

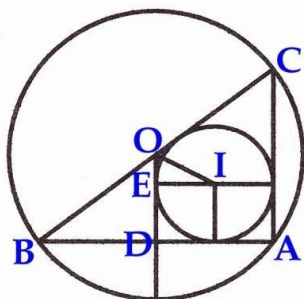


## PEMBAHASAN OSP MATEMATIKA SMA TAHUN 2012

### 1. Jawaban : $\frac{1}{2}\sqrt{5}$

Tanpa mengurangi keumuman misalkan  $AC = 3$  ;  $AB = 4$  ;  $BC = 5$ .

Misalkan juga  $R$  adalah jari-jari lingkaran luar dan  $r$  adalah jari-jari lingkaran dalam  $\triangle ABC$ . Karena  $\triangle ABC$  siku-siku di  $A$  maka  $BC$  adalah diameter lingkaran luar  $\triangle ABC$ . Jadi,  $O$  adalah pertengahan  $BC$ .



Misalkan  $D$  adalah titik pada  $AB$  sehingga  $OD \perp AB$  dan  $E$  pada  $OD$  sehingga  $IE \perp OD$ .

$$\frac{1}{2}r(a + b + c) = [ABC] = 6$$

$$r = 1$$

Karena  $O$  adalah pertengahan  $BC$  maka  $D$  adalah pertengahan  $AB$  sehingga  $AD = 2$ . Jadi,  $E$  adalah titik singgung garis  $OD$  terhadap lingkaran dalam. Maka  $IE = 1$ .

$$OE = OD - ED = \frac{1}{2}AC - r = \frac{1}{2}$$

$$OI^2 = OE^2 + IE^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2$$

$$OI = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$



$\therefore$  Jadi, Panjang  $OI = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ .

## 2. Jawaban : 1028

$34x - 51y = 2012z$  dengan  $x, y, z$  adalah bilangan prima.

Karena 34 dan 2012 habis dibagi 2 maka  $y$  habis dibagi 2. Karena  $y$  prima maka  $y = 2$ .

Karena 34 dan 51 habis dibagi 17 maka  $z$  habis dibagi 17. Karena  $z$  prima maka  $z = 17$ .

$$34x - 51(2) = 2012(17)$$

$x = 1009$  yang memenuhi bahwa  $x$  adalah bilangan prima.

$$x + y + z = 1009 + 2 + 17 = 1028$$

$\therefore$  Jadi, nilai dari  $x + y + z$  adalah **1028**.

## 3. Jawaban : $\frac{151}{256}$

Banyaknya kejadian semua angka dadu berbeda =  $8 \times 7 \times 6 \times 5$ .

$$\text{Peluang ada angka yang sama} = 1 - \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{8^4} = \frac{151}{256}$$

$$\therefore \text{Jadi, peluang ada angka yang sama} = \frac{151}{256}$$

## 4. Jawaban : 3

$f(x) = \sqrt{[x] - a}$  dan  $g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a}}}$  dengan  $a$  adalah bilangan bulat positif.

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{[x] - a - \frac{\sqrt{2[x] - 2a}}{\sqrt{a}}}$$

Karena  $3\frac{1}{2} \leq x < 4$  maka  $[x] = 3$ .

Untuk  $3\frac{1}{2} \leq x < 4$  maka  $f(x) = \sqrt{3 - a}$  sehingga

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{3 - a - \frac{\sqrt{6 - 2a}}{\sqrt{a}}}$$

Syarat yang harus dipenuhi adalah



$$a \leq 3 \dots\dots\dots (1) \text{ dan}$$

$$3 - a - \frac{\sqrt{6-2a}}{\sqrt{a}} \geq 0$$

$$a(3a - a)^2 \geq 6 - 2a \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{Jika } a = 1 \text{ maka } 1 \cdot (3 - 1)^2 = 4 \text{ dan } 6 - 2(1) = 4$$

$$\text{Jika } a = 2 \text{ maka } 2 \cdot (3 - 2)^2 = 2 \text{ dan } 6 - 2(2) = 2$$

$$\text{Jika } a = 3 \text{ maka } 3 \cdot (3 - 3)^2 = 0 \text{ dan } 6 - 2(3) = 0$$

Maka nilai  $a$  bulat positif yang memenuhi adalah  $a = 1$  atau  $a = 2$  atau  $a = 3$ .

$\therefore$  Banyaknya nilai  $a$  yang memenuhi ada **3**.

## 5. Jawaban :

Karena  $n^2 + pn$  bilangan kuadrat sempurna maka  $4n^2 + 4pn$  juga merupakan kuadrat sempurna.  $4n^2 + 4pn = m^2$  dengan  $n, m \in N$  dan  $p$  adalah bilangan prima.

$$(2n + p)^2 - p^2 = m^2$$

$$p^2 = (2n + p + m)(2n + p - m)$$

Maka ada 2 kasus :

- Jika  $2n + p + m = p$  dan  $2n + p - m = p$

$$\text{Maka didapat } 2n + p = 0 \text{ dan } 2n - p = 0$$

Didapat  $n = 0$  yang tidak memenuhi syarat bahwa  $n \in N$ .

