $a : b : c = \frac{120}{3} : \frac{120}{5} : \frac{120}{8} = 40 : 24 : 15$.
  Periksa apakah dapat dibentuk segitiga? Misal berturut-turut *a,b,c* adalah 40*x*, 24*x*, 15*x*, maka segitiga harus memenuhi ketaksamaan segitiga berikut

$b + c > a \Rightarrow 24x + 15x \ngtr 40x$ (bukan segitiga)

- Jika garis tinggi ketiga adalah 7.
  KPK(3,7,8) = 168, jadi perbandingan sisi segitiga dengan *a* Panjang sisi segitiga terpanjang adalah $a : b : c = \frac{168}{3} : \frac{168}{7} : \frac{168}{8} = 56 : 24 : 21$.
  Periksa apakah dapat dibentuk segitiga? Misal berturut-turut *a,b,c* adalah 56*x*, 24*x*, 21*x*, maka segitiga harus memenuhi ketaksamaan segitiga berikut
  $b + c > a \Rightarrow 24x + 21x \ngtr 56x$ (bukan segitiga)

Jadi, jelas bahwa Panjang garis tinggi ketiga segitiga tersebut adalah bukan bilangan prima.

15. Jawaban :

Misal, p dan q adalah bilangan bulat positif yang relative prima memenuhi

$$\frac{x}{n-1} = \frac{y}{n} = \frac{z}{n+1} = \frac{p}{q}$$

Maka, $q|(n-1) \wedge n \wedge (n+1)$.

Padahal salah satu nilai n adalah 10. Sehingga, $q|9 \wedge 10 \wedge 11$, sehingga jelas $q = 1$.

Sehingga, $x = p(n-1)$, $y = pn$, $z = p(n+1)$

Diperoleh,

$$x + y + z = m \quad \Rightarrow p(n-1) + pn + p(n+1) = m$$
$$\Leftrightarrow 3pn = m$$

Sehingga, 3|m, jadi untuk r bilangan asli maka m = 3r, jadi r = pn.

Karena ada tepat 32 bilangan asli n > 1, maka ada tepat 33 faktor bulat positif dari r. Ini sama halnya dengan kita mencari bilangan bulat kelipatan 10 yang tepat memiliki 33 faktor bulat positif. Dimana m yang memenuhi adalah $m = 2^2 \cdot 5^{10}$ atau $m = 2^{10} \cdot 5^2$.

Jadi, bilangan asli k terbesar yang memenuhi adalah 2.

16. Jawaban :

Perhatikan,

$$H = \frac{10n^2+25}{n+2} = \frac{10(n^2-4)+65}{n+2} = 10(n-2) + \frac{65}{n+2}$$

Sehingga, (n + 2) haruslah factor bulat positif dari 65.

Diperoleh n + 2 = {1,5,13,65} maka n = {-1,3,11,63}.

Maka, n bilangan asli yang memenuhi adalah n = {3,11,63}

Sehingga,

$$H|_{n=3} = 10(3-2) + \frac{65}{3+2} = 10 + 13 = 23$$

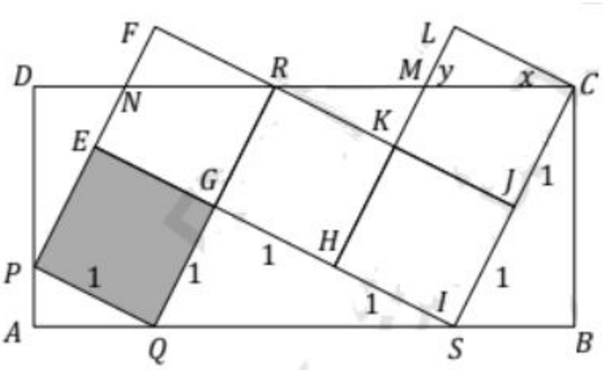
$H|_{n=11} = 10(11-2) + \frac{65}{11+2} = 90 + 5 = 95$

$H|_{n=63} = 10(63-2) + \frac{65}{63+2} = 610 + 1 = 611$

Jadi, jumlah semua anggota $H = 23 + 95 + 611 = 729$.

17. Jawaban :

Perhatikan gambar berikut.



Mengingat ABCD persegi Panjang dan lima persegi kecil, misal $\angle MCL = x$ dan $\angle CML = y$, maka

$\angle MCL = \angle MRK = \angle NRF = \angle NPD = \angle PQA = \angle QSG = \angle SCB = x$.

$\angle CML = \angle RMK = \angle RNF = \angle PND = \angle QPA = \angle SQG = \angle CSB = y$.

