



JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMA

TAHUN 2015

1. Jawaban :

$$x^2 - 2x = 2 + x\sqrt{x^2 - 4x}$$

$$\text{Syarat batas : } x^2 - 4x \geq 0$$

$$x \leq 0 \text{ atau } x \geq 4$$

$$(x^2 - 2x - 2)^2 = x^2(x^2 - 4x)$$

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x = x^4 - 4x^3$$

$$8x + 4 = 0$$

$x = -\frac{1}{2}$ yang memenuhi syarat batas dan setelah diuji kembali ke soal juga memenuhi.

∴ Jadi, jumlah dari semua bilangan real x yang memenuhi adalah $-\frac{1}{2}$.

2. Jawaban :

$$(n + 1) \mid (n^2 + 1) = (n + 1)(n - 1) + 2$$

$$\text{Maka } (n + 1) \mid 2$$

$$\text{Jadi } n + 1 = \pm 1 \text{ atau } \pm 2.$$

Nilai n yang memenuhi adalah $-3, -2, 0, 1$.

∴ Jadi, banyaknya bilangan bulat n sehingga $n + 1$ membagi $n^2 + 1$ adalah 4.

3. Jawaban :

Misalkan banyaknya pria yang hadir adalah x dan banyaknya wanita yang hadir adalah y .

$$x > y$$

$${}_x C_2 + {}_y C_2 = 7$$

$$\text{Jelas bahwa } 4 \leq {}_x C_2 \leq 7$$

Nilai x yang memenuhi hanya $x = 4$ yang dipenuhi jika $y = 2$.



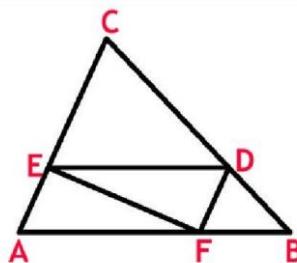
∴ Jadi, banyaknya pria yang hadir dalam pesta tersebut adalah 4.

4. Jawaban :

Karena DE sejajar AB dan DF sejajar AC maka ΔABC , ΔEDC dan ΔFBD semuanya sebangun. Jelas juga bahwa dua segitiga sebangun memiliki perbandingan panjang sisi k jika dan hanya jika perbandingan luasnya adalah k^2 .

$[\Delta DEC] = 4[\Delta BDF]$ dengan ΔDEC sebangun dengan ΔBDF .

Maka perbandingan sisi ΔDEC dan ΔBDF adalah 2 : 1.



Misalkan $BD = x$, $FB = y$ dan $DF = z$ maka $DC = 2x$, $ED = 2y$ dan $EC = 2z$. Misalkan juga $\angle BAC = \alpha$.

ΔCED sebangun dengan ΔABC dan $CD : CB = 2 : 3$ maka $AF = 2y$ dan $AE = z$

$$[\Delta AEF] = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AB \cdot \frac{1}{3} AC \cdot \sin \alpha = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{2}{9} [\Delta ABC]$$

∴ Jadi, perbandingan luas segitiga AEF dengan luas segitiga ABC adalah 2 : 9.

5. Jawaban :

$$3f(x) - 2f(2-x) = x^2 + 8x - 9 \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

Misalkan $y = 2 - x$ didapat

$$3f(2-y) - 2f(y) = (2-y)^2 + 8(2-y) - 9 \text{ yang setara dengan}$$

$$3f(2-x) - 2f(x) = (2-x)^2 + 8(2-x) - 9 \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Kalikan persamaan (1) dengan 3 dan persamaan (2) dengan 2 lalu jumlahkan, didapat

$$5f(x) = 3x^2 + 24x - 27 + 2(2-x)^2 + 16(2-x) - 18$$

$$5f(x) = 5x^2 - 5$$

$$f(2015) = 2015^2 - 1 = 4.060.224$$





∴ Jadi, nilai $f(2015)$ adalah **4.060.224**.

6. **Jawaban :**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b+1} = \frac{1}{2015}$$

Dengan syarat $a \neq 0$ atau $b \neq -1$.

Persamaan di atas setara dengan $2015a + 2015b + 2015 = ab + a$

$$ab - 2014a - 2015b = 2015$$

$$(a - 2015)(b - 2014) = 2015^2 = 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2$$

Banyaknya faktor positif dan negatif dari 2015^2 ada 54.