- Jika  $2n + p + m = p^2$  dan  $2n + p - m = 1$

Jumlahkan kedua persamaan didapat

$$4n + 2p = p^2 + 1$$

$$4n = (p - 1)^2$$

$$n = \frac{(p-1)^2}{4}$$

Karena  $p$  adalah bilangan prima ganjil maka akan didapat  $n \in N$ .





∴ Jadi,  $S = \left\{ n | n = \frac{(p-1)^2}{4} \right\}$  dengan  $p$  bilangan prima  $> 2$ .

6. **Jawaban :**

$$\{\sqrt[3]{k}\} = n = 2012m \text{ dengan } m \in \mathbb{N}$$

$$n - \frac{1}{2} < \sqrt[3]{k} < n + \frac{1}{2}$$

$$n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n - \frac{1}{8} < k < n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{1}{8}$$

Karena  $n$  habis dibagi 2012 maka  $\frac{3}{2}n^2$  dan  $\frac{3}{4}n$  keduanya bilangan asli. Jadi,

$$n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n \leq k \leq n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n$$

Maka banyaknya nilai  $k$  yang memenuhi ada

$$\left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n\right) - \left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n\right) + 1 = 3n^2 + 1.$$

∴ Jadi, banyaknya nilai  $k$  yang memenuhi ada  $3n^2 + 1$ .

7. **Jawaban : 40**

Jelas bahwa 123456789123456789...123456789 tidak habis dibagi 2 atau 5.

Karena banyaknya bilangan ada tak terhingga maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) pasti ada 2 bilangan di antaranya yang memiliki sisa yang sama jika dibagi suatu bilangan tertentu.

Misalkan  $m = 123456789123456789...123456789$  adalah bilangan yang terdiri dari  $9a$  angka sedangkan  $n = 123456789123456789...123456789$  adalah bilangan terdiri dari  $9b$  angka yang keduanya memiliki sisa yang sama jika dibagi  $p$  dengan  $p < 100$  dan  $p$  tidak habis dibagi 2 atau 5.

$m - n = 123456789...000000000...0$  yang habis dibagi  $p$ .

$m - n$  adalah bilangan  $9a$  angka yang terdiri dari  $9(a - b)$  angka berbentuk 123456789... dan diikuti angka 0 sebanyak  $9b$  angka.

Karena  $m - n$  habis dibagi  $p$  sedangkan  $p$  tidak habis dibagi 2 atau 5 maka bilangan 123456789... yang terdiri dari  $9(a - b)$  angka akan habis dibagi  $p < 100$ .



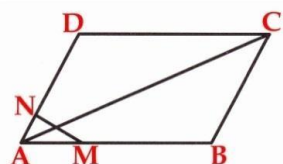
Jadi, 123456789123456789...123456789 akan habis dibagi oleh semua  $n < 100$  dengan  $n$  tidak habis dibagi 2 atau 5.

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 2 atau 5 =  $\left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{10} \right\rfloor = 59$ .

Banyaknya bilangan yang tidak habis dibagi 2 atau 5 =  $99 - 59 = 40$ .

∴ Jadi, banyaknya bilangan asli  $n < 100$  yang memenuhi ada **40**.

## 8. Jawaban : 177



Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat  $A(0, 0)$ ,  $B(a, 0)$  dan  $D(b, c)$ .

Maka koordinat  $C(b + a, c)$ . Koordinat  $M\left(\frac{17}{1000}a, 0\right)$  dan  $N\left(\frac{17}{2009}b, \frac{17}{2009}c\right)$ .

Persamaan garis AC adalah  $y = \frac{c}{b+a}x$

Persamaan garis MN adalah  $y - 0 = \frac{\frac{17}{2009}c - 0}{\frac{17}{2009}b - \frac{17}{1000}a} \left(x - \frac{17}{1000}a\right)$

Perpotongan garis AC dan MN adalah titik P

$$\begin{aligned} \frac{c}{b+a}x_P &= \frac{1000c}{1000b-2009a} \left(x_P - \frac{17}{1000}a\right) \\ \frac{1}{b+a}x_P &= \frac{1000}{1000b-2009a}x_P - \frac{17}{1000b-2009a}a \\ \frac{17a}{1000b-2009a} &= \frac{1000}{1000b-2009a}x_P - \frac{1}{b+a}x_P = x_P \left(\frac{3009a}{(b+a)(1000b-2009a)}\right) \end{aligned}$$

$x_P = \frac{b+a}{177}$  sehingga  $y_P = \frac{c}{b+a}x_P = \frac{c}{177}$ . Jadi, koordinat  $P\left(\frac{b+a}{177}, \frac{c}{177}\right)$ .

Maka  $\frac{AC}{AP} = \frac{x_C - x_A}{x_P - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_P - y_A} = 177$

∴ Jadi,  $\frac{AC}{AP} = 177$ .

