PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMP

TAHUN 2020

1. **Jawaban :** $16! \times C(25,\ 16)$

Beri nomor kursi-kursi tersebut dengan nomor 1, 2, 3, 4, $\cdots$, 39, dan 40 (misalkan) dari ujung kiri ke ujung kanan dalam urutan tersebut. Misalkan $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{16}$ adalah nomor-nomor kursi yang diduduki oleh 16 orang tersebut dimana $a_i \in \{1, 2, 3, \cdots, 40\}$ untuk setiap bilangan asli $1 \le i \le 16$, lalu pandang himpunan $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{16}\}$. Definisikan pula $w_j = a_j - a_{j-1}$ dimana $w_j \ge 2$ untuk setiap bilangan asli $2 \le j \le 16$. Perhatikan bahwa

$$a_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_{16} = a_{16} \le 40$$

Maka terdapat bilangan asli k sehingga

$$a_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_{16} = 41 - k \Leftrightarrow a_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_{16} + k = 41$$

Misalkan $w_j = x_j + 1$ dimana x_j bilangan asli. Maka kita punya

$$a_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_{16} + k = 41$$

$$a_1 + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + \cdots + (x_{16} + 1) + k = 41$$

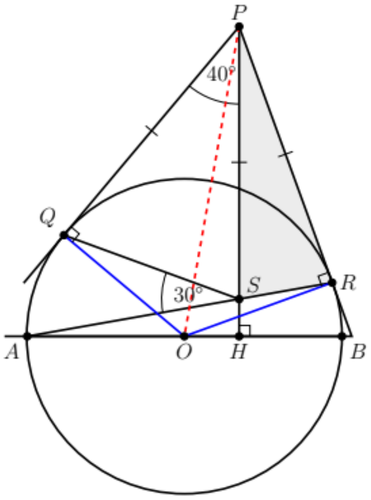
$$a_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{16} + k = 26$$

Kita tahu bahwa a_j bijektif dengan x_j, sehingga banyak himpunan $\{a_1, a_2, \ldots, a_{16}\}$ sama dengan menentukan banyak solusi dari (*). Dengan star and bar theorem, maka ada

$$C(26 - 1,\ 17 - 1) = C(25,\ 16)$$

Karena posisi 16 orang tersebut dapat ditukar-tukar (dipermutasi), maka banyaknya posisi duduk yang dapat disusun adalah $16! \times C(25,\ 16)$.

2. **Jawaban :** 20^o



Perhatikan bahwa $\angle ORP = \angle OQP = 90^\circ$ dan panjang $OR = OQ$. Sehingga kita punya $\triangle ORP$ kongruen dengan $\triangle OQP$. Demikian panjang $PQ = PR$.

Klaim : $\triangle PSR$ segitiga sama kaki.

Bukti. Kita punya

$$\angle HAS = 90^\circ - \angle HSA = 90^\circ - \angle RSP$$

Karena panjang $AO = OR$, maka

$$\angle ARO = \angle OAR = \angle HAR = \angle HAS$$

Tinjau bahwa

$$\angle PRS = 90^\circ - \angle ARO = 90^\circ - \angle HAS = 90^\circ - (90^\circ - \angle RSP) = \angle RSP$$

Akibatnya, $\angle PRS = \angle RSP$ yang menyimpulkan $\triangle PSR$ segitiga sama kaki.

Karena panjang $QP = PR = PS \Rightarrow QP = PS$, maka

$$\angle PQS = \angle PSQ = \frac{180^o - \angle QPS}{2} = \frac{180^o - 40^o}{2} = \frac{140^o}{2} = 70^o$$

Perhatikan bahwa $\angle PSA + \angle PSR = 180^\circ$. Kita punya

$$\angle PSR = 180^\circ - \angle PSA = 180^\circ - (30^\circ + 70^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

Karena panjang $PS = PR$, akibatnya $\angle PRS = \angle PSR = 80^\circ$. Maka kita peroleh

$$\angle RPS = 180^\circ - \angle PSR - \angle PRS = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

