PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMA

TAHUN 2014

1. **Jawaban :**

$y = f(x)$

$\frac{x}{|x|} + \frac{|y|}{y} = 2y$

Jelas bahwa $x, y \neq 0$.

Jika $\alpha > 0$ maka $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{|\alpha|}{\alpha} = 1$ sedangkan jika $\alpha < 0$ maka $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{|\alpha|}{\alpha} = -1$

Maka $2y = 2$ jika $y = 1$ dan $x > 0$ dan $2y = -2$ jika $y = -1$ dan $x < 0$.

Jadi, nilai y yang memenuhi adalah $y = 1$ atau $y = -1$.

∴ Jadi, daerah hasil dari fungsi $y = f(x)$ adalah $\{\mathbf{-1}, \mathbf{1}\}$.

2. **Jawaban :**

Misalkan $FPB(9^n + 9, 3^n - 3) = d$

$9^n + 9 = dp$ dan $3^n - 3 = dq$

$\text{KPK}(9^n + 9, 3^n - 3) = dpq = \frac{dp \cdot dq}{d} = \frac{(9n + 9)(3n - 3)}{d}$

$d|(3^n - 3)$ dan $d|(9^n + 9)$

Maka $d(9^n + 9) - (3^n + 3)(3^n - 3) = 18$

Tetapi untuk $n > 1$ didapat $3^n - 3$ tidak habis dibagi 9.

Maka untuk $n > 1$, nilai d yang mungkin memenuhi adalah 1, 2, 3 atau 6.

$9^n + 9$ dan $3^n - 3$ keduanya habis dibagi 2 dan 3. Maka keduanya habis dibagi 6.

Jadi, $d = 6$.

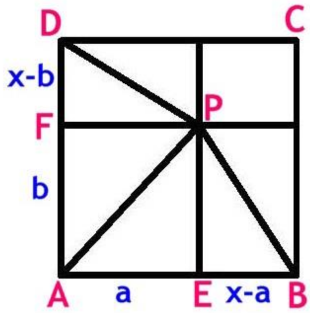
Jika $n = 1$ maka $KPK(9^n + 9, 3^n - 3) = KPK(18,0) = 0 = \frac{(9^n + 9)(3^n - 3)}{6}$

$KPK(9^n + 9, 3^n - 3) = \frac{(9^n + 9)(3^n - 3)}{6}$

∴ Jadi, $KPK(9^n + 9, 3^n - 3) = \frac{(9^n + 9)(3^n - 3)}{6}$

3. Jawaban :

Misalkan panjang sisi persegi = x. Misalkan juga proyeksi P ke AB adalah E dan ke AD adalah F dengan AE = a dan AF = b sehingga EB = $x - a$ dan FD = $x - b$.



$a^2 + b^2 = 9$ .... (1)

$a^2 + (x - b)^2 = 25$ .... (2)

$b^2 + (x - a)^2 = 49$ .... (3)

Pers (2) − (1) didapat

$b = \frac{x^2-16}{2x}$ .... (4)

Pers (3) − (1) didapat

$a = \frac{x^2-24}{2x}$ .... (5)

Misalkan $[ABCD] = x^2 = y$

$$\frac{(y-16)^2}{4y} + \frac{(y-40)^2}{4y} = 9$$

$y^2 - 74y + 928 = 0$ sehingga $(y - 16)(y - 58) = 0$

Jika $x = 4$ didapat bahwa titik P akan terletak pada perpanjangan AB. Jadi, $x^2 = 58$.

∴ Jadi, luas persegi ABCD adalah **58**.

4. Jawaban :

$T_n = (1) + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 1 + 3 + 6 + \ldots + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$.

Barisan T_n adalah 1, 4, 10, 20, ⋯. Akan ditentukan rumus suku ke-n dari T_n.

n	T_n	$D_1(n) = T_n - T_{n-1}$	$D_2(n) = D_1(n) - D_1(n-1)$	$D_3(n) = D_2(n) - D_2(n-1)$
1	1			

2	4	3		
3	10	6	3	
4	20	10	4	1
5	35	15	5	1

Karena $D_3(n)$ konstan maka dapat diambil kesimpulan bahwa rumus T_n merupakan polinomial pangkat 3. Misalkan $T_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.

n	T_n	$D_1(n) = T_n - T_{n-1}$	$D_2(n) = D_1(n) - D_1(n-1)$	$D_3(n) = D_2(n) - D_2(n-1)$
1	a+b+c+d			
2	8a+4b+2c+d	7a+3b+c		
3	27a+9b+3c+d	19a+5b+c	12a+2b	
4	64a+16b+4c+d	37a+7b+c	18a+2b	6a
5	125a+25b+5c+d	61a+9b+c	24a+2b	6a

Dari kedua tabel didapat bahwa :

$6a = 1$ .... (1)

$12a + 2b = 3$ .... (2)

$7a + 3b + c = 3$ .... (3)

$a + b + c + d = 1$ .... (4)

Dari pers (1) didapat $a = \frac{1}{6}$

Dari pers (2) didapat $b = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

Dari pers (3) didapat $c = 3 - 7\left(\frac{1}{6}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{18-7-9}{6} = \frac{1}{3}$

Dari pers (4) didapat $d = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{6-1-3-2}{6} = 0$

Maka rumus jumlah n suku pertama, $T_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

$T_n + xT_{n-1} + yT_{n-1} = n$

$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{x(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{y(n-2)(n-1)n}{6} = n$

$(n+1)(n+2) + x(n-1)(n+1) + y(n-2)(n-1) = 6$

Berdasarkan koefisien n^2 didapat $1 + x + y = 0$

Berdasarkan koefisien n didapat $3 + 0 - 3y = 0$

Berdasarkan konstanta didapat $2 - x + 2y = 6$

Didapat $x = -2$ dan $y = 1$.