## 9. Jawaban : 26880



Misalkan A, B, C dan D adalah 4 orang dalam arah searah jarum jam yang tidak duduk dekat pasangannya dan  $x_A$ ,  $x_B$ ,  $x_C$  dan  $x_D$  adalah banyaknya kursi yang berada antara A dan B, antara B dan C, antara C dan D dan antara D dan A. Jelas bahwa  $x_A$ ,  $x_B$ ,  $x_C$  dan  $x_D$  semuanya genap. Ada 4 kasus :

- Kasus 1,  $x_A = 0$ ,  $x_B = 0$ ,  $x_C = 0$  dan  $x_D = 6$ .

A, B, C dan D akan berdekatan. Agar di antara mereka tidak ada sepasang suami isteri maka mereka harus duduk berselang seling.

Banyaknya cara memilih A ada 10. Banyaknya cara memilih B hanya 8 sebab B tidak boleh pasangan A. Cara memilih C dan D hanya ada satu cara memilihnya sebab mereka pasangannya A dan B.

Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah  $3! \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ . Banyaknya susunan =  $10 \times 8 \times 1 \times 1 \times 48 = 3840$ .

- Kasus 2,  $x_A = 0$ ,  $x_B = 2$ ,  $x_C = 2$  dan  $x_D = 2$ .

A dan B akan berdekatan sehingga tidak mungkin pasangan suami isteri. Banyaknya cara memilih A dan B adalah  $10 \times 8$ . C adalah pasangan A atau B sehingga banyaknya cara memilih C dan D adalah  $2 \times 1$ .

Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah  $3! \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ . Banyaknya susunan =  $10 \times 8 \times 2 \times 1 \times 48 = 7680$ .

- Kasus 3,  $x_A = 0$ ,  $x_B = 0$ ,  $x_C = 2$  dan  $x_D = 4$ .

A, B dan C akan berdekatan sehingga B bukan pasangan A atau C. Banyaknya cara memilih A ada 10 dan B ada 8. Banyaknya cara memilih C dan D hanya ada 1.

Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah  $3! \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ . Banyaknya susunan =  $10 \times 8 \times 1 \times 1 \times 48 = 3840$ .

- Kasus 4,  $x_A = 0$ ,  $x_B = 2$ ,  $x_C = 0$  dan  $x_D = 4$ .





A dan B akan berdekatan sehingga tidak mungkin pasangan suami isteri. Banyaknya cara memilih A dan B adalah  $10 \times 8$ . C adalah pasangan A atau B sehingga banyaknya cara memilih C dan D adalah  $2 \times 1$ .

Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah  $3! \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ . Banyaknya susunan =  $10 \times 8 \times 2 \times 1 \times 48 = 7680$

- Kasus 5,  $x_A = 0$ ,  $x_B = 0$ ,  $x_C = 4$  dan  $x_D = 2$ .

A, B dan C akan berdekatan sehingga B bukan pasangan A atau C. Banyaknya cara memilih A ada 10 dan B ada 8. Banyaknya cara memilih C dan D hanya ada 1. Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah  $3! \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ . Banyaknya susunan =  $10 \times 8 \times 1 \times 1 \times 48 = 3840$

Banyaknya cara menyusun secara keseluruhan =  $10 \times 8 \times 7 \times 1 \times 48 = 26880$ .

∴ Jadi, banyaknya cara menyusun secara keseluruhan = **26880**.

#### 10. Jawaban : 4

$x^3 - x^2 + x - 2 = 0$  akar - akarnya  $p$ ,  $q$  dan  $r$ .

$$p + q + r = 1$$

$$pq + pr + qr = 1$$

$$pqr = 2$$

Alternatif:

$$(p + q + r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3p^2q + 3p^2r + 3pq^2 + 3pr^2 + 3q^2r + 3qr^2 + 6pqr$$

$$(p + q + r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(pq + pr + qr)(p + q + r) - 3pqr$$

$$1^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(1)(1) - 3(2) \quad p^3 + q^3 + r^3 = 4$$

∴ Jadi,  $p^3 + q^3 + r^3 = 4$ .

#### 11. Jawaban : 6

$$m^2 + n^5 = 252 \text{ dengan } m, n \in \mathbb{N}$$

$$n^5 \leq 252 \text{ sehingga } n \leq 3$$



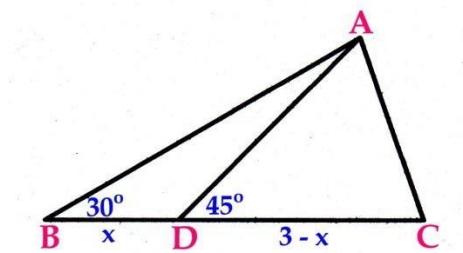
- Jika  $n = 1$  maka  $m^2 = 251$ . Tidak ada  $m \in \mathbb{N}$  yang memenuhi.
- Jika  $n = 2$  maka  $m^2 = 220$ . Tidak ada  $m \in \mathbb{N}$  yang memenuhi.
- Jika  $n = 3$  maka  $m^2 = 9$ . Nilai  $m \in \mathbb{N}$  yang memenuhi hanya  $m = 3$ .

Maka pasangan  $(m, n)$  yang memenuhi adalah  $(3, 3)$ .