3. **Jawaban : 28**

   Karena fungsi kuadrat $g(x)$ memotong sumbu-x di titik $(-1, 0)$ dan $(1, 0)$, maka -1 dan 1 merupakan akar-akar dari $g(x)$. Akibatnya,

   $$g(x) = a(x-1)(x+1),\ a \neq 0$$

   Grafik $g(x)$ melalui titik $(0, -1)$, maka

   $$-1 = g(0) = a(0-1)(0+1) = a \cdot (-1) \cdot 1 = -a \Leftrightarrow a = 1$$

   Maka $g(x) = x^2 - 1$. Tinjau fungsi linier $f(x)$ memotong sumbu-x di titik $(-1, 0)$ dan $(0, 1)$.

   Misalkan $f(x) = ax + b$. Maka kita punya

   $$0 = f(-1) = -a + b \text{ dan } 1 = f(0) = b$$

   Kita peroleh bahwa $a = b = 1$ sehingga $f(x) = x + 1$. Kita definisikan fungsi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dimana $h(x) = (f(x))^2 - 2g(x) - x$. Kita punya

   $$h(x) = (x+1)^2 - 2x^2 - 1 - x = x^2 + 2x + 1 - 2x^2 + 2 - x = -x^2 + x + 3$$

   Kita ingin mencari banyak nilai x sehingga $h(x) = c$ dimana $c \in \{-10, -9, \cdots, 9, 10\}$. Sehingga kita punya

   $$0 = h(x) - c = -x^2 + x + 3 - c \Leftrightarrow 0 = x^2 - x + (c-3)$$

   Agar persamaan kuadrat tersebut memiliki penyeleseain bilangan real, maka diskriminannya harus $\Delta \geq 0$. Kita punya

   $$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(c-3) = 1 - 4c + 12 = 13 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow \frac{13}{4} \geq c$$

   Sehingga nilai $c = -10, -9, \cdots, 3$ yang berarti ada 14 kemungkinan. Karena c bilangan bulat, akibatnya $\Delta \neq 0$ sehingga terdapat dua solusi bilangan real berbeda untuk setiap $-10 \leq c \leq 3$. Maka banyak nilai x yang memenuhi adalah $14 \times 2 = 28$.

4. **Jawaban :**

7	7	
2	9	5
	2	4

Misalkan a dan b merupakan angka dari 1 sampai 9 yang diisi pada petak berikut.

^{1}G	^{2}F	
^{3}E	A	^{4}D
	^{5}C	B

Dari (1) posisi mendatar, faktorisasi 1001 adalah $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Dilihat dari kotak mendatar yang hanya boleh diisi dari posisi (1) hanya dua kotak, maka angka yang terletak pada kotak 1 dan kotak 2 merupakan angka pembentuk dari bilangan dua angka yang merupakan faktor komposit dari 1001. Sehingga kemungkinannya adalah 77 atau 91.

Sekarang, kita tinjau poin (1) posisi menurun.

- Jika $\overline{GF} = 91$ sehingga $G = 9$ dan $F = 1$. Maka $\overline{GE} - 1 = \overline{9E} - 1$ dan $\overline{GE} + 1 = \overline{9E} + 1$ keduanya harus bilangan prima sehingga E harus genap. Dengan mencoba semua kemungkinan nilai $\overline{9E}$ yaitu 92, 94, 96, 98, tidak ada kemungkinan nilai E yang memenuhi kondisi tersebut.

- Jika $\overline{GF} = 77$ sehingga $G = F = 7$. Maka $\overline{GE} - 1$ dan $\overline{GE} + 1$ keduanya merupakan bilangan prima sehingga E harus genap. Dengan mencoba semua kemungkinan nilai dari $\overline{GE}$ yaitu 72, 74, 76, 78, maka hanya akan dipenuhi ketika $\overline{GE} = 72$. Demikian $E = 2$.