Sehingga $\Delta MCL \sim \Delta MRK \sim \Delta NRF \sim \Delta NPD \sim \Delta PQA \sim \Delta QSG \sim \Delta SCB$.

Namun karena $CL = RK = RF = 1$, jelas bahwa $\Delta MCL \cong \Delta MRK \sim \Delta NRF$.

Perhatikan ΔCJR, $\tan \angle MRK = \frac{CJ}{RJ} = \frac{1}{2}$, akibatnya $\frac{ML}{CL} = \frac{MK}{RK} = \frac{NF}{RF} = \frac{1}{2} \Rightarrow ML = MK = NF = \frac{1}{2}$.

Karena $\tan \angle MRK = \frac{1}{2}$, akibatnya $\sin \angle MRK = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ dan $\cos \angle MRK = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

Jelas bahwa $\frac{BS}{CS} = \frac{GQ}{SQ} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \Rightarrow BS = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ dan $SQ = \sqrt{5}$.

Juga diperoleh $\frac{AQ}{PQ} = \frac{BC}{SC} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \Rightarrow AQ = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ dan $BC = \frac{4}{5}\sqrt{5}$.

Sehingga, luas ABCD adalah

$[ABCD] = AB \cdot BC = (AQ + SQ + BS) \cdot BC = \left(\frac{2}{5}\sqrt{5} + \sqrt{5} + \frac{2}{5}\sqrt{5}\right) \cdot \frac{4}{5}\sqrt{5} = \frac{9}{5}\sqrt{5} \cdot \frac{4}{5}\sqrt{5} = \frac{36}{5}$

18. Jawaban :

Perhatikan, $2^{2020} | f(a)$ dan $2^{2020} | f(b)$, maka jelas bahwa $2^{2020} | (f(b) - f(a))$.

Sehingga,

$$\begin{aligned} 2^{2020} | (f(b) - f(a)) &\Rightarrow 2^{2020} | ((b^2 + pb + q) - (a^2 + pa + q)) \\ &\Leftrightarrow 2^{2020} | (b^2 - a^2 + p(b-p)) \\ &\Leftrightarrow 2^{2020} | (b+a)(b-a) + p(b-a)) \\ &\Leftrightarrow 2^{2020} | ((b-a)(b+a+p)) \end{aligned}$$

Padahal, $2^{1000} \nmid (b - a)$, maka ada bilangan bulat $1021 \le m \le 2020$ sehingga $2^m | (b + a + p)$.
Perhatikan juga, $2^{2020} | f(a)$ dan $2^{2020} | f(c)$, maka jelas bahwa $2^{2020} | (f(c) - f(a))$.
Sehingga,

$$\begin{aligned} 2^{2020} | (f(c) - f(a)) &\Rightarrow 2^{2020} | ((c^2 + pc + q) - (a^2 + pa + q)) \\ &\Leftrightarrow 2^{2020} | (c^2 - a^2 + p(c - p)) \\ &\Leftrightarrow 2^{2020} | (c + a)(c - a) + p(c - a)) \\ &\Leftrightarrow 2^{2020} | ((c - a)(c + a + p)) \end{aligned}$$

Padahal, $2^{1000} \nmid (c - a)$, maka ada bilangan bulat $1021 \le n \le 2020$ sehingga $2^n | (c + a + p)$.
Sehingga, karena $2^{1021} | 2^m \Rightarrow 2^{1021} | (b + a + p)$ dan $2^{1021} | 2^n \Rightarrow 2^{1021} | (c + a + p)$
Jadi, jelas bahwa $2^{1021} | ((b + a + p) - (c + a + p)) \Rightarrow 2^{1021} | (b - c)$. (Terbukti).

19. Jawaban :

Perhatikan, jika $x^2 + 20x + 20$ rasional, maka $x^2 + 20x$ juga rasional.
Begitu juga jika $x^3 - 2020x + 1$ rasional, maka $x^3 - 2020x$ juga rasional.
Untuk p dan q rasional, maka jelas bahwa $x^2 + 20x + p$ dan $x^3 - 2020x + q$ juga rasional.
Perhatikan juga bahwa $x^3 - 2020x + q \equiv (x^2 + 20x + p)(x + r)$, jelas bahwa agar kesamaan suku banyak di ruas kiri dan kanan terjadi maka $r = -20$.
Sehingga,

$$\begin{aligned} &x^3 - 2020x + q \equiv (x^2 + 20x + p)(x - 20) \\ \Leftrightarrow\ &x^3 - 2020x + q \equiv x^3 + (p - 400)x - 20p \end{aligned}$$