$\therefore$  Jadi,  $m + n = 6$ .

## 12. Jawaban :

Misalkan panjang  $BD = x$ . Karena  $\angle ADC = 45^\circ$  maka  $\angle ADB = 135^\circ$  sehingga  $\angle BAD = 15^\circ$ .



$$\frac{AD}{\sin 30^\circ} = \frac{BD}{\sin 15^\circ}$$

$$AD = 2x \cos 15^\circ.$$

Pada  $\triangle ACD$  berlaku

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cos 45^\circ$$

$$AC^2 = (2x \cos 15^\circ)^2 + (3 - x)^2 - 2(2x \cos 15^\circ)(3 - x) \cos 45^\circ$$

Maka nilai  $AC$  bergantung dengan  $x$ .

$\therefore$  Jadi, belum dapat ditentukan panjang  $AC$ .

## 13. Jawaban : 78

Ada 2 kasus :

- Jika D sebagai pelari pertama

Banyaknya cara memilih pelari ke-2 ada 4, pelari ke-3 ada 3, pelari ke-4 ada 2 dan pelari ke-5 ada 1.

$$\text{Banyaknya cara} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$





- Jika D bukan sebagai pelari pertama Banyaknya cara memilih pelari ke-1 ada 3.  
Banyaknya cara memilih pelari ke-5 ada 3.  
Banyaknya cara memilih pelari ke-2 ada 3 dan pelari ke-3 ada 2 dan pelari ke-4 ada 1.  
Banyaknya cara =  $3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 = 54$   
Banyaknya cara menyusun pelari =  $24 + 54 = 78$ .  
 $\therefore$  Jadi, banyaknya cara menyusun pelari = **78**.

#### 14. Jawaban : 2

$$H = \{2^0 \cdot 3^0, 2^0 \cdot 3^1, 2^0 \cdot 3^2, 2^0 \cdot 3^3, \dots, 2^{10} \cdot 3^0\}$$

Alternatif:

$$3^6 = 729 \text{ dan } 3^7 = 2187$$

$$2^{10} = 1024 \text{ dan } 2^{11} = 2048.$$

$$x = \frac{2^{10} \cdot 3^6 \cdot 2^{10} \cdot 3^5 + 2^{10} \cdot 3^4 + \dots + 2^0 \cdot 3^6}{2^{10} \cdot 3^6} = \frac{p}{q} \text{ dengan } q = 2^{10} \cdot 3^6.$$

$$p = 3^6 \cdot (2^{10} + 2^9 + \dots + 1) + 3^5 \cdot (2^{10} + 2^5 + \dots + 2^1) + 3^4 \cdot (2^{10} + 2^5 + \dots + 2^3) + 3^3 \cdot (2^{10} + 2^5 + \dots + 2^4) + 3^2 \cdot (2^{10} + 2^9 + \dots + 2^6) + 3^1 \cdot (2^{10} + 2^{10} + \dots + 2^7) + 3^0 \cdot (2^{10} + 2^9)$$

$$p = 3^6 \cdot (2^{11} - 1) + 3^5 \cdot 2^1 \cdot (2^{10} - 1) + 3^4 \cdot 2^3 \cdot (2^8 - 1) + 3^3 \cdot 2^4 \cdot (2^7 - 1) + 3^2 \cdot 2^6 \cdot (2^5 - 1) + 3^1 \cdot 2^7 \cdot (2^4 - 1) + 3^0 \cdot 2^9 \cdot (2^2 - 1)$$

$$p = 1492263 + 497178 + 165240 + 54862 + 17856 + 5760 + 1536 = 2.234.697.$$

$$q = 2^{10} \cdot 3^6 = 746.496$$

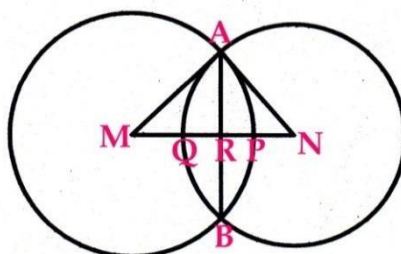
$$2 < \frac{p}{q} < 3$$

$\therefore$  Jadi,  $[x] = 2$ .

#### 15. Jawaban :

Misalkan M dan N berturut-turut adalah pusat lingkaran  $\Gamma_1$  dan  $\Gamma_2$ . Misalkan juga MN berpotongan dengan AB di R. Jelas bahwa R adalah pertengahan AB. Jadi,  $AR = RB = 5$ .





Jelas bahwa garis melalui kedua pusat lingkaran akan memotong tegak lurus talibusur persekutuan. Jadi,  $AR \perp MR$  dan  $AR \perp RN$ .

Karena  $MA = 13$  dan  $AR = 5$  maka  $MR = 12$ . Jadi,  $RP = 1$  dan  $QR = PQ - RP = 3 - 1 = 2$ .

Misalkan jari-jari  $\Gamma_2 = r$ .

$$AN^2 = AR^2 + RN^2$$

$$r^2 = 5^2 + (r - 2)^2$$

$$4r = 29$$

$$\therefore \text{Jadi jari-jari lingkaran } \Gamma^2 = \frac{29}{4}.$$

## 16. Jawaban : 1

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} = \frac{3}{4} \text{ dengan } x, y \in \mathbb{Z}$$

Jelas bahwa  $x, y \neq 0$ .