Dari poin (3) mendatar, karena $\overline{EAD}$ bukan bilangan palindrom, maka $D \neq E = 2$. Dari poin (4) menurun, bilangan dua digit $\overline{DB} = p^3 \times q$. Sedangkan, dari poin (5) menurun, bilangan dua digit $\overline{CB} = p \times q^3$. Jika salah satu dari p, q bernilai lebih dari 3, maka salah satu dari $\overline{DB}$ atau $\overline{CB}$ bernilai lebih dari 99. Sehingga tidak mungkin bilangan dua digit. Maka $(p, q) = (3, 2)$ atau $(2, 3)$. Maka kemungkinan nilai untuk $\overline{DB}$ dan $\overline{CB}$ adalah 24 dan 54. Karena $D \neq E$, maka $\overline{DB} = 54$ dan $\overline{CB} = 24$. Demikian $B = 4$, $C = 2$, dan $D = 5$. Dari poin (2), maka $\overline{FAD}$ kelipatan 9. Sehingga

$$F + A + C = 7 + A + 2 = 9 + A \equiv 0 \pmod{9} \Leftrightarrow A \equiv 0 \pmod{9}$$

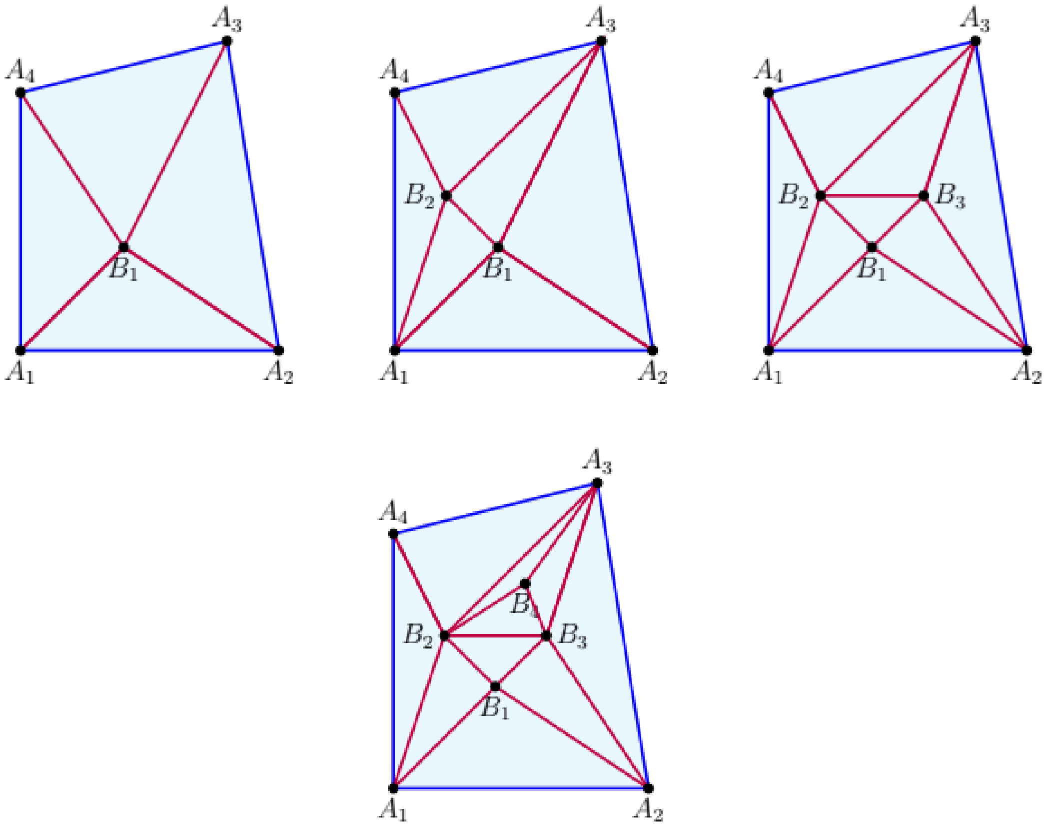
Sehingga $A = 9$. Maka kita peroleh susunan angka pada teka-teki silang tersebut sebagai berikut.