∴ Jadi, nilai $x - y$ adalah $-$**3**.

5. **Jawaban :**

Karena garis singgung persekutuan menyinggung lingkaran ω_1 di B sedangkan BD adalah diameter maka BD ⊥ BC.

$[BCD] = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$

∴ Jadi, luas segitiga BDC adalah **3**.

6. **Jawaban :**

Misalkan $X = \left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor$.

$6^{2014} \equiv (-1)^{2014} \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$

$6^{2014} = 7k + 1$ dengan $k \in \mathbb{N}$.

$X = \left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6^{2014} \cdot 10^{2014}}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(7k+1) \cdot 10^{2014}}{7} \right\rfloor = k \cdot 10^{2014} + \left\lfloor \frac{10^{2014}}{7} \right\rfloor$

Karena $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ maka 2014 angka di belakang koma dari $\frac{1}{7}$ berulang dengan kala ulang 6.

$2014 = 335 \cdot 6 + 4$

$X = \left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor \equiv \left\lfloor \frac{10^{2014}}{7} \right\rfloor (mod\ 10^{2014})$

$\left\lfloor \frac{10^{2014}}{7} \right\rfloor$ terdiri dari tepat 2014 angka.

Jumlah 2014 digit terakhir $\left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor = 335 \cdot (1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7) + (1 + 4 + 2 + 8)$ $= 9060$.

∴ Jadi, jumlah 2014 digit terakhir dari $\left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor$ adalah **9060**.

7. **Jawaban :**

Misalkan banyaknya siswa = n dan banyaknya email yang dikirimkan guru = x. Banyaknya email yang diterima sama dengan banyaknya email yang dikirim.

$\frac{n}{2} \cdot 6 + \frac{n}{3} \cdot 4 + \frac{n}{6} \cdot 1 + 2014 = 5 \cdot 7 \cdot n + x \geq 35n$

$27n + 12084 \geq 210n$ sehingga $n \leq 66$.

Karena $1980 = 66 \cdot 5 \cdot 6 < 2014 < 66 \cdot 5 \cdot 7 = 2310$ maka dibutuhkan waktu minimal 7 hari untuk menerima 2014 email.

∴ Jadi, banyaknya cuti yang dilakukan oleh guru tersebut sama dengan **0**.

8. **Jawaban :**

$^2\log (x^2 - 4x - 1) = m$ dengan $m \in Z$.

$(x - 2)^2 - 5 = 2^m$

$(x - 2)^2 = 5 + 2^m$

Jika $m < 0$ maka ruas kanan merupakan pecahan. Tidak ada x bulat yang memenuhi.

Jika $m = 0$ maka $(x - 2)^2 = 6$. Tidak ada x bulat yang memenuhi.

Jadi, $m > 0$.

Alternatif:

- Jika m ganjil

  Angka satuan 2^m berulang dengan periode 4. Jika m ganjil maka angka satuan 2^m adalah 2 atau 8 sehingga angka satuan $5 + 2^m$ adalah 7 atau 3 untuk m ganjil. Bilangan kuadrat tidak mungkin memiliki angka satuan 3 atau 7 sehingga tidak mungkin ada x bulat yang memenuhi.

- Jika m genap

  Misalkan m = 2n maka

  $(x - 2)^2 - (2^n)^2 = 5$

  $(x - 2 + 2^n)(x - 2 - 2^n) = 5$

  Karena $x - 2 + 2^n > x - 2 - 2^n$ maka ada 2 kasus

  - Kasus 1, $x - 2 + 2^n = 5$ dan $x - 2 - 2^n = 1$

    Maka didapat $x - 2 = 3$ dan $2^n = 2$ sehingga $x = 5$ dan $m = 2n = 2$

- Kasus 2, $x - 2 + 2^n = -1$ dan $x - 2 - 2^n = -5$

  Maka didapat $x - 2 = -3$ dan $2^n = 2$ sehingga $x = -1$ dan $m = 2n = 2$

Maka jumlah semua bilangan x yang memenuhi $= 5 - 1 = 4$.

$\therefore$ Jadi, jumlah semua bilangan x yang memenuhi = **4**.

9. Jawaban :

Misalkan akar-akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah p dan q dengan $p \geq q$.

$p + q = -\frac{b}{a}$ dan $pq = \frac{c}{a}$

Karena $0 \leq p, q \leq 1$ maka $(1 - p)(q - 1) \leq 0$

$p + q \leq pq + 1$ dengan tanda kesamaan terjadi ketika $p = 1$.