- Jika  $x < 0$  maka

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{xy^2} \leq 0$$

$$\frac{1}{y} \geq \frac{3}{4}$$

Nilai  $y$  yang memenuhi hanya  $y = 1$

Tetapi untuk  $y = 1$  maka  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} = 1 \neq \frac{3}{4}$

- Jika  $x > 0$

- Jika  $y < 0$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} < \frac{1}{x}$$



Nilai  $x$  yang memenuhi hanya  $x = 1$ .

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{4}$$

$$4y - 4 = -y^2$$

$$(y + 2)^2 = 8$$

Tidak ada  $y$  bulat yang memenuhi.

○ Jika  $y > 0$

▪ Jika  $x \leq y$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{x}$$

$$x \leq 2$$

Jika  $x = 1$  maka tidak ada  $y$  yang memenuhi.

$$\text{Jika } x = 2 \text{ maka } \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} = \frac{1}{4}$$

$$4y - 2 = y^2$$

$$(y - 2)^2 = 2$$

Tidak ada  $y$  bulat yang memenuhi.

▪ Jika  $y \leq x$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{y}$$

$$y \leq 2$$

Jika  $y = 1$  maka tidak ada  $x$  bulat yang memenuhi.

$$\text{Jika } y = 2 \text{ maka } \frac{1}{4} = \frac{3}{4x} \text{ yang dipenuhi oleh } x = 3.$$

Pasangan  $(x, y) = (3, 2)$  memenuhi persamaan.

Banyaknya pasangan bilangan bulat  $(x, y)$  yang memenuhi ada 1.

∴ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat  $(x, y)$  yang memenuhi ada 1.

**17. Jawaban : 9**





$$xy = \frac{1}{3}$$

Berdasarkan ketaksamaan AM-GM maka

$$\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6} \geq 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{9x^6}\right)\left(\frac{1}{4y^6}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{xy}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$$

$\therefore$  Jadi, nilai minimal dari  $\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6}$  adalah 9.

## 18. Jawaban : 2

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2$$

Alternatif:

*Lemma :*

Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa  $4^n > 4n^2$  untuk  $n \in \mathbb{N}$  dan  $n > 2$ .

Bukti :

$$\text{Jika } n = 3 \text{ maka } 64 = 4^3 > 4 \cdot (3)^2 = 36$$

Andaikan benar untuk  $n = k$  maka dianggap benar  $4^k > 4k^2$

$$4^{k+1} = 4 \cdot 4^k > 16k^2 = 4k^2 + (k-2) \cdot 8k + 16k + 4k^2$$

Karena  $k > 2$  maka  $4^{k+1} = 4 \cdot 4^k > 16k^2 = 4k^2 + (k-2) \cdot 8k + 16k + 4k^2 > 4k^2 + 8k + 4 = 4(k+1)^2$  Maka terbukti bahwa jika  $4^k > 4k^2$  maka  $4^{k+1} > 4(k+1)^2$  untuk  $k > 2$ . Jadi, terbukti bahwa  $4^n > 4n^2$  untuk  $n \in \mathbb{N}$  dan  $n > 2$

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

Karena ruas kiri habis dibagi 4 maka  $b$  genap. Misalkan  $b = 2m$  maka

$$4^{a-1} + a^2 + 1 = m^2$$

Jika  $a$  ganjil maka ruas kiri dibagi 4 akan bersisa 2 atau 3 yang tidak memenuhi syarat.

Misalkan  $a = 2n$  maka

$$4^{2n-1} + 4n^2 + 1 = m^2$$

Berdasarkan lemma untuk  $n > 2$  maka

$$(2^{2n-1})^2 = 4^{2n-1} < 4^{2n-1} + 4n^2 + 1 < 4^{2n-1} + 4n + 1 = (2^{2n-1})^2 + 2 \cdot 2^{2n-1} + 1 = (2^{2n-1} + 1)^2$$





$$(2^{2n-1})^2 < 4^{2n-1} + 4n^2 + 1 < (2^{2n-1} + 1)^2$$

$$(2^{2n-1})^2 < m^2 < (2^{2n-1} + 1)^2$$

Jadi, untuk  $n > 2$  maka  $m^2$  terletak di antara 2 bilangan kuadrat berurutan. Maka tidak ada  $n$  yang memenuhi.

Jika  $n = 1$  maka  $4^{2n-1} + 4n^2 + 1 = 9 = 3^2$ .

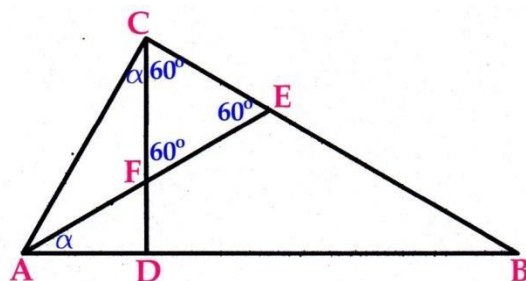
Jika  $n = 2$  maka  $4^{2n-1} + 4n^2 + 1 = 81 = 9^2$ .