7	7	
2	9	5
	2	4

5. **Jawaban :**

Misalkan titik-titik $A_1, A_2, A_3, \cdots$ sebagai menara pengawas dan $B_1, B_2, B_3, \cdots$, sebagai menara pemantau.

a) Perhatikan gambar berikut.



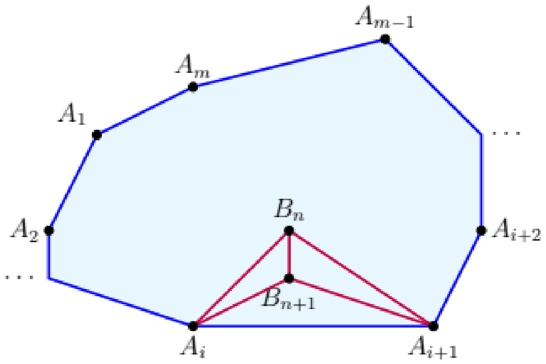
- Untuk $k(4,\ 1)$. Dari gambar tersebut, kita dapatkan daerah tersebut adalah $\Delta A_1B_1A_2$, $\Delta A_2B_1A_3$, $A_3B_1A_4$, dan $\Delta A_1B_1A_4$. Maka $k(4,\ 1) = 4$.

- Untuk $k(4,\ 2)$. Dari gambar tersebut, kita dapatkan daerah tersebut adalah $\Delta A_1A_2B_1$, $\Delta A_2B_1A_3$, $\Delta B_1A_3B_2$, $\Delta B_2A_3A_4$, dan $\Delta A_1B_1B_2$. Maka $k(4,\ 2) = 6$.

- Untuk $k(4,\ 3)$. Dari gambar tersebut, kita dapatkan daerah tersebut adalah $\Delta A_1B_1A_2$, $\Delta A_2B_1B_3$, $\Delta A_2B_3A_3$, $\Delta B_2B_1B_3$, $\Delta B_2B_3A_3$, $\Delta A_4B_2A_3$, $\Delta A_1B_2A_4$, dan $\Delta A_1B_1B_2$. Maka $k(4,\ 3) = 8$.

- Untuk $k(4,\ 4)$. Dari gambar tersebut, kita dapatkan daerah tersebut adalah $\Delta A_1A_2B_1$, $\Delta A_2B_1B_3$, $\Delta A_2B_3A_3$, $\Delta B_1B_2B_2$, $\Delta B_2B_3B_1$, $\Delta B_3B_4A_3$, $\Delta B_3B_4A_3$, $\Delta B_2B_4A_3$, $\Delta A_4B_2A_3$ dan $\Delta A_1B_2A_4$. Maka $k(4,\ 4) = 10$.

b) Misalkan menara pengawas dari kebun tersebut adalah $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$, dan $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ sebagai menara pemantau. Pilih B_n sehingga tidak ada B_k yang berada didalam $\triangle A_i B_n A_{i+1}$ dengan bilangan asli $1 \leq k < n$.



Banyak daerah pada konfigurasi ini adalah $k(m,n)$. Buat titik B_{n+1} yang terletak di dalam $\triangle A_i B_n A_{i+1}$. Dengan menghubungkan titik A_i, A_{i+1}, dan B_{n+1}, maka akan terbentuk tiga daerah pada $\triangle A_i B_n A_{i+1}$. Karena terdapat satu daerah yang telah terhitung, sehingga akan terbentuk dua daerah baru.