Dengan kesamaan suku banyak diperoleh,
$-2020 = p - 400 \Rightarrow p = -1620$
$q = -20p = -20(-1620) = 32400$
Sehingga diperoleh

$$\underbrace{x^3 - 2020x + 32400}_{\text{rasional}} \equiv (x^2 + 20x - 1620)(x - 20)$$

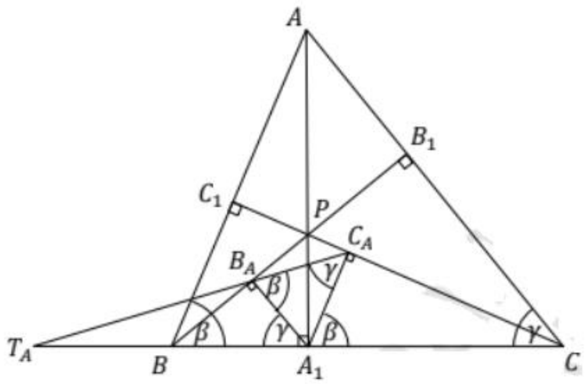
Untuk memeriksa apakah penyelesaian bilangan irrasional x, maka ada dua kasus yang bisa diamati

- Jika $x^2 + 20x - 1620 \neq 0$, maka $(x - 20)$ rasional, sehingga x adalah rasional. Hal ini tentunya kontradiksi dengan pernyataan soal bahwa x irrasional.
- Jika $x^2 + 20x - 1620 = 0$, maka diperoleh
  $x^2 + 20x - 1620 = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 20x = 1620$

$$\Leftrightarrow x^2 + 20x + 100 = 1720$$
$$\Leftrightarrow (x+10)^2 = 1720$$
$$\Leftrightarrow x + 10 = \pm\sqrt{1720}$$
$$\Leftrightarrow x + 10 = \pm 2\sqrt{430}$$
$$\Leftrightarrow x = -10 \pm 2\sqrt{430}$$

20. Jawaban :

Perhatikan,



Perhatikan $B_AA_1 \| AC$ dan $C_AA_1 \| AB$ maka $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_AC_A$ sehingga $\angle ABC = \angle A_1B_AC_A = \beta$ dan $\angle ACB = \angle A_1C_AB_A = \gamma$.

Perhatikan aturan sinus pada segitiga PB_AC_A

$$\frac{PC_A}{\sin(90^o - \beta)} = \frac{B_AP}{\sin(90^o - \gamma)} \Rightarrow \frac{PC_A}{B_AP} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

Dengan trigonometri pada segitiga A_1C_AC diperoleh

$$\frac{BB_A}{C_AC} = \frac{A_1B\cos(90^o - \gamma)}{A_1C\cos(90^o - \beta)} = \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

Padahal, dari aturan sinus pada segitiga ABC diperoleh

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{AB}{AC}$$

Sehingga,

$$\frac{BB_A}{C_AC} = \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{AB}{AC}$$

Dengan dalil Menelause pada segitiga PBC

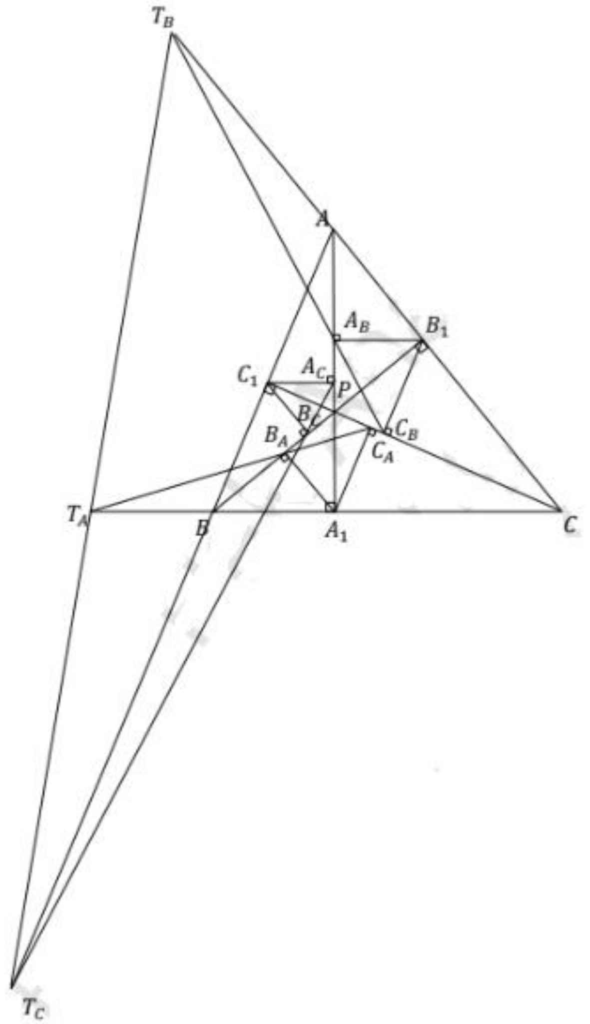
$$\frac{BB_A}{B_AP} \cdot \frac{PC_A}{C_AC} \cdot \frac{CT_A}{T_AB} = 1 \qquad \Rightarrow \frac{BB_A}{C_AC} \cdot \frac{PC_A}{B_AP} \cdot \frac{CT_A}{T_AB} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \cdot \frac{CT_A}{T_AB} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{CT_A}{T_AB} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{A_1B}{A_1C}\right)^2 \cdot \frac{CT_A}{T_AB} = 1$$