Maka pasangan bilangan bulat positif  $(a, b)$  yang memenuhi adalah  $(2, 6), (4, 18)$ .

∴ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat positif  $(a, b)$  yang memenuhi ada 2.

## 19. Jawaban : 30

Misalkan  $\angle BAE = \angle ACD = \alpha$ . Misalkan juga panjang  $AC = x$  sehingga panjang  $AB = 2x$ .



Karena  $\angle CFE = 60^\circ$  maka  $\angle AFC = 120^\circ$ .

Karena  $\angle AFC = 120^\circ$  dan  $\angle ACF = \alpha$  maka  $\angle CAF = 60^\circ - \alpha$  sehingga  $\angle BAC = 60^\circ$ . Karena  $\angle BAC = 60^\circ$  dan  $\angle ACB = 60^\circ + \alpha$  maka  $\angle ABC = 60^\circ - \alpha$ .

Berdasarkan dalil sinus pada  $\triangle ABC$  maka

$$\frac{AB}{\sin(60^\circ + \alpha)} = \frac{AC}{\sin(60^\circ - \alpha)}$$

Karena  $AB = 2AC$  maka

$$2 \sin(60^\circ - \alpha) = \sin(60^\circ + \alpha)$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos \alpha - 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{3} \cos \alpha = \frac{3}{2} \sin \alpha$$



$$\cot \alpha = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\angle ABC = 60^\circ - \alpha = 30^\circ.$$

$\therefore$  Jadi, besar  $\angle ABC = 30^\circ$ .

## 20. Jawaban : 56

Bilangan pangkat 2, pangkat 4, pangkat 6, pangkat 8 dan pangkat 10 semuanya merupakan bilangan pangkat 2. Bilangan pangkat 9 juga merupakan bilangan pangkat 3. Jadi, persoalan setara dengan mencari banyaknya bilangan pangkat 2 atau pangkat 3 atau pangkat 5 atau pangkat 7. Misalkan A, B, C dan D berturut-turut adalah himpunan semua anggota bilangan bulat positif  $n \leq 2012$  yang merupakan pangkat 2, pangkat 3, pangkat 5 dan pangkat 7.

Karena  $44^2 = 1936$  dan  $45^2 = 2025$  maka banyaknya anggota himpunan  $A = |A| = 44$ .

Karena  $12^3 = 1728$  dan  $13^3 = 2197$  maka banyaknya anggota himpunan  $B = |B| = 12$ .

Karena  $4^5 = 1024$  dan  $5^5 = 3125$  maka banyaknya anggota himpunan  $C = |C| = 4$ .

Karena  $2^7 = 128$  dan  $3^7 = 2187$  maka banyaknya anggota himpunan  $D = |D| = 2$ .

$A \cap B$  adalah himpunan semua anggota bilangan bulat positif  $n \leq 2012$  yang merupakan pangkat 2 dan juga pangkat 3 yang berarti merupakan himpunan pangkat 6.

Karena  $3^6 = 729$  dan  $4^6 = 4096$  maka banyaknya anggota himpunan  $A \cap B = |A \cap B| = 3$ .

Dengan cara yang sama didapat

$$|A \cap C| = 2 ; |A \cap D| = 1 ; |B \cap C| = 1 ; |B \cap D| = 1 ; |C \cap D| = 1.$$

$$|A \cap B \cap C| = 1 ; |A \cap B \cap D| = 1 ; |A \cap C \cap D| = 1 ; |B \cap C \cap D| = 1.$$

$$|A \cap B \cap C \cap D| = 1$$

$$|A \cap B \cap C \cap D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|.$$

$$|A \cap B \cap C \cap D| = 44 + 12 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 56$$





∴ Jadi, banyaknya bilangan yang memenuhi ada **56**.

**21. Jawaban :**

$a, b, x, y$  bilangan bulat tak negatif.

$$a + b = xy$$

$$x + y = ab$$

Jika salah satu di antara  $a, b, x$  dan  $y$  sama dengan 0, tanpa mengurangi keumuman misalkan saja  $a = 0$  maka  $x + y = 0$  sehingga  $x = y = 0$  dan membuat  $b = 0$ .

Jadi, jika salah satu di antara  $a, b, x$  atau  $y$  sama dengan 0 maka yang lain akan sama dengan 0.

Andaikan bahwa tidak ada satupun di antara  $a, b, x$  atau  $y$  sama dengan 0.

Karena  $a$  dan  $b$  simetris maka dapat diandaikan  $a \leq b$ .

Karena  $a$  bilangan bulat lebih dari 0 maka  $x + y = ab \geq b$

$$2x + 2y \geq 2b$$

Karena  $a \leq b$  maka  $xy = a + b \leq 2b$

$$2x + 2y \geq 2b \geq a + b = xy$$

Jadi, didapat  $2x + 2y \geq xy$

$$(x - 2)(y - 2) \leq 4$$

Karena  $x$  dan  $y$  simetris maka tanpa mengurangi keumuman dapat dimisalkan  $x \leq y$ .