Karena $0 \leq p, q \leq 1$ maka $p^2 + q^2 \leq p + q$ dengan kesamaan terjadi ketika $p, q = 0$ atau 1.

$$\frac{(2a-b)(a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{\left(2-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)}{\left(1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)} = \frac{(2+p+q)(1+p+q)}{1+p+q+pq} = \frac{p^2+q^2+2pq+3p+3q+2}{1+p+q+pq}$$

$$\frac{(2a-b)(a-b)}{a(a-b+c)} = 2 + \frac{p^2+q^2+p+q}{1+p+q+pq} \leq 2 + \frac{(p+q)+(pq+1)}{1+p+q+pq} = 3$$

Dengan tanda kesamaan terjadi ketika $p = 1$ dan $q = 0$ atau 1.

$\therefore$ Jadi, nilai maksimum dari $\frac{(2a-b)(a-b)}{a(a-b+c)}$ adalah **3**.

10. Jawaban :

$n \leq 1000$.

$X = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\cdots9}_{n\ angka} = (10 + 100 + 1000 + \cdots + 10^n) - n = \underbrace{111\cdots1}_{n-3\ angka} \cdot 10^4 + 1110 - n$

Maka cukup dicari nilai n sehingga $1110 - n$ terdiri dari 3 buah angka 1. Ada 3 kasus:

- Kasus 1, jika $1110 - n = 1101$

  Maka $n = 9$

- Kasus 2, jika $1110 - n = 1011$

Maka $n = 99$

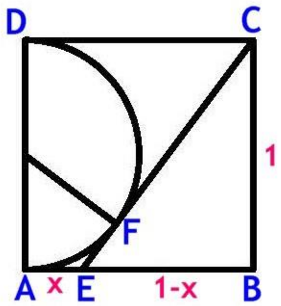
- Kasus 3, jika $1110 - n = 111$

  Maka $n = 999$

$\therefore$ Jadi, semua $n \leq 1000$ yang memenuhi adalah **9, 99 dan 999**.

11. Jawaban :

Misalkan garis CE menyinggung lingkaran berdiameter AD di titik F dengan $AE = x$.



Karena CE menyinggung lingkaran di F maka CF = CD = 1 dan EF = AE = x.

Dengan menggunakan dalil pitagoras pada ΔBCE didapat

$(1 + x)^2 = (1)^2 + (1 - x)^2$ $2x = 1 - 2x$ sehingga $x = \frac{1}{4}$.

$[BCE] = \frac{1}{2} \cdot EB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot (1) = \frac{3}{8}$

$\therefore$ Jadi, luas segitiga BCE adalah $\frac{3}{8}$

12. Jawaban :

Beri nomor kursi dari 1 sampai 8. Anggap kursi yang ditempati siswa 1 dari kelompok 1 adalah kursi beromor 1 sebagai suatu acuan.

Ada 5 kemungkinan posisi duduk siswa 2 dari kelompok 1. Karena simetris, banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 3 sama dengan banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 7. Banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 4 sama dengan banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 6. Maka ada 3 kasus :

- Kasus 1, jika siswa 2 kelompok 1 duduk di kursi nomor 3

Banyaknya kemungkinan kelompok belajar duduk di kursi nomor 2 ada 3. Misalkan kelompok belajar yang duduk di kursi 2 adalah kelompok x.

Posisi duduk siswa 2 dari kelompok x ada 5. Karena simetris, banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 4 sama dengan banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 8. Banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 5 sama dengan banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 7. Maka ada 3 subkasus :

- Sub kasus 1, jika siswa 2 kelompok x duduk di kursi nomor 4. Maka 2 pasang siswa dari 2 kelompok lain akan duduk pada 4 kursi sejajar. Ada 2 cara memilih kelompok yang akan duduk di kursi 5. Pasangannya harus duduk di kursi 7. Sisa kursi akan diisi pasangan kelompok terakhir. Setiap pasang siswa dari kelompok belajar selain kelompok 1 dapat saling tukar posisi sehingga hitungan semula harus dikali 2^3. Banyaknya susunan = $2 \cdot 2^3 = 16$.
- Sub kasus 2, jika siswa 2 kelompok x duduk di kursi nomor 5. 2 pasang siswa akan duduk pada 4 kursi yang terbagi dua : 1 kursi dan 3 kursi sejajar. Banyaknya cara memilih kelompok yang duduk di kursi 4 ada 2. Kursi lain harus menyesuaikan. Banyaknya susunan = $2 \cdot 2^3 = 16$.
- Sub kasus 3, jika siswa 2 kelompok x duduk di kursi nomor 6. 4 kursi tersisa terbagi jadi 2 bagian, masing-masing 2 kursi. Masing-masing 2 cara memilih kelompok yang akan duduk pada kursi 4 dan 7. Banyaknya susunan = $2 \cdot 2 \cdot 2^3 = 32$.

Banyaknya susunan = $3 \cdot (2 \cdot 16 + 2 \cdot 16 + 32) = 288$.

- Kasus 2, jika siswa 2 kelompok 1 duduk di kursi nomor 4

  Banyaknya cara memilih kelompok yang duduk di kursi 2 dan 3 = $3 \cdot 2 = 6$. Sepasang siswa dari sekolah lain akan duduk di kursi nomor 5 sampai 8.