Perhatikan gambar dibawah ini, dengan cara yang sama, akan diperoleh

$$\left(\frac{B_1C}{B_1A}\right)^2 \cdot \frac{AT_B}{T_BC} = 1$$

$$\left(\frac{C_1A}{C_1B}\right)^2 \cdot \frac{BT_C}{T_CA} = 1$$



Sehingga, dengan mengalikan tiga persamaan yang sebelumnya maka diperoleh

$$\left(\frac{A_1B}{A_1C}\right)^2 \cdot \frac{CT_A}{T_AB} \cdot \left(\frac{B_1C}{B_1A}\right)^2 \cdot \frac{AT_B}{T_BC} \cdot \left(\frac{C_1A}{C_1B}\right)^2 \cdot \frac{BT_C}{T_CA} = 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B}\right)^2}_{\text{Dalil de ceva}} \cdot \frac{CT_A}{T_AB} \cdot \frac{BT_C}{T_CA} \cdot \frac{AT_B}{T_BC} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{CT_A}{T_AB} \cdot \frac{BT_C}{T_CA} \cdot \frac{AT_B}{T_BC} = 1$$

Jadi, terbukti bahwa T_A, T_B, T_C segaris (kolinear).

21. Jawaban :

Perhatikan, dari n siswa dengan k < n bulat positif untuk setiap siswa s. Misal, Permen(s) adalah banyak permen yang diperoleh siswa s, dan nilai(s) adalah nilai yang diperoleh siswa s, serta T(s) = {t|nilai(t) > nilai (s)} adalah himpunan anak lain yang nilainya lebih tinggi dari s, maka menurut informasi dari soal, untuk setiap anak s, ia mendapatkan

(i) Permen (s) = k · nilai(s)

(ii) Permen (s) = 1 · $\sum_{t \epsilon T(s)}$ (nilai(t) - nilai(s))

Sehingga, banyak permen total yang diperoleh anak s adalah

Permen(s) = k · nilai(s) + 1 · $\sum_{t \epsilon T(s)}$ (nilai(t) - nilai(s))

= (k - |T(s)|) · nilai(s) + $\sum_{t \epsilon T(s)}$ nilai(t)

Setelah semua permen dibagikan, ternyata Permen(Badu) adalah minimum dan i = |T(Badu)|.

Permen(Badu) = (k - |T(Badu)|) · nilai(Badu) + $\sum_{t \epsilon T(\text{Badu})}$ nilai(t)

= (k – i) · nilai(Badu) + $\sum_{t \epsilon T(\text{Badu})}$ nilai(t)

Kita bagi kasus menjadi dua yaitu

- Jika k – i < 0, anggap nilai Badu maksimal. Maka, ada s sehingga nilai(s) > nilai(Badu) dimana T(s) ⊆ T(Badu).

  s ϵ T(Badu), akan dipilih s agar nilai(s) seminimal mungkin.

  Permen(s) = (k – i + i - |T(s)|) · nilai(s) + $\sum_{t \epsilon T(s)}$ nilai(t)

  $$= \underbrace{(k-i)\cdot \text{nilai}(s)}_{<(k-i)\cdot \text{nilai(Badu)}} + \underbrace{(i-|T(s)|)\cdot \text{nilai}(s) + \sum_{t\epsilon T(s)} \text{nilai}(t)}_{\leq \sum_{t\epsilon T(\text{Badu})} \text{nilai}(t)}$$

  Sehingga,

  Permen(s) < (k – i) · nilai(Badu) + $\sum_{t \epsilon T(\text{Badu})}$ nilai(t) = Permen(Badu)

  Jadi, kontradiksi dengan pernyataan bahwa permen Badu minimal.

- Karena k – i < 0 tidak mungkin terjadi, maka jika k – i ≥ 0 ⇒ i ≤ k mudah dibuktikan bahwa ini bisa terjadi.

Jadi, nilai i yang mungkin adalah 0,1,2,…,k.