Sehingga kita dapat simpulkan bahwa

$$k(m, n+1) = k(m,n) + 2 \Leftrightarrow k(m, n+1) - k(m,n) = 2$$

Sehingga

$$k(m,2) - k(m,1) = 2$$

$$k(m,3) - k(m,2) = 2$$

$$\vdots$$

$$k(m,n) - k(m,n-1) = 2$$

Dengan menjumlahkan semuanya, maka

$$k(m,n) - k(m,1) = 2(n-1) \Leftrightarrow k(m,n) = 2n - 2 + k(m,1)$$

Mudah di tinjau bahwa $k(m,1) = m$. Sehingga $k(m,n) = m + 2n - 2$.

6. **Jawaban :**
Akan kita buktikan bahwa

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} \leq 2 - \frac{1}{a_{n+1}-1}$$

untuk setiap bilangan bahwa asli n. Akan kita buktikan dengan induksi. Mudah didapatkan bahwa $a_2 = 2$. Untuk $n = 1$, maka

$$\frac{1}{a_1} = 1 \leq 2 - \frac{1}{a_2-1} = 2 - \frac{1}{2-1} = 2 - 1 = 1$$

yang berarti benar. Asumsikan untuk setiap $n = 1,2,3, ..., k$ juga berlaku benar. Untuk $n = k + 1$, maka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_{k+1}} \leq 2 - \frac{1}{a_{k+1}-1} + \frac{1}{a_{k+1}} = 2 - \frac{1}{a_{k+1}(a_{k+1}-1)}$$

Tinjau bahwa

$$a_{k+1} - 1 = a_1 a_2 a_3 ... a_k$$

$$a_{k+1}(a_{k+1} - 1) = a_1 a_2 a_3 ... a_k a_{k+1}$$

$$a_{k+1}(a_{k+1} - 1) = a_{k+2} - 1$$

Kita dapatkan bahwa

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_{k+1}} \leq 2 - \frac{1}{a_{k+1}(a_{k+1}-1)} = 2 - \frac{1}{a_{k+2}-1}$$

yang menyimpulkan

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_{k+1}} \leq 2 - \frac{1}{a_{k+2}-1}$$

sehingga juga benar untuk $n = k + 1$. Maka menurut induksi terbukti.

Maka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} \leq 2 - \frac{1}{a_{n+1}-1} < 2$$

Dengan mengambil $n = 2019$, maka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_{2019}} < 2$$

7. **Jawaban : 8**

Tinjau bahwa

$$\sqrt{2020+\sqrt{2020}} < \sqrt{2020+\sqrt{2020+...+\sqrt{2020}}} < \sqrt{2020+\sqrt{2020+\sqrt{2020+...}}}$$

2020 muncul sebanyak 1442 kali

Perhatikan bahwa

$$\sqrt{2020+\sqrt{2020}} \approx \sqrt{2020+44,9} \approx \sqrt{2064,9} \approx 45,441$$

Misalkan

$$k=\sqrt{2020+\sqrt{2020+\sqrt{2020+...}}}$$

Maka

$$k=\sqrt{2020+\sqrt{2020+\sqrt{2020+...}}}=\sqrt{2020+k}$$

yang berarti $k=\sqrt{k+2020}$ dimana $k\geq 0$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, kita dapatkan $k^2-k-2020=0$. Maka

$$k_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2020)}}{2(1)}=\frac{1\pm\sqrt{8081}}{2}$$

Karena $k\geq 0$, maka

$$k=\frac{1+\sqrt{8081}}{2}\approx\frac{1+89,89}{2}\approx 45,445$$

Demikian $45{,}441 < a < 45{,}445$ yang berarti $[a]=46$.