Banyak cara ada 3, yaitu duduk di kursi nomor (5,7), (5,8) atau (6,8). Banyaknya cara pengisian dua kursi tersisa adalah $2 \cdot 1 = 2$. Banyaknya susunan $= 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^3 = 288$.

- Kasus 3, jika siswa 2 kelompok 1 duduk di kursi nomor 5
  Sepasang siswa kelompok 1 membagi 6 kursi tersisa menjadi dua bagian sama. Ada 2 kasus :
  - Sub kasus 1, ada sepasang siswa duduk di kursi 2 dan 4 Banyaknya cara memilih kelompok = 3. Banyaknya cara memilih kelompok duduk di kursi nomor 3 ada 2. Tempat duduk lain menyesuaikan. Banyaknya cara menyusun $= 3 \cdot 2 \cdot 2^3 = 48$.
  - Sub kasus 2, tidak ada sepasang siswa duduk di kursi 2 sampai 4 Banyaknya cara memilih kelompok di kursi 2 sampai $4 = 3 \cdot 2 = 6$. Banyaknya cara memilih kelompok di kursi 6 sampai $8 = 3 \cdot 2 = 6$. Banyaknya cara menyusun $= 6 \cdot 6 \cdot 2^3 = 288$.

  Banyaknya susunan $= 48 + 288 = 336$.

Maka, banyaknya seluruh susunan $= 2 \cdot 288 + 2 \cdot 288 + 336 = 1488$

$\therefore$ Jadi, banyaknya cara adalah **1488**.

13. Jawaban :

Andaikan terdapat 3 kartu dengan angka yang berbeda. Misalkan saja ketiga kartu tersebut adalah a, b dan c. Misalkan juga ketiga kartu yang lain adalah x, y dan z. Karena jumlah setiap 3 kartu hanya menghasilkan 2 kemungkinan yaitu 16 atau 18 maka 2 di antara $x + y + a$, $x + y + b$ dan $x + y + c$ harus ada yang sama. Tetapi karena a, b dan c berbeda maka ketiga bilangan tersebut harus berbeda. Kontradiksi. Jadi, hanya ada 2 jenis angka dari 6 kartu tersebut.

Karena hanya ada 2 jenis angka, maka akan ada 3 kartu dengan jenis angka yang sama. Karena 3 membagi 18 dan 3 tidak membagi 16, maka salah satu jenis kartu tersebut adalah 6. Karena 16 = 6 + 6 + 4 maka jenis kartu satu lagi adalah kartu dengan angka 4.

Lebih lanjut, misalkan ada 2 kartu dengan angka 4 maka 4 + 4 + 6 = 14 haruslah salah satu penjumlahan yang muncul. Kontradiksi. Maka kartu dengan angka 4 hanya ada 1. Maka keenam kartu tersebut adalah kartu dengan angka 6, 6, 6, 6, 6 dan 4.

∴ Jadi, bilangan terkecil yang terdapat pada kartu adalah **4**.

14. Jawaban :

a dan b adalah bilangan real positif dengan t adalah bilangan real.

$2a^2 - 3abt + b^2 = 2a^2 + abt - b^2 = 0$

Dari ruas kiri dan tengah didapat

$4abt = 2b^2$

Karena $b \neq 0$ maka $b = 2at$

Dari ruas tengah dan kanan didapat

$2a^2 + at(2at) - (2at)^2 = 0$ Karena $a \neq 0$ maka $t^2 = 1$ sehingga $t = \pm 1$

Tetapi jika $t = -1$ maka $b = -2a$ yang tidak mungkin memenuhi a dan b keduanya real positif.

∴ Jadi, nilai t adalah **1**.

15. Jawaban :

$n < 1000$.

Jika angka satuan n bukan 9 maka $S(n) < S(n+1)$. Tidak mungkin $\frac{s(n)}{s(n+1)}$ bulat. Jadi, angka satuan n harus 9.

- Sub kasus 1, jika angka puluhan n adalah 9.

  Jelas n = 999 memenuhi.

  Agar $\frac{k+9+9}{k+1} = 1 + \frac{17}{k+1} \in Z$ maka k + 1 membagi 17. Nilai k < 10 yang memenuhi hanya k = 0.

  Jadi, bilangan yang memenuhi adalah 99.

- Sub kasus 2, jika angka puluhan n bukan 9.

  Misalkan angka ratusan adalah k dan angka puluhan adalah m.

  $\frac{s(n)}{s(n+1)} = \frac{k+m+9}{k+m+1} = 1 + \frac{8}{k+m+1}$

  Maka k + m + 1 membagi 8. Pasangan (k,m) yang memenuhi adalah (0,0), (0,1), (1,0), (0,3), (1,2), (2,1), (3,0), (0,7), (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) dan (7,0).

  Bilangan yang memenuhi adalah 9, 19, 109, 39, 129, 219, 309, 79, 169, 259, 349, 439, 529, 619 dan 709 yang banyaknya ada 15.

∴ Jadi, banyaknya bilangan asli n ≤ 1000 yang memenuhi $\frac{s(n)}{s(n+1)} \in Z$ adalah **17**.