Maka banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi ada 54.

Tetapi $(a, b) = (0, -1)$ termasuk salah satu dari 54 penyelesaian.

Maka banyaknya penyelesaian (a, b) yang memenuhi = $54 - 1 = 53$.

∴ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi adalah **53**.

7. **Jawaban :**

Karena tidak ada keterangan jika pengantin harus berdekatan maka dapat diasumsikan bahwa pengantin tidak harus berdekatan.

Dua laki-laki dipilih dari empat laki-laki dan dua perempuan dipilih dari empat perempuan.

$$\text{Banyaknya cara} = {}^4C_2 \cdot {}^4C_2 = 36.$$

Susunan 3 laki-laki dan 3 perempuan yang memenuhi adalah LPLPLP dan PLPLPL yang masingmasing ada sebanyak $3!3! = 36$

$$\text{Jadi, banyaknya cara menyusunnya} = 36 \cdot 2 \cdot 36 = 2592$$

∴ Jadi, banyaknya cara adalah **2592**.

8. **Jawaban :**

Misalkan sudut terkecil α dan sudut terbesar 2α .

Pada segitiga berlaku, semakin besar sudut maka akan menghadap sisi yang semakin panjang.

Misalkan sisi terpendek $n - 1$ dan sisi terpanjang $n + 1$.





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

Sesuai dalil sinus didapat

$$\frac{n+1}{\sin 2\alpha} = \frac{n-1}{\sin \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{n+1}{2n-2}$$

Sesuai dalil cosinus didapat

$$(n-1)^2 = n^2 + (n+1)^2 - 2n(n+1) \cos \alpha$$

$$(n+1)^2 = (n+4)(n-1)$$

$$n = 5$$

$$\cos \alpha = \frac{n+1}{2n-2} = \frac{3}{4}$$

∴ Jadi, nilai cosinus sudut terkecil adalah $\frac{3}{4}$.

9. Jawaban :

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$g(x) = x^2 + cx + d$$

Karena $f(x)$ dan $g(x)$ berbeda maka $a \neq c$ atau $b \neq d$

$$f(20) + f(15) = g(20) + g(15)$$

$$20a + b + 15a + b = 20c + d + 15c + d$$

$$35a + 2b = 35c + 2d$$

Karena $a \neq c$ atau $b \neq d$ maka akan didapat $a \neq c$ dan $b \neq d$.

$$\frac{d-b}{a-c} = \frac{35}{2}$$

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$$

$$x = \frac{d-b}{a-c} = \frac{35}{2}$$

Hanya ada 1 nilai x yang memenuhi.

∴ Jadi, jumlah dari semua bilangan real x yang memenuhi $f(x) = g(x)$ sama dengan

$$\frac{35}{2}.$$

10. Jawaban :





a dan b adalah bilangan bulat positif yang memenuhi

$$\frac{53}{201} < \frac{a}{b} < \frac{4}{15}$$

$$3\frac{3}{4} < \frac{b}{a} < 3\frac{42}{53}$$

Maka jelas bahwa $b = 3a + s$ dengan $s < a$. Maka

$$\frac{3}{4} < \frac{s}{a} < \frac{42}{53}$$

Agar b bernilai minimum maka a harus bernilai minimum.

Jelas juga bahwa $a > 4$

- Jika $a = 5$

$$3\frac{3}{4} = \frac{15}{4} < s < \frac{210}{53} = 3\frac{51}{53}$$

Tidak ada bilangan bulat positif s yang memenuhi.

- Jika $a = 6$

$$4\frac{1}{2} = \frac{18}{4} < s < \frac{252}{53} = 4\frac{40}{53}$$

Tidak ada bilangan bulat positif s yang memenuhi.

- Jika $a = 7$

$$5\frac{1}{4} = \frac{21}{4} < s < \frac{294}{53} = 5\frac{29}{53}$$

Tidak ada bilangan bulat positif s yang memenuhi.

- Jika $a = 8$

$$6 = \frac{24}{4} < s < \frac{336}{53} = 6\frac{18}{53}$$

Tidak ada bilangan bulat positif s yang memenuhi.

- Jika $a = 9$

$$6\frac{3}{4} = \frac{27}{4} < s < \frac{378}{53} = 7\frac{7}{53}$$

Bilangan bulat positif s yang memenuhi adalah $s = 7$.