Maka  $x \leq 4$ .

- Jika  $x = 1$

$$a + b = y \text{ dan } 1 + y = ab$$

$$1 + a + b = ab$$

$$(a - 1)(b - 1) = 2$$

Didapat  $a = 2$  dan  $b = 3$  sehingga  $y = 5$

- Jika  $x = 2$





$$a + b = 2y \text{ dan } 2 + y = ab$$

$$4 + a + b = 2ab$$

$$(2a - 1)(2b - 1) = 9$$

Didapat  $a = 1$  dan  $b = 5$  sehingga  $y = 3$  atau  $a = 2$  dan  $b = 2$  sehingga  $y = 2$

- Jika  $x = 3$

$$a + b = 3y \text{ dan } 3 + y = ab$$

$$9 + a + b = 3ab$$

$$(3a - 1)(3b - 1) = 28$$

Didapat  $a = 1$  dan  $b = 5$  sehingga  $y = 2$

- Jika  $x = 4$

$$\text{Maka } y = 4$$

$$a + b = 16 \text{ dan } 8 = ab$$

Tidak ada  $a$  dan  $b$  bulat yang memenuhi.

$\therefore$  Semua tupel  $(a, b, x, y)$  yang memenuhi adalah  $(0, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 5, 2, 3)$ ,  $(1, 5, 3, 2)$ ,  $(2, 2, 2, 2)$ ,  $(2, 3, 1, 5)$ ,  $(2, 3, 5, 1)$ ,  $(3, 2, 1, 5)$ ,  $(3, 2, 5, 1)$ ,  $(5, 1, 2, 3)$ ,  $(5, 1, 3, 2)$ .

## 22. Jawaban :

$$x = 1 + \sqrt{y - z^2}$$

$$y = 1 + \sqrt{z - x^2}$$

$$z = 1 + \sqrt{x - y^2}$$

Karena akar suatu bilangan tidak mungkin negatif maka  $x, y, z \geq 1$ .

Alternatif:

Karena  $x, y, z \geq 1$  maka  $x^2 \geq x$  ;  $y^2 \geq y$  dan  $z^2 \geq z$

Karena  $x$  real maka  $y \geq z^2 \geq z \geq x^2 \geq x \geq y^2$

Karena  $y \geq y^2$  dan  $y^2 \geq y$  maka haruslah  $y = y^2$  yang dipenuhi oleh  $y = 1$ .

Dengan cara yang sama didapat  $x = z = 1$ .







∴ Jadi, tripel bilangan real  $(x,y,z)$  yang memenuhi  $x = y = z = 1$ .

### 23. Jawaban : 28

Misalkan kawan laki-laki tersebut adalah A, B, C, D, E dan F,

$$|AUBUCUDUEUF| = 11 \cdot {}_6C_1 - 6 \cdot {}_6C_2 + 4 \cdot {}_6C_3 - 3 \cdot {}_6C_4 + 3 \cdot {}_6C_5 - 10 \cdot {}_6C_6$$

$$|S| - 9 = 66 - 90 + 80 - 45 + 18 - 10 = 19$$

$$|S| = 28$$

Maka laki-laki tersebut pergi ke restoran sebanyak 28 kali.

Catatan : Penulis berkeyakinan bahwa maksud soal adalah seperti tersebut di atas. Bertemu dengan tepat tiga di antaranya berarti juga bertemu dengan 2 di antaranya. Persyaratan yang dipenuhi haruslah banyaknya pertemuan dengan semuanya paling banyak harus sama dengan pertemuan dengan lima di antaranya. Ternyata bertemu dengan semuanya sebanyak 10 kali lebih banyak dari bertemu dengan setiap lima di antaranya, yaitu 3 kali.

Jika tidak, maka soal harus diartikan bertemu dengan setiap lima di antaranya tidak berarti juga bertemu dengan empat di antaranya.

$$|AUBUCUDUEUF| = 11 \cdot {}_6C_1 - 6 \cdot {}_6C_2 + 4 \cdot {}_6C_3 - 3 \cdot {}_6C_4 + 3 \cdot {}_6C_5 - 10 \cdot {}_6C_6$$

$$|S| - 9 = 66 + 90 + 80 + 45 + 18 + 10 = 309$$

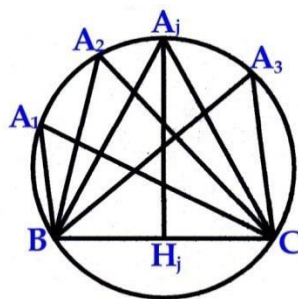
$$|S| = 318.$$

∴ Jadi, laki-laki tersebut makan di restoran sebanyak **28 kali**.

### 24. Jawaban :

Andaikan  $A_i$  dengan  $i = 1, 2, 3, \dots$  adalah kumpulan titik-titik sehingga  $\angle BA_iC = \alpha$  maka kumpulan titik-titik tersebut akan membentuk suatu lingkaran.