Dengan cara yang sama, tinjau

$$\sqrt{1442+\sqrt{1442}} < \sqrt{1442+\sqrt{1442+...+\sqrt{1442}}} < \sqrt{1442+\sqrt{1442+\sqrt{1442+...}}}$$

1442 muncul sebanyak 2020 kali

Perhatikan bahwa

$$\sqrt{1442 + \sqrt{1442}} \approx \sqrt{1442 + 37,97} \approx 38,470$$

Misalkan

$$m = \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + ...}}}$$

Maka

$$m = \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + ...}}} = \sqrt{1442 + m}$$

yang berarti $m = \sqrt{1442 + m}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, kita dapatkan $m^2 - m - 1442 = 0$. Maka

$$m_{1,2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1442)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5769}}{2}$$

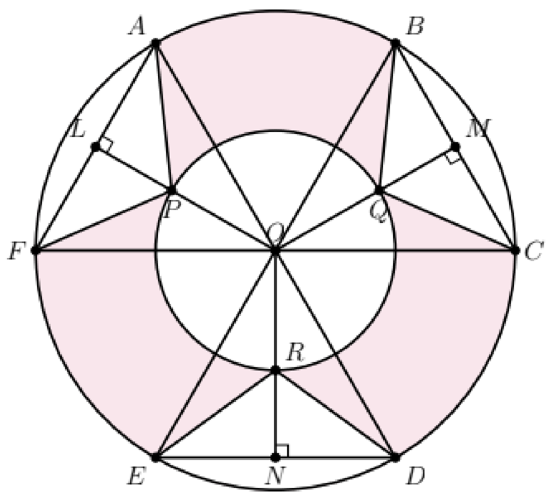
Karena $m \geq 0$, maka

$$m = \frac{1+\sqrt{5769}}{2} \approx \frac{1+75,95}{2} = 38,476$$

Demikian 38, 470 < *b* < 38, 476 yang berarti [*b*] = 38.

Sehingga *c* = *a* - *b* = 46 - 38 = 8.

8. **Jawaban :** $25(3 + \pi)\ cm^2$



Karena *A, B, C, D, E,* dan *F* membagi busur lingkaran besar menjadi enam bagian sama panjang, artinya lingkaran besar terbagi menjadi enam bagian yang kongruen. Sehingga kita punya

$$\angle FOA = \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = 60^\circ$$

Karena $\angle FOE + \angle EOD + \angle DOC = 180^\circ$, artinya *F, O, C* segaris. Begitu juga dengan *E, O, B* segaris dan *D, O, A* segaris.

Klaim : Titik *P, Q, R* dilalui oleh garis tinggi $\triangle FOA$, $\triangle OBC$ dan $\triangle OED$.

Bukti. Karena panjang $OF = OA$, maka besar sudut $\angle OFA = \angle FAO = \frac{180^o - 60^o}{2} = 60^o$ yang berarti $\triangle FOA$ sama sisi. Begitu juga dengan $\triangle OCB$ dan $\triangle OED$. Tarik garis tinggi dari titik *R* ke *ED* dan memotong *ED* di titik *N'*. Karena panjang $RD = RE$, maka panjang $EN' = N'D$. Tarik garis tinggi dari titik *O* ke *ED* dan memotong *ED* di titik *N*. Karena panjang $OE = OD$, maka panjang $EN = ND$. Hal ini menyimpulkan $N' = N$ yang berarti *O, R, N* segaris. Dengan cara yang serupa, jika *OL* dan *OM* berturut-turut garis tinggi $\triangle OFA$ dan $\triangle OCB$, maka *O, P, L* segaris dan *O, Q, M* segaris.

Perhatikan sektor *FOA*. Luas dari sektor lingkaran besar adalah

$$L_{1/6\, L\, .\, Besar} = \frac{1}{6}\pi \times 10^2 = \frac{100}{6}\pi\, cm^2$$

Sedangkan, luas sektor dari lingkaran kecil adalah

$$L_{1/6\, L\, .\, Besar} = \frac{1}{6}\pi \times 5^2 = \frac{25}{6}\pi\, cm^2$$

Luas tembereng dari sektor tersebut adalah luas sektor lingkaran besar dikurangi dengan segitiga sama sisi $\triangle OFA$.

$$L_{tembereng} = \frac{1}{6}\pi \times 10^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2\sqrt{3} = \left(\frac{100}{6}\pi - 25\sqrt{3}\right) cm^2$$