Maka nilai b binimum adalah $b = 3a + s = 3(9) + 7 = 34$.

∴ Jadi, nilai terkecil b yang memenuhi adalah **34**.



11. Jawaban :

Hubungkan komputer K_i dengan printer P_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, 15$.

Kabel yang digunakan ada sebanyak 15.

Hubungkan 5 komputer tersisa masing-masing dengan 15 printer. Banyaknya kabel yang diperlukan ada sebanyak $5 \cdot 15 = 75$ kabel.

Maka jika ada 1 atau beberapa printer dari $K_i = 1, 2, 3 \dots, 15$ diganti oleh 1 atau beberapa dari 5 printer tersisa maka akan tetap didapat 15 komputer yang terhubung masing-masing dengan 1 printer berbeda.

Jadi, total kabel yang diperlukan adalah $15 + 75 = 90$.

Andaikan jumlah kabel kurang dari 90.

Karena $15 \text{ printer} \times 6 = 90$ maka ada sedikitnya 1 printer yang terhubung dengan paling banyak 5 komputer. Misalkan saja printer tersebut adalah P_k .

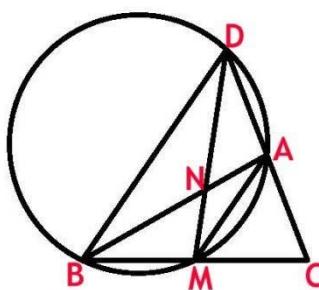
Perhatikan sedikitnya 15 komputer lain yang tidak terhubung dengan P_k . Maka tidak mungkin banyaknya kabel kurang dari 90.

∴ Jadi, banyaknya minimal kabel yang diperlukan sebanyak **90**.

12. Jawaban :

Misalkan $\angle BAC = \angle CMN = \alpha$. Perpanjang sisi AC sehingga memotong MN di titik D.

Maka $\angle BAD = \angle BMD = 180^\circ - \alpha$ dan pada bagian sisi yang sama sehingga BMAD adalah segiempat talibusur.



Karena M adalah pertengahan BC dan BN : NC = 2 : 1 maka DM dan BA adalah garis berat $\triangle ABC$ dan N adalah titik berat $\triangle ABC$.



JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

Karena BA adalah garis berat $\Delta ABCD$ maka $CA = AD$.

Karena $CA : CD = CM : CB$ maka AM sejajar DB .

Jadi $BMAD$ adalah trapesium sama kaki.

$DA = BM$ sehingga $BC = DC = 2 AC$

\therefore Jadi, nilai dari $\frac{AC}{BC}$ adalah $\frac{1}{2}$.

13. Jawaban :

$$a_0 = 2 \text{ dan } a_1 = \frac{8}{3}$$

$$a_m a_n = a_{m+n} - a_{m-n}$$

Ambil $n = 1$ didapat

$$a_m a_1 = a_{m+1} - a_{m-1}$$

$$3a_{m+1} = 8a_m + 3a_{m-1}$$

Maka akan didapat persamaan karakteristik $3r^2 = 8r + 3$ dengan $a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$ dengan r_1 dan r_2 adalah akar-akar berbeda dari persamaan karakteristik $3r^2 = 8r + 3$.

$$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Jika $n = 0$ maka $A + B = 2$

Jika $n = 1$ maka $9A - B = 8$

Didapat $A = 1$ dan $B = 1$

$$a_n = 3^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$a_n - 3^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n > \frac{1}{2015}$$

Jelas bahwa bilangan ganjil n tidak akan memenuhi.

Mengingat bahwa $3^6 = 729 < 2015$ dan $3^7 = 2187 > 2015$ maka nilai n yang memenuhi hanya $n = 2, 4$ dan 6 .

\therefore Jadi, banyaknya bilangan asli n yang memenuhi adalah **3**.

14. Jawaban :

$$|x|^2 - 3x + [x] = 0$$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

- Jika x bulat

$$\text{Maka } x = \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$$

$$x^2 - 2x = 0$$

Didapat $x = 0$ atau $x = 2$.