16. Jawaban :

$b^2 = \frac{1}{4}(a+c)^2$

$\cos \angle ABC = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4a^2+4c^2-(a+c)^2}{8ac} = \frac{3a^2+3c^2-2ac}{8ac}$

Dengan ketaksamaan AM-GM didapat

$\cos \angle ABC = \frac{3a^2+3c^2-2ac}{8ac} \geq \frac{6ac-2ac}{8ac} = \frac{1}{2}$

Karena $\cos \angle ABC \geq \frac{1}{2}$ maka $\angle ABC \leq 60^o$

∴ Jadi, ukuran terbesar ∠ABC adalah **60º.**

17. Jawaban :

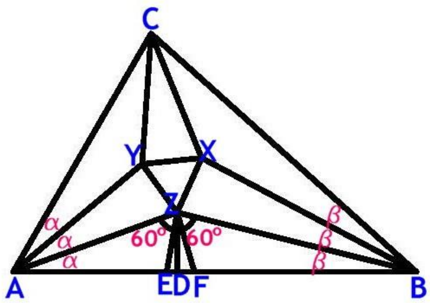
Berdasarkan teorema Morley akan didapat bahwa ΔXYZ adalah segitiga sama sisi.

Berikut adalah pembuktian teorema Morley.

Misalkan ∠ZAB = ∠YAZ = ∠CAY = α dan ∠ABZ = ∠ZBX = ∠XBC = β maka ∠ACY = ∠YCX = ∠XCB = 60º − α − β

∠AYC = 180º − (α) − (60º − α − β) = β + 120º dan ∠BXC = 180º − (β) − (60º − α − β) = α + 120º Buat titik D, E dan F pada AB sehingga ∠ADZ = 90º, ∠AZE = ∠BZF = 60º.

Maka ∠ZEF = 60º + α sedangkan ∠ZFE = 60º + β sehingga ∠EZF = 60º − α − β



$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin\theta\cos 2\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta = \sin\theta(\cos 2\theta + 1 + \cos 2\theta)$

$\sin 3\theta = 2\sin\theta(\cos 2\theta + \cos 60^\circ) = 4\sin\theta(\cos(\theta + 30^\circ)\cos(\theta - 30^\circ)$

$\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin(90^\circ + \theta + 30^\circ)\sin(90^\circ + \theta - 30^\circ)$

$\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin(\theta + 120^\circ)\sin(\theta + 60^\circ)$

Pada ΔBCX berlaku $\frac{BC}{\sin\angle BXC} = \frac{CX}{\sin\angle XBC}$ sehingga $\sin(\alpha + 120^o) = \frac{BC\cdot\sin\beta}{CX}$

Pada ΔZED didapat $\sin\angle ZED = \sin(\alpha + 60^o) = \frac{DZ}{EZ}$

Misalkan jarak C ke AB adalah h maka

$h = AC\sin 3\alpha = 4AC\sin\alpha\sin(\alpha + 60^o)\sin(\alpha + 120^o) = \frac{4\cdot AC\cdot BC\cdot DZ\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{CX\cdot EZ}$

Dengan jalan lain.

Pada ΔACY berlaku $\frac{AC}{\sin\angle AYC} = \frac{CY}{\sin\angle YAC}$ sehingga $\sin(\beta + 120^o) = \frac{AC\cdot\sin\alpha}{CY}$

Pada ΔZED didapat $\sin\angle ZFD = \sin(\beta + 60^o) = \frac{DZ}{FZ}$

$h = BC\sin 3\beta = 4BC\sin\beta\sin(\beta + 60^o)\sin(\beta + 120^o) = \frac{4\cdot AC\cdot BC\cdot DZ\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{CY\cdot FZ}$

Dari dua persamaan tersebut didapat $CX\cdot EZ = CY\cdot FZ$

$\frac{CX}{CY} = \frac{FZ}{EZ}$ serta ∠YCX = ∠EZF = 60° − α − β sehingga ΔCYX ≅ ΔEZF.

Maka ∠CYX = ∠ZEF = 60° + α

Dengan cara yang sama didapat ∠AYZ = 60° + ∠BCX = 60° + (60° − α − β) = 120° − α − β ∠XYZ = 360° − ∠CYX − ∠AYC − ∠AYZ = 360° − (60° + α) − (120° + β) − (120° − α − β) = 60°.

∴ Jadi, besar sudut XYZ adalah **60°**.

18. Jawaban :

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ dengan $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Jelas bahwa a, b, $c > 1$.

$\tan(\beta + \gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

$\frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta \cdot \tan\gamma} = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}$

$\frac{b+c}{bc-1} = \frac{a-1}{a+1}$ .... (1)

Karena simetri, tanpa mengurangi keumuman misalkan $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

$3\alpha \geq \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ sehingga $\alpha \geq \frac{\pi}{12}$

$\frac{1}{a} = \tan\alpha \geq \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3} > \frac{1}{4}$

Maka $1 < a < 4$

- Kasus 1, jika $a = 3$

  $4(b + c) = 2(bc - 1)$

  $(b - 2)(c - 2) = 5$

  Pasangan bilangan bulat positif (b, c) yang memenuhi adalah (3,7).