Perhatikan bahwa $\angle FOL = 30^\circ$, $\angle OFL = 60^\circ$, dan $\angle FLO = 90^\circ$. Akibatnya, perbandingan panjang $FL : OL : FO = 1 : \sqrt{3} : 2$. Maka panjang $OL = \frac{\sqrt{3}}{2} \times FO = 5\sqrt{3}$ cm. Tinjau *OP* merupakan jari-jari lingkaran kecil, maka panjang $OP = 5$ cm. Demikian panjang $PL = OL - OP = (5\sqrt{3} - 5)$ cm. Demikian luas segitiga *APF* adalah

$$L_{\triangle APF} = \frac{1}{2} \times AF \times LP = \frac{1}{2} \times 10 \times (5\sqrt{3} - 5) = (25\sqrt{3} - 25)\ cm^2$$

Maka luas daerah yang diarsir pada sektor FOA adalah

$$L_{arsir\ sektor\ FOA} = L_{1/6\ L\ .\ Besar} - L_{1/6\ L\ .\ kecil} - L_{tembereng} - L_{\triangle APF}$$

$$= \frac{100}{6}\pi - \frac{25}{6}\pi - \left(\frac{100}{6}\pi - 25\sqrt{3}\right) - \left(25\sqrt{3} - 25\right)$$

$$= \frac{100}{6}\pi - \frac{25}{6}\pi - \frac{100}{6}\pi + 25\sqrt{3} - 25\sqrt{3} + 25$$

$$= \frac{150-25\pi}{6}\ cm^2$$

Karena terdapat dua sektor lain yang sama dengan luas arsir sektor OFA, yaitu sektor OBC dan sektor ODE, maka jumlah luas daerah yang diarsir pada tiga sektor ini adalah

$$L_{arsir\ sektor\ FOA} + L_{arsir\ sektor\ COB} + L_{arsir\ sektor\ DOE} = 3 \times \frac{150-25\pi}{6} = \frac{150-25\pi}{2}\ cm^2$$

Sekarang perhatikan sektor OBA. Luas arsir dari sektor tersebut adalah

$$L_{arsir\ sektor\ OBA} = L_{1/6\ L\ .\ besar} - L_{1/6\ L\ .\ kecil} = \frac{100}{6}\pi - \frac{25}{6}\pi = \frac{75}{6}\pi\ cm^2$$

Karena terdapat dua sektor sektor lain yang sama dengan luas arsir sektor OBA, yaitu sektor OCD dan sektor OEF, maka jumlah luas daerah yang diarsir pada tiga sektor ini adalah

$$L_{arsir\ sektor\ OBA} + L_{arsir\ sektor\ OCD} + L_{arsir\ sektor\ OEF} = 3 \times \frac{75}{6}\pi = \frac{75}{2}\pi\ cm^2$$

Sehingga luas daerah yang diarsir seluruhnya adalah

$$L_{arsir} = \frac{150-25\pi}{2} + \frac{75}{2}\pi = \frac{150+50\pi}{2} = \frac{50(3+\pi)}{2} = 25(3 + \pi)\ cm^2$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah $25(3 + \pi)\ cm^2$.

9. **Jawaban :**

Misalkan banyaknya ikan koi dengan jenis kelamin jantan dan betina berturut-turut adalah j dan b dimana $n = b + j$. Diketahui bahwa peluang dia mendapatkan ikan koi dengan jenis kelamin sama adalah 12. Banyak cara memilih dua ikan berjenis kelamin jantan adalah $C(j, 2)$, sedangkan dua ikan berjenis kelamin betina adalah $C(b, 2)$. Maka peluangnya adalah

$$\frac{C(j,2)+C(b.2)}{C(b+j,2)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{j(j-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}}{\frac{(b+j)(b+j-1)}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{j^2-j+b^2-b}{b^2+j^2+2bj-b-j} = \frac{1}{2}$$

$$2j^2 - 2j + 2b^2 - 2b = b^2 + j^2 + 2bj - b - j$$

$$j^2 + b^2 - 2bj = b + j$$

$$(b - j)^2 = n$$

yang menyimpulkan n kuadrat sempurna.