- Jika x tak bulat

$$x = \frac{\lfloor x \rfloor^2 + \lceil x \rceil}{3}$$

$$x < \lceil x \rceil + 1 \text{ dan } \lfloor x \rfloor < \lceil x \rceil$$

$$\lfloor x \rfloor^2 = 3x - \lceil x \rceil < 3(\lceil x \rceil + 1) - \lceil x \rceil = 2\lceil x \rceil + 3$$

$$(\lceil x \rceil - 3)(\lceil x \rceil + 1) < 0$$

$$-1 < \lceil x \rceil < 3$$

- Jika $\lceil x \rceil = 0$

Maka $\lceil x \rceil = 1$ didapat $x = \frac{1}{3}$ yang memenuhi persamaan.

- Jika $\lceil x \rceil = 1$

Maka $\lceil x \rceil = 2$ didapat $x = 1$ yang tidak memenuhi persamaan.

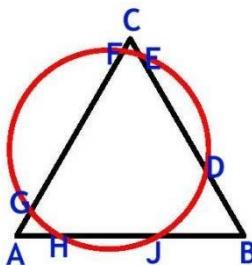
- Jika $\lceil x \rceil = 2$

○ Maka $\lceil x \rceil = 3$ didapat $x = \frac{7}{3}$ yang memenuhi persamaan.

∴ Jadi, bilangan real x yang memenuhi adalah $0, \frac{1}{3}, 2, \frac{7}{3}$.

15. Jawaban :

$$AC = AG + GF + FC = 2 + 13 + 1 = 16 = AB = BC \quad HJ = 7$$



Sesuai dalil Power of Point/Secant Tangent maka

$$AH \cdot AJ = AG \cdot AF$$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

$$AH(AH + 7) = 2 \cdot (2 + 13)$$

$$(AH + 7)(AH - 3) = 0$$

$$\text{Maka } AH = 3 \text{ sehingga } BJ = 16 - 7 - 3 = 6$$

Misalkan panjang $BD = y$ dan $DE = x$ sehingga $CE = 16 - x - y$ Sesuai dalil Power of Point/Secant Tangent maka

$$CF \cdot CG = CE \cdot CD$$

$$1 \cdot (1 + 13) = (16 - x - y)(16 - x - y + x)$$

$$y^2 + xy - 16x - 32y + 242 = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

Sesuai dalil Power of Point/Secant Tangent maka

$$BJ \cdot BH = BD \cdot BE$$

$$6 \cdot (6 + 7) = (y)(y + x)$$

$$y^2 + xy = 78 \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Subtitusikan pers (2) ke persamaan (1) didapat

$$x + 2y = 20$$

$$\left(\frac{20-x}{2}\right)^2 + x\left(\frac{20-x}{2}\right) = 78$$

$$400 - 40x + x^2 + 40x - 2x^2 = 312$$

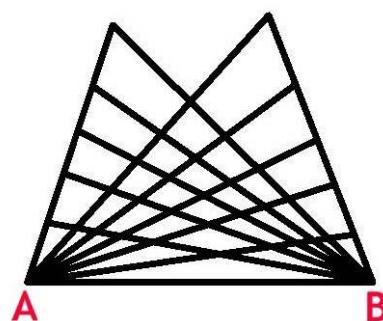
$$x^2 = 88$$

\therefore Jadi, panjang DE adalah $2\sqrt{22}$.

16. Jawaban :

Perhatikan gambar. Titik A atau titik B akan menjadi salah satu titik sudut segitiga.

Maka cukup mencari banyaknya cara memilih 2 titik yang lain.





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

- Jika titik A dan titik B adalah titik sudut segitiga
Banyaknya cara memilih 1 titik lain = ${}_6C_1 \cdot 5 + {}_5C_1 = 35$
- Jika tepat salah satu di antara A atau B adalah salah satu titik sudut.
Banyaknya cara memilih 2 titik lain = $2({}_6C_2 \cdot 5 + {}_5C_2) = 170$
Maka banyaknya segitiga = $35 + 170 = 205$.
∴ Jadi, pada gambar terdapat segitiga sebanyak **205**.

17. Jawaban :

$$x \in [0,1]$$

$$|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}| \leq 1$$

Akan diuji pada 3 titik :

- Untuk $x = 0$

$$-a^2 - \frac{3}{4} = 1$$

$$a = \pm \frac{1}{2}$$

- Jika $a = \frac{1}{2}$

$$|x^2 - x - 1| = \left| \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \right|$$

Nilai maksimum $\frac{5}{4} \neq 1$ didapat jika $x = \frac{1}{2}$. Maka $a = \frac{1}{2}$ tidak memenuhi.