Misalkan  $H_i$  pada  $BC$  sehingga  $A_iH_i$  tegak lurus  $BC$ .

Jelas bahwa  $A_iH_i$  akan maksimum jika  $H_i$  merupakan pertengahan  $BC$ .

Misalkan  $A_iH_i$  maksimum =  $y$ . Saat  $A_iH_i = y$  maka  $AB = AC$ .

Misalkan saja saat ini  $AB = AC = x$ .

$$y^2 = x^2 - a^2$$

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{2x^2 - a^2}{2x^2}$$

$$\sin A = 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A = \frac{ay}{x^2}$$

$$AB + AC - BC \cos A - 2y \sin A = \frac{4x^3 - 2ax^2 + a^3 - 4ay^2}{2x^2} = \frac{4x^3 - 2ax^2 + a^3 - 4ax^2 + a^3}{2x^2}$$

$$AB + AC - BC \cos A - 2y \sin A = \frac{4x(x-a)^2 + 2a(x-a)^2}{2x^2} = \frac{2(x-a)^2(2x+a)}{2x^2}$$

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka

$$AB + AC - BC \cos A - 2y \sin A \geq 0 \text{ sehingga}$$

$$BC \cos A + 2y \sin A \leq 2x = AB + AC$$

$$\text{Maka didapat } BC \cos \angle BAC + 2AH \sin \angle BAC \leq BC \cos \angle BAC + 2y \sin \angle BAC \leq 2x = AB + AC$$

$\therefore$  Jadi, terbukti bahwa  $AB + AC \geq BC \cos \angle BAC + 2AH \sin \angle BAC$

25. Jawaban :

Lemma 1 :

Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa  $3^{2n+1} > (n+1)^4$  untuk  $n \in \mathbb{N}$  dan  $n > 1$ .



Bukti :

- Jika  $n = 2$  maka  $443 = 3^{2(2)+1} > (2 + 1)^4 = 81$
- Andaikan bentuk untuk  $n = k$ . Maka  $3^{2k+1} > (k + 1)^4$  dianggap benar untuk  $k \in \mathbb{N}$  dan  $k > 1$ .
- $3^{2(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2k+1} > 9(k + 1)^4 = 9k^4 + 36k^3 + 54k^2 + 36k + 9 = k^4 + 36k^3 + 54k^2 + 36k + 8k^2 + 9$   
 $3^{2(k+1)+1} = 3^2 \square 3^{2k+1} > 9(k + 1)^4 = k^4 + 36k^3 + 54k^2 + 36k + 8k^2 + 9 > k^4 + 8k^3 + 24k^2 + 32k + 16$   
 $3^{2(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2k+1} > k^4 + 8k^3 + 24k^2 + 32k + 16 = (k + 2)^4$

Jadi, terbukti bahwa  $3^{2n+1} > (n + 1)^4$  untuk  $n \in \mathbb{N}$  dan  $n > 1$

*Lemma 2 :*

Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa  $(n!)^4 < 3^{n^2-1}$  untuk  $n \in \mathbb{N}$  dan  $n > 1$ .

Bukti :

- Jika  $n = 2$  maka  $16 = (2!)^4 < 3^{2^2-1} = 27$
- Andaikan benar untuk  $n = k$ . Maka  $(k!)^4 < 3^{k^2-1}$  dianggap benar untuk  $k \in \mathbb{N}$  dan  $k > 1$ .
- Sesuai lemma 1 maka  
 $((k + 1)!)^4 = (k + 1)^4(k!)^4 < 3^{2k+1} \cdot 3^{k^2-1} = 3^{(k+1)^2-1}$

Jadi, terbukti bahwa  $(n!)^4 < 3^{n^2-1}$  untuk  $n \in \mathbb{N}$  dan  $n > 1$

- Jika  $i = 1$   
 $P_i = 2$  dan untuk  $n = 2$  maka  $P_i^{(n^2)} = P_{i-1} \cdot (n!)^4$   
Jadi, untuk  $i = 1$  sehingga  $P_i = 2$  tidak termasuk bilangan prima sederhana.
- Jika  $i > 1$   
 $P_i \geq 3$ 
  - Jika  $n = 1$   
 $P_i^{(n^2)} = P_i > P_{i-1} = P_{i-1} \cdot (n!)^4$





Jadi, untuk  $n = 1$  maka  $P_i^{(n^2)} > P_{i-1} \cdot (n!)^4$

- Jika  $n > 1$

Sesuai *lemma 2* dan mengingat bahwa  $P_i > P_{i-1}$  didapat

$$(n!)^4 < 3^{n^2-1} \leq P_i^{(n^2-1)} < \frac{P_i}{P_{i-1}} P_i^{(n^2-1)}$$

$$P_{i-1}(n!)^4 < P_i^{(n^2)}$$

Terbukti bahwa  $P_i^{(n^2)} > P_{i-1} \cdot (n!)^4$  untuk  $i > 1$  dan  $n \in \mathbb{N}$ .

$\therefore$  Jadi, semua bilangan prima sederhana adalah  **$P_i$  dengan  $i \in \mathbb{N}$  dan  $i \neq 1$** .