  Maka tripel bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi adalah (3,3,7) dan permutasinya yang ada sebanyak 3.

- Kasus 2, jika $a = 2$.

  $3(b + c) = (bc - 1)$

  $(b - 3)(c - 3) = 10$

  Pasangan bilangan bulat positif (b, c) yang memenuhi adalah (4,13) dan (5,8)

Maka tripel bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi adalah (2,5,8) dan (2,4,13) beserta permutasinya yang masing-masing ada sebanyak 6.

Maka banyaknya tripel bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi $= 2 \cdot 6 + 3 = 15$.

∴ Jadi, banyaknya tripel bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi adalah **15**.

19. Jawaban :

$a^2 + b^2 + c^2$ adalah bilangan ganjil dengan $a < b < c$

Karena a, b dan c ganjil maka $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3 \pmod 8$

Di antara 1111, 3333, 5555, 7777 dan 9999 yang bersisa 3 jika dibagi 8 hanya 5555.

$(b - 2)^2 + (b)^2 + (b + 2)^2 = 5555$

$3b^2 = 5555 - 8 = 5547$ $b = \pm 43$

∴ Jadi, semua tripel bilangan ganjil berurutan (a,b,c) yang memenuhi adalah **(41,43,45) dan (−45,−43,−41).**

20. Jawaban :

Misalkan angka 1 menyatakan langkah ke kanan, angka 2 menyatakan langkah ke atas, angka 3 menyatakan langkah ke kiri dan angka 4 menyatakan langkah ke bawah. Langkah terpendek dari (0,0) ke (3,2) hanya membutuhkan 5 langkah. Agar dibutuhkan 9 langkah maka partikel harus bergerak ke kiri 2 langkah atau ke bawah 2 langkah atau ke kiri dan ke bawah.

Maka ada 3 kasus :

- Partikel bergerak ke kiri 2 langkah

  Karena melangkah ke kiri 2 langkah maka harus ada tambahan langkah ke kanan sebanyak 2 langkah. Persoalan setara dengan banyaknya susunan 111112233. Banyaknya susunan = $\frac{9!}{5!2!2!} = 756$.

- Partikel bergerak ke bawah 2 langkah

  Karena melangkah ke bawah 2 langkah maka harus ada tambahan langkah ke atas sebanyak 2 langkah. Persoalan setara dengan banyaknya susunan 111222244. Banyaknya susunan = $\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$.

- Partikel bergerak ke kiri 1 langkah dan ke bawah 1 langkah

  Karena melangkah ke kiri 1 langkah dan ke bawah 1 langkah maka harus ada tambahan langkah ke kanan 1 langkah dan ke atas sebanyak 1 langkah. Persoalan setara dengan banyaknya susunan 111122234.

Banyaknya susunan $= \frac{9!}{4!3!} = 2520$.

Banyaknya cara partikel melangkah = 756 + 1260 + 2520 = 4536.

$\therefore$ Jadi, cara partikel melangkah adalah **4536**.

21. Jawaban :

Karena a, b dan c positif maka $a^3 + b^3$, $b^3 + c^3$ dan $c^3 + a^3$ tidak ada yang bernilai 0.

$$X = ab\left(\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}\right) + bc\left(\frac{b^2+c^2}{b^3+c^3}\right) + ca\left(\frac{c^2+a^2}{c^3+a^3}\right) + \frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4+c^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4+a^4}{c^3+a^3}$$

$$X = \frac{a^4+a^3b+ab^3+b^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4+b^3c+bc^3+c^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4+c^3a+ca^3+a^4}{c^3+a^3}$$

$$X = \frac{(a+b)(a^3+b^3)}{a^3+b^3} + \frac{(b+c)(b^3+c^3)}{b^3+c^3} + \frac{(c+a)(c^3+a^3)}{c^3+a^3} = (a+b) + (b+c) + (c+a) = 2$$

$\therefore$ Jadi, nilai dari $ab\left(\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}\right) + bc\left(\frac{b^2+c^2}{b^3+c^3}\right) + ca\left(\frac{c^2+a^2}{c^3+a^3}\right) + \frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4+c^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4+a^4}{c^3+a^3}$ sama dengan **2**.

22. Jawaban :

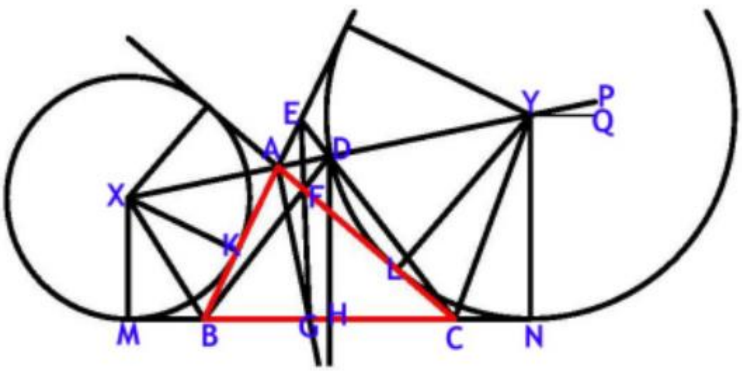
Misalkan $\angle ABC = \beta$ dan $\angle ACB = \gamma$ sehingga $\angle BAC = 180^o - (\beta + \gamma)$.