- Jika $a = -\frac{1}{2}$

$$|x^2 + x - 1| = \left| \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \right|$$

Nilai maksimum 1 didapat jika $x = 0$ atau 1 . Maka $a = -\frac{1}{2}$ memenuhi.

- Untuk $x = 1$

$$\left| \frac{1}{4} - 2a - a^2 \right| = 1$$

- Jika $a^2 - 2a - \frac{1}{4} = 1$

Nilai a yang memenuhi adalah $a = \frac{5}{2}$ atau $a = -\frac{1}{2}$.





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

$a = -\frac{1}{2}$ sudah dibuktikan memenuhi.

Jika $a = \frac{5}{2}$ maka $|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}| = |x^2 - 5x - 7| = \left| \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{43}{4} \right| \leq 7$

Nilai maksimum 7 didapat ketika $x = 0$. Jadi, $a = \frac{5}{2}$ tidak memenuhi.

- Jika $a^2 - 2a - \frac{1}{4} = -1$

$$a^2 - 2a - \frac{1}{4} = -1$$

Nilai a yang memenuhi adalah $a = \frac{3}{2}$ atau $a = \frac{1}{2}$.

$a = \frac{1}{2}$ sudah dibuktikan tidak memenuhi.

Jika $a = \frac{3}{2}$ maka $|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}| = |x^2 - 3x - 3| = \left| \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} \right| \leq 3$.

Nilai maksimum 3 didapat ketika $x = 0$. Jadi, $a = \frac{3}{2}$ tidak memenuhi.

- Untuk $x = -\frac{B}{2A} = a$

$$|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}| = |-2a^2 - \frac{3}{4}| = 1$$

$$a = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Karena } x \in [0,1] \text{ maka } a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}| = \left| x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{7}{8} \right| = \left| \left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 1 \right| \leq 1$$

Jadi, $M = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ dan $m = -\frac{1}{2}$.

\therefore Jadi, nilai dari $M - m$ adalah $\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$.

18. Jawaban :

Karena $\frac{9n+1}{n+3}$ adalah kuadrat dari suatu bilangan rasional maka $9n+1 = p \cdot a^2$ dan $n+3 = p \cdot b^2$ yang artinya $(9n+1)(n+3) = 9n^2 + 28n + 3$ adalah bilangan kuadrat sempurna.

Jadi, $81n^2 + 252n + 27 = k^2$

$(9n+14)^2 - 169 = k^2$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif k .





$$(9n + 14 + k)(9n + 14 - k) = 169$$

- Jika $9n + 14 + k = 169$ dan $9n + 14 - k = 1$
 $9n + 14 = 85$ dan $k = 84$. Tidak ada bilangan bulat n yang memenuhi.
- Jika $9n + 14 + k = 13$ dan $9n + 14 - k = 13$
 $9n + 14 = 13$ dan $k = 0$. Tidak ada bilangan bulat n yang memenuhi.
- Jika $9n + 14 + k = -1$ dan $9n + 14 - k = -169$
 $9n + 14 = -85$ dan $k = 84$. Bilangan bulat n yang memenuhi adalah $n = -11$.
- Jika $9n + 14 + k = -13$ dan $9n + 14 - k = -13$
 $9n + 14 = -13$ dan $k = 0$. Bilangan bulat n yang memenuhi adalah $n = -3$.
Tetapi $n \neq -3$

Maka semua bilangan bulat n yang memenuhi adalah $n = -11$.

∴ Jadi, semua bilangan bulat n yang memenuhi adalah **$n = -11$** .

19. Jawaban :

Misalkan bilangan terkecil dari himpunan baik yang *baik* adalah n dan yang terbesar k .

Jelas bahwa selisih setiap anggota himpunan bagian yang *baik* dengan bilangan terdekat dengannya yang juga anggota himpunan bagian yang *baik* sama dengan 1. Misalkan a adalah banyaknya bilangan bulat asli yang kurang dari n dan b adalah banyaknya bilangan asli yang lebih dari k namun kurang dari 16.

Ada 2 kasus :

- Jika $a + b = 10$

Maka anggota himpunan *baik* adalah 5 bilangan bulat berurutan. Jadi, untuk setiap pasangan (a, b) yang memenuhi akan ada tepat 1 himpunan bagian yang *baik*. Banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi ada 11.