10. **Jawaban : Rp225.000,00**

Kita tinjau satu per satu untuk menentukan harga per mililiter.

a. Jika membeli satu botol A, maka harganya adalah Rp10.000,00 yang berkapasitas sebanyak 5 ml. Sehingga harga botol A adalah Rp2.000,00/ml.

b. Jika membeli dua botol A, maka botol kedua mendapatkan potongan harga 20%. Sehingga harga dari botol kedua adalah 100% − 20% = 80% dari harga botol A aslinya. Maka total pembelian dua botol ini adalah

$$10.000 + \frac{80}{100} \times 10.000 = 10.000 + 8.000 = 18.000$$

yang berkapasitas 10 ml. Sehingga harga botol A adalah Rp1.800,00/ml.

c. Jika membeli tiga botol A, maka pembelian botol pertama adalah Rp10.000,00, pembelian botol kedua dan ketiga adalah

$$\frac{80}{100} \times 10.000 = 8.000$$

Sehingga total harganya adalah Rp26.000,00 berkapasitas 15 ml. Maka harga botol A adalah Rp1733,33/ml.

d. Jika membeli empat botol A, maka ada dua kemungkinan:

- Mendapatkan diskon hingga pembelian keempat. Harga botol A pada pembelian pertama adalah Rp10.000,00. Maka harga botol A pada pembelian kedua, ketiga, dan keempat adalah

$$\frac{80}{100} \times 10.000 = 8.000$$

Total harga keempat botol ini adalah Rp34.000,00 berkapasitas 20 ml. Maka harga botol A adalah Rp1.700,00/ml.

- Pada pembelian keempat mendapatkan satu botol A secara gratis. Maka harga keempat botol tersebut totalnya adalah Rp40.000,00 lalu mendapatkan satu botol A secara gratis, yang artinya berkapasitas 25 ml. Maka harga botol A adalah Rp1600,00/ml.

e. Jika membeli sebuah botol B dengan harga Rp15.000,00 berkapasitas 8 ml, maka harganya Rp1.875/ml.

f. Jika membeli dua botol B, maka botol kedua mendapat potongan harga 20%. Sehingga total harga untuk pembelian dua botol ini adalah

$$15.000 + \frac{80}{100} \times 15.000 = 24.000$$

berkapasitas 16 ml. Maka harga botol B adalah Rp1500/ml

g. Jika membeli tiga botol B, maka akan mendapatkan satu botol B secara gratis. Artinya, total harganya adalah Rp45.000,00 berkapasitas 32 ml. Maka harga botol B adalah Rp1.406,25/ml.

h. Jika membeli satu botol C dengan harga Rp25.000,00 berkapasitas 14 ml, maka harga botol C adalah Rp1.785,71/ml.

i. Jika membeli dua botol C, maka akan mendapatkan satu botol A secara gratis. Maka total pembeliannya adalah Rp50.000,00 berkapasitas 33 ml yang berarti Rp1.515,15/ml.

j. Jika membeli tiga botol C, maka akan mendapatkan satu botol B secara gratis. Maka total pembeliannya adalah Rp75.000,00 berkapasitas 50 ml yang berarti Rp1500,00/ml.

Dari hal-hal diatas, harga termurah pada nomor 7, yaitu Rp1406,25/ml dengan membeli tiga botol B (dan mendapatkan satu botol B secara gratis). Kita memerlukan beberapa botol sehingga dapat menampung 155 ml. Maka pembayaran minimum dapat tercapai jika kita melakukan pembelian pada nomor 7 sebanyak 5 kali (sehingga diperoleh kapasitas 160 ml). Karena jika terdapat satu botol saja yang harganya lebih dari Rp1.406,25/ml, maka harganya dapat dipastikan lebih dari Rp225.000,00.

Jadi, pembayaran minimumnya adalah Rp225.000,00.