Alternatif 1:

Maka $\angle XAK = \angle YAL = \frac{\beta+\gamma}{2}$ dan $\angle KXB = \angle BXM = \frac{\beta}{2}$

sedangkan $\angle LYC = \angle CYN = \frac{\gamma}{2}$.

$$\angle PYQ = \angle AXK + \angle KXM - 90^o = \left(90^o - \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right) + (\beta) - 90^o = \frac{\beta-\gamma}{2}$$



Misalkan jari-jari lingkaran berpusat di $X = R_x$ dan jari-jari lingkaran berpusat di $Y = R_y$.

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = AK + KB = R_x\left(\cot\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

$$a \sin\gamma \cdot \sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = R_x \cdot \sin(\beta+\gamma)\cdot\left(\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right)$$

$$R_x = \frac{a \sin\gamma\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{a \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$$

Dengan cara yang sama didapat

$$R_y = \frac{a \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$$

$$\frac{MB}{CN} = \frac{R_x\cdot\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{R_y\cdot\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = 1$$

Karena MB = CN maka proyeksi titik tengah XY (titik D) terhadap BC (titik H) akan berada di tengah-tengah BC. Jadi, BH = HC.

Karena H adalah pertengahan BC maka ΔBDC adalah segitiga sama kaki.

Misalkan $\angle CBD = \angle BCD = \theta$.

$$\tan\theta = \frac{DH}{AH} = \frac{R_x + R_y}{a} = \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$

$\angle CBD = \angle BCD = \frac{\beta+\gamma}{2}$ sehingga $\angle BDC = 180^o - (\beta+\gamma)$. Maka ABCD adalah segiempat talibusur

$\angle ADC = 180^o - \beta$ dan $\angle DAC = \angle CBD = \frac{\beta+\gamma}{2}$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sin\angle ADC}{\sin\angle CBD} = \frac{\sin\beta}{\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$$

$\angle ADE = \angle BCD - \angle PYQ = \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) - \left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) = \beta$ dan $\angle DAE = \angle BCD = \frac{\beta+\gamma}{2}$

$$\frac{EA}{DE} = \frac{\sin\angle ADE}{\sin\angle DAE} = \frac{\sin\beta}{\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$$

Maka $\frac{AC}{CD} = \frac{EA}{DE}$

Alternatif 2:

Karena ∠EAY = ∠YAC maka AD adalah garis bagi ΔCAE.

$$\frac{AC}{CD} = \frac{EA}{DE}$$

Alternatif 1.2.a:

Karena garis BD, AC dan EG melalui 1 titik maka sesuai dalil Ceva didapat

$$\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EA}{AB}=1$$
$$\frac{BG}{GC}=\frac{AB}{EA}\cdot\frac{DE}{CD}=\frac{AB}{AC}$$
$$\frac{BG}{AB}=\frac{GC}{AC}$$

Alternatif 1.2.b:

Pada ΔEAF berlaku $\frac{EA}{\sin\angle AFE}=\frac{EF}{\sin\angle EAF}$ yang setara dengan $\frac{EA}{\sin\angle CFG}=\frac{EF}{\sin(\beta+\alpha)}$

Pada ΔDEF berlaku $\frac{DE}{\sin\angle DFE}=\frac{EF}{\sin\angle EDF}$ yang setara dengan $\frac{DE}{\sin\angle BFG}=\frac{EF}{\sin(\beta+\alpha)}$.

Maka didapat $\frac{\sin\angle BFG}{\sin\angle CFG}=\frac{DE}{EA}$

Pada ΔBFG berlaku $\frac{BG}{\sin\angle BFG}=\frac{BF}{\sin\angle BGF}=\frac{BF}{\sin\angle CGF}$

Pada ΔCFG berlaku $\frac{GC}{\sin\angle CFG}=\frac{CF}{\sin\angle CGF}$.

Dengan memperhatikan ΔABF ≅ ΔCDF maka

$$\frac{BG}{GC}=\frac{BF\cdot\sin\angle BFG}{CF\cdot\sin\angle CFG}=\frac{AB}{CD}\cdot\frac{DE}{EA}=\frac{AB}{AC}$$
$$\frac{BG}{AB}=\frac{GC}{AC}$$
$$\frac{\sin\angle BAG}{\sin\angle AGB}=\frac{\sin\angle GAC}{\sin\angle AGC}$$

$\sin\angle BAG=\sin\angle GAC$

Karena ∠BAG + ∠GAC ≠ 180° maka ∠BAG = ∠GAC.

∴ Jadi, terbukti bahwa AG adalah garis bagi ∠BAC.

23. Jawaban :

Karena setiap 50 himpunan bagian mempunyai lebih dari 100 anggota maka sesuai Pigeon Hole Principle akan ada 1 himpunan bagian dengan sedikitnya 3 anggota. Misalkan himpunan bagian ini adalah A_x. Bagi 101 himpunan bagian ke dalam 3 kelompok : Kelompok I terdiri dari 50 himpunan bagian, kelompok II terdiri dari 50 himpunan bagian dan kelompok III adalah A_x.