- Jika $0 \leq a + b \leq 9$





Maka untuk setiap pasangan (a, b) yang memenuhi akan ada 2 jenis himpunan bagian yang *baik* yaitu $\{n, n + 1, n + 2, k - 1, k\}$ dan $\{n, n + 1, k - 2, k - 1, k\}$ dengan $k - n \geq 5$.

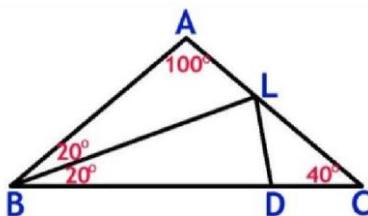
Banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi $= 10 + 9 + 8 + 7 + \dots + 1 = 55$.

Banyaknya himpunan bagian yang *baik* $= 11 + 2(55) = 121$.

\therefore Jadi, banyaknya himpunan bagian yang baik ada sebanyak **121**.

20. Jawaban :

Karena $\angle BAC = 100^\circ$ BL garis bagi maka $\angle ABL = 20^\circ$ dan $\angle ALB = 60^\circ$.



Alternatif :

Sesuai dalil sinus pada ΔABC didapat

$$b = \frac{a \sin 40^\circ}{\sin 100^\circ} = \frac{a \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}$$

Sesuai dalil sinus pada ΔABL didapat

$$AL = \frac{b \sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}$$

Sesuai dalil sinus pada ΔABL didapat

$$BL = \frac{b \sin 100^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$AL + BL = \frac{b(\sin 20^\circ + \sin 100^\circ)}{\sin 60^\circ} = \frac{a \sin 40^\circ (2 \sin 60^\circ \cos 40^\circ)}{\sin 60^\circ \cdot \cos 80^\circ}$$

Mengingat $2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ = \sin 80^\circ$ maka

$$AL + BL = a$$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

∴ Jadi, nilai AL + BL adalah **a**.

21. Jawaban :

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$$

$B \subseteq X$ dengan B memiliki 3 anggota

Ada 2 pandangan terhadap F.

- Pandangan 1, F dapat dikonstruksi

Semua kemungkinan himpunan B ada sebanyak ${}_5C_3 = 10$, yaitu $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$ dan $\{3,4,5\}$.

Dengan memilih $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3,4\}$, $A_3 = \{3,5\}$, $A_4 = \{4,5\}$ maka apapun 3 anggota dari B akan didapat salah satunya adalah A_i dengan $i = 1, 2, 3, 4$.

Akan dibuktikan bahwa $m = 4$ adalah minimum.

Andaikan $m < 4$. Cukup dibuktikan $m = 3$ tidak memenuhi.

Misalkan juga $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dengan a, b, c, d, e adalah 5 bilangan asli berbeda.

Ada 3 kasus :

- Kasus 1, jika $H = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ memiliki paling banyak 3 anggota.

Ambil 2 anggota lain sebagai anggota B maka tidak mungkin ada A_i termuat di B.

- Kasus 2, jika $H = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ memiliki tepat 4 anggota.

Tanpa mengurangi keumuman misalkan $H = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d\}$. Banyaknya himpunan bagian dari H dengan 2 anggota ada sebanyak ${}_4C_2 = 6 > 3$.

Misalkan $K = \{a, b\}$ adalah himpunan bagian H yang berbeda dengan





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

- A_i . Maka untuk $B = \{a, b, e\}$ tidak ada A_i termuat di B .
- Kasus 3, jika $H = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ memiliki tepat 5 anggota.
Tanpa mengurangi keumuman misalkan $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c, d\}$ dan $A_3 = \{e, a\}$. Maka untuk $B = \{b, c, e\}$ tidak ada A_i termuat di B .
 \therefore Jadi, nilai m minimum adalah **4**.
 - Pandangan 2, F tidak dikonstruksi terlebih dulu
Banyaknya himpunan bagian dari X dengan 2 anggota ada sebanyak ${}^5C_2 = 10$.
Banyaknya himpunan bagian B dengan 2 anggota = ${}^3C_2 = 3$
Maka agar memenuhi $m > 10 - 3 = 7$
 \therefore Jadi, nilai m minimum adalah **8**.