Karena setiap 50 himpunan bagian mempunyai lebih dari 100 anggota sedangkan X hanya memiliki 102 anggota, maka paling banyak hanya 1 anggota X yang tidak menjadi anggota gabungan himpunan bagian di kelompok I dan juga paling banyak hanya 1 anggota X yang tidak menjadi anggota gabungan himpunan bagian di kelompok II.

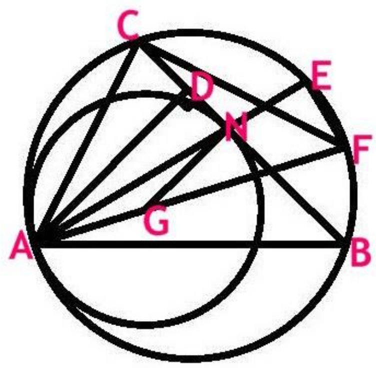
Karena A_x mempunyai sedikitnya 3 anggota maka akan ada 1 anggota A_x yang menjadi anggota salah satu himpunan bagian di kelompok I (misalkan A_y) dan juga menjadi anggota salah satu himpunan bagian di kelompok II (misalkan A_z).

Maka irisan setiap dua himpunan bagian di antara A_x, A_y dan A_z tidak akan kosong.

∴ Jadi, terbukti bahwa terdapat $1 \leq i < j < k \leq 101$ sedemikian sehingga $A_i \cap A_j$, $A_i \cap A_k$, dan $A_j \cap A_k$ semuanya tidak kosong.

24. Jawaban :

Misalkan pusat lingkaran ω ada di G. Karena lingkaran ω menyinggung lingkaran Γ di A dengan AF adalah diameter lingkaran Γ maka G akan terletak pada garis AF.



Karena AF diameter maka $\angle AEF = 90^\circ$.

Misalkan $\angle GAN = x$. Karena N terletak pada lingkaran ω maka $\angle GNA = x$.

Karena lingkaran ω menyinggung BC maka $\angle GND = 90^\circ$ sehingga $\angle AND = 90^\circ - x$ dan $\angle NAD = x$. Karena $\angle NAD = \angle FAE = x$ dan $\angle ADN = \angle AEF = 90^\circ$ maka $\Delta ADN \cong \Delta AEF$.

$$\frac{AN}{AD} = \frac{AF}{AE}$$

$ANxAE = ADxAF$

Karena AF diameter lingkaran Γ maka ∠ACF = 90º sedangkan ∠ADB = 90º. Karena menghadap talibusur yang sama maka ∠ABD = ∠AFC.

Jadi, ΔABD ≅ ΔAFC.

$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AF}$

$ADxAF = ABxAC$

∴ Jadi, terbukti bahwa $ANxAE = ADxAF = ABxAC$.

25. Jawaban :

$a_1 = 2$ dan $a_2 = 8$

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n$

$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 2a_{n+1} + 5(-1)^n$

Karena $a_2 = 8$ dan $a_2 > a_1$ maka $a_k \in N$ untuk setiap $k \in N$.

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n$

Persamaan karakteristiknya adalah $y^2 - 3y + 1 = 0$ yang dipenuhi oleh $y_{12,} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$A \cdot (-1)^{n+2} = 3A \cdot (-1)^{n+1} - A \cdot (-1)^n + (-1)^n$

$A = -3A - A + 1$

$A = \frac{1}{5}$

$a_n = C\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + (-1)^n$

Dengan mengambil $a_1 = 2$ dan $a_2 = 8$ didapat C = 1 dan D = 1 sehingga rumus suku ke-n adalah

$a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + (-1)^n$

Misalkan $p^n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ dan $q^n = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$a_m + a_{4m} = p^m + q^m + p^{4m} p^m + q^m + q^{4m}$

Karena 2m genap dan 3m ganjil maka

$$\frac{a_m + a_{4m}}{a_{2m} + a_{3m}} = \frac{\frac{a_{2m} + a_{3m}}{p^m+q^m+p^{4m}+q^{4m}}}{p^{2m}+q^{2m}+p^{3m}+q^{3m}}\ \frac{p^{2m}+q^{2m} + p^{3m}+q^{3m}}{}$$

$$\frac{a_m + a_{4m}}{a_{2m} + a_{3m}} = p^m + q^m + \frac{p^m+q^m-p^{3m}-(pq^2)^m-(pq^3)^m-(p^2q)^m-q^{3m}-(p^3q)^m}{p^{2m}+q^{2m}+p^{3m}+q^{3m}}$$

Karena $pq = 1$ maka

$$\frac{a_m + a_{4m}}{a_{2m} + a_{3m}} = p^m + q^m + \frac{p^m+q^m-p^{3m}-q^m-q^{2m}-p^m-q^{3m}-p^{2m}}{p^{2m}+q^{2m}+p^{3m}+q^{3m}} = p^m + q^m - 1 = a_m \epsilon N$$

∴ Jadi, terbukti bahwa untuk m bilangan ganjil maka $\frac{a_m + a_{4m}}{a_{2m} + a_{3m}}$ merupakan bilangan bulat.