22. Jawaban :

$$(x + 1)^2 = x + y + 2 \dots \quad (1)$$

$$(y + 1)^2 = y + z + 2 \dots \quad (2)$$

$$(z + 1)^2 = z + x + 2 \dots \quad (3)$$

Jumlahkan ketiga persamaan didapat

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \dots \quad (4)$$

Persamaan (1), (2) dan (3) juga setara dengan

$$x(x + 1) = y + 1 \dots \quad (5)$$

$$y(y + 1) = z + 1 \dots \quad (6)$$

$$z(z + 1) = x + 1 \dots \quad (7)$$

- Jika sedikitnya salah satu di antara x , y atau z sama dengan -1

Jika $x = -1$ maka pada pers (5) akan didapat $y = -1$

Jika $y = -1$ maka pada pers (6) akan didapat $z = -1$

Jika $z = -1$ maka pada pers (7) akan didapat $x = -1$

Jadi, jika sedikitnya salah satu di antara x , y atau z sama dengan -1 maka yang





lain akan bernilai -1 .

Maka $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$ juga penyelesaian.

- Jika $x \neq -1, y \neq -1$ dan $z \neq -1$

Kalikan persamaan (5), (6) dan (7) didapat

$$xyz(x+1)(y+1)(z+1) = (x+1)(y+1)(z+1)$$

Karena $x \neq -1, y \neq -1$ dan $z \neq -1$ maka $xyz = 1$

Sesuai ketaksamaan AM-GM

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} = \sqrt[3]{(xyz)^2}$$

Karena terjadi kesamaan maka $x^2 = y^2 = z^2 = 1$

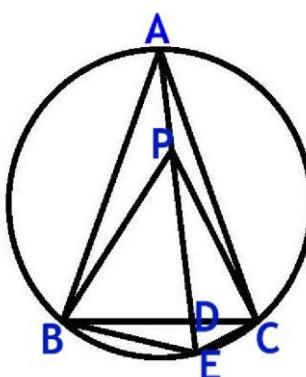
Maka $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ adalah juga penyelesaian.

∴ Jadi, semua tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi adalah $(-1, -1, -1)$ dan $(1, 1, 1)$.

23. Jawaban :

Misalkan $\angle BAC = \angle BPD = 2\alpha$.

Perpanjang PD hingga titik E dengan $PB = PE$.



Karena $\angle BPD = 2\alpha$ dan $PB = PE$ maka $\angle PEB = 90^\circ - \alpha$.

Karena $\angle PEB = \angle ACB = 2\alpha$ serta menghadap talibusur yang sama dan pada bagian yang sama maka $ABEC$ adalah segiempat talibusur.

$$\angle BEP + \angle AEC + \angle BAC = 180^\circ$$

$$(90^\circ - \alpha) + \angle AEC + 2\alpha = 180^\circ$$





$$\angle AEC = 90^\circ - \alpha = \angle AEB$$

Misalkan F adalah titik tengah BE

Karena $PB = PE$ dan F adalah pertengahan BE maka $\angle PFB = 90^\circ$. Maka ED adalah garis bagi $\angle BEC$

Karena ED adalah garis bagi ΔBEC maka

$$\frac{BE}{EC} = \frac{ED}{DC} = 2$$

Jadi, $BE = 2EC$

Karena F adalah pertengahan BE maka $BF = EC$

Karena $PB = PE$ dan $BF = EC$ serta $\angle PBF = \angle PEC$ maka $\Delta PBF \cong \Delta PEC$
Maka $\angle BPF = \angle EPC = \angle DPC = \alpha$

\therefore Jadi, terbukti bahwa $\angle BAC = 2\angle DPC$

24. Jawaban :

Karena p_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $b > 0$ maka $p_i = p_1 + (i - 1)b > n$ dengan $p_1 > n$.

Misalkan q_m dengan $m = 1, 2, 3, \dots, r$ adalah bilangan-bilangan prima $\leq n$ yang memenuhi $q_i < q_j$ untuk $i < j$.

Karena $p_i > n \geq q_m$ maka tidak mungkin q_m membagi p_i untuk semua nilai m dan i.

Perhatikan q_m buah bilangan p_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, q_m$.

Karena p_i tidak habis dibagi q_m , kemungkinan sisa jika p_i dibagi q_m ada sebanyak $q_m - 1 \leq n - 1$. Karena p_i untuk $i = 1, 2, \dots, q_m$ ada sebanyak q_m maka sesuai Pigeon Hole Principle akan ada sedikitnya 2 di antara p_i untuk $i = 1, 2, \dots, q_m$ yang akan bersisa sama jika dibagi q_m . Misalkan kedua bilangan yang bersisa sama jika dibagi q_m adalah p_j dan p_k . $p_k - p_j = (p_1 + (k - 1)b) - (p_1 + (j - 1)b) = (k - j)b$ harus habis dibagi q_m . $k - j \leq q_m - 1 < q_m$

Karena q_m adalah bilangan prima dan $q_m > k - j$ maka q_m tidak membagi $(k - j)$.

Karena q_m membagi $p_k - p_j$ sedangkan q_m tidak membagi $k - j$ maka q_m membagi b.





∴ Jadi, terbukti bahwa setiap bilangan prima p dengan $p \leq n$, maka p membagi habis b .

Contoh barisan aritmetika p_1, p_2, \dots, p_{10} , dengan beda positif dan p_i prima untuk $i = 1, 2, \dots, 10$: **199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089**.

25. Jawaban :

$$A = \{\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_{11}\}$$

Denisikan J_X adalah jumlah anggota himpunan X .

Misalkan B adalah himpunan yang memiliki 11 anggota bilangan asli.

$$B = \{a_1, a_2, \dots, a_{11}\}$$

Maka B adalah juga himpunan bagian A .

Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari $B = 2^{11} - 1 = 2047 > 2015$.

Andaikan ada salah satu himpunan bagian dari B yang jumlah seluruh anggotanya habis dibagi 2005. Maka himpunan bagian tersebut adalah S yang juga merupakan himpunan bagian dari A dan bukti selesai.

Andaikan tidak ada salah satu himpunan bagian dari B yang jumlah seluruh anggotanya habis dibagi 2005.

Karena banyaknya himpunan bagian tak kosong dari B ada 2047 sedangkan kemungkinan sisa jika dibagi 2015 ada 2015 kemungkinan maka sesuai Pigeon Hole Principle, sedikitnya 2 himpunan bagian dari B yang memiliki anggota dengan jumlah masing-masing anggota akan bersisa sama jika dibagi 2015. Misalkan kedua himpunan ini adalah C dan D .

Andaikan salah satu himpunan X atau D adalah himpunan bagian satunya lagi. Tanpa mengurangi keumuman misalkan D adalah himpunan bagian C .

Konstruksi himpunan baru $E = C - (C \cap D)$ yang didapat dari himpunan C dengan membuang semua anggota C yang juga anggota D .





Karena $J_C \equiv J_D \pmod{2015}$ maka jelas $J_E \equiv 0 \pmod{2015}$ yang kontradiksi karena E adalah juga himpunan bagian dari B.

Jadi D tidak mungkin himpunan bagian dari C dan C tidak mungkin himpunan bagian dari D. Konstruksi dua himpunan $P = C - (C \cap D)$ dan $Q = D - (C \cap D)$ artinya himpunan P didapat dari himpunan C dengan membuang semua anggota himpunan C yang juga merupakan anggota himpunan D dan himpunan Q didapat dari himpunan D dengan membuang semua anggota himpunan D yang juga merupakan anggota himpunan C.

Karena anggota yang dibuang sama maka $J_P \equiv J_Q \pmod{2015}$.

Karena D bukan himpunan bagian dari C dan C juga bukan himpunan bagian dari D maka P dan Q tidak mungkin himpunan kosong.

Jelas anggota Q adalah bilangan-bilangan asli.

Konstruksi himpunan Q" yang beranggotakan negatif dari anggota Q.

Jelas Q" adalah juga himpunan bagian A.

Karena P dan Q adalah himpunan saling lepas maka P dan Q" adalah juga himpunan saling lepas.

Maka $J_{Q''} = -J_Q$

$J_P + J_{Q''} \equiv J_Q + J_{Q''} \equiv 0 \pmod{2015}$

Maka $S = PUQ''$ adalah himpunan bagian A yang memenuhi $J_S \equiv 0 \pmod{2015}$

∴ Jadi, terbukti bahwa bahwa terdapat himpunan bagian S dari A yang memenuhi.



