PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMP

TAHUN 2013

1. **Jawaban :** $x = -\sqrt{2}$ **atau** $x = \sqrt{2}$

   Untuk sebarang bilangan real $y \neq 0$, substitusikan nilai $x = y$ dan $x = \frac{1}{y}$ sehingga berturut - turut diperoleh

$$f(y) + 2f\left(\frac{1}{y}\right) = 3y \ldots\ldots. (1)$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) + 2f(y) = \frac{3}{y} \ \ldots\ldots. (2)$$

   Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$3f(y) = \frac{6}{y} - 3y \Leftrightarrow f(y) = \frac{2}{y} - y$$

   Dari sini diperoleh

$$f(x) = f(-x) \Leftrightarrow \frac{2}{x} - x = -\frac{2}{x} + x$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x} = 2x$$

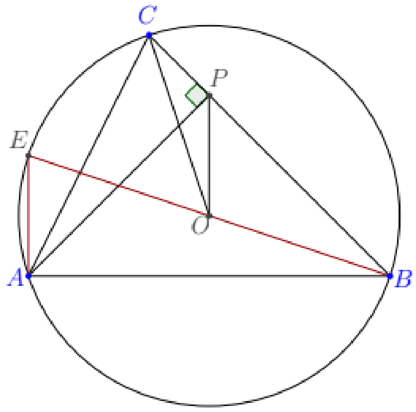
$$\Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ atau } x = \sqrt{2}$$

   Jadi, nilai x yang memenuhi $f(x) = f(-x)$ adalah $x = -\sqrt{2}$ atau $x = \sqrt{2}$.

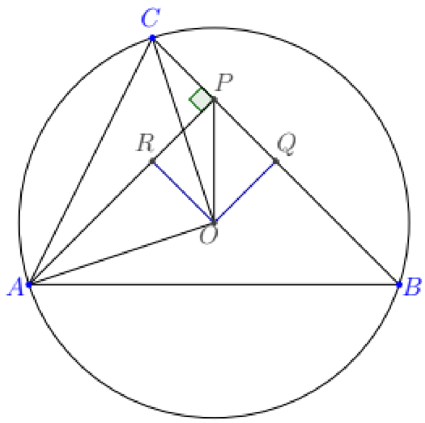
2. **Jawaban** :

   Perpanjang garis BO sehingga memotong lingkaran di titik E (seperti terlihat pada gambar). Perhatikan bahwa BE adalah diameter lingkaran luar $\triangle ABC$. Hal ini berakibat $\angle BAE = 90^\circ$.



Oleh karena itu, untuk membuktikan $\angle COP + \angle CAB < 90^\circ$ cukup ditunjukkan bahwa $\angle COP < \angle CAE$. Akan tetapi $\angle CAE = \angle CBE = \angle OCP$. Sehingga cukup ditunjukkan $\angle COP < \angle OCP$. Atau setara dengan menunjukkan $CP < OP$.

Untuk menunjukkan $CP < OP$, tambahkan beberapa titik bantu yaitu titik Q pada sisi BC sehingga $OQ \perp BC$ dan titik R pada ruas garis AP sehingga $OR \perp AP$ (seperti pada gambar di bawah ini). Diperoleh $OQPR$ berupa persegi panjang dengan $PQ = OR$ dan $PR = OQ$.



Perhatikan bahwa

$$\angle CAO = \angle ACO = \frac{180^o - \angle AOC}{2} = \frac{180^o - 2\angle ABC}{2} = 90^o - \angle ABC$$

selain itu

$$\angle CAP = 90^o - \angle ACB$$

Dari kedua hasil di atas diperoleh

$\angle PAO = \angle CAO - \angle CAP = (90^o - \angle ABC) - (90^o - \angle ACB) = \angle ACB - \angle ABC$

dan karena $\angle ABC + 30^o \leq \angle ACB$ berakibat $\angle PAO \geq 30^o$. Sehingga diperoleh $OR = OA \cdot \sin \angle PAO \geq \frac{OA}{2}$.

Ingat kembali bahwa $PQ = OR$ sehingga $\angle PQ \geq \frac{OA}{2} = \frac{OC}{2}$. Dengan menggabungkan fakta bahwa $CQ < OC, CQ = CP + PQ$ dan $\angle PQ \geq \frac{OC}{2}$ dapat disimpulkan $CP < PQ$.

Sehingga diperoleh

$$CP < PQ < OP$$

seperti apa yang diharapkan.

Jadi, terbukti $\angle COP + \angle CAB < 90^o$.

3. **Jawaban** :

Tanpa mengurangi kerumunan misalkan $1 < a < b < c$. Karena abc membagi habis $ab + bc + ca + 2$ itu berarti terdapat bilangan asli k sedemikian sehingga

$$ab + bc + ca + 2 = k \cdot abc \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (1)$$

Dari persamaan (1) diperoleh

$$k = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{abc}$$

Mengingat $1 < a < b < c$ diperoleh

$$k \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{14}{12} < 2$$

Sehingga nilai k yang mungkin hanya $k = 1$. Selain itu jika $a \geq 3$ diperoleh

$$k \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{49}{60} < 1$$

yang jelas tak mungkin karena k bilangan asli. Jadi, diperoleh $a = 2$.

Dengan mengsubstitusikan nilai $k = 1$ dan $a = 2$ pada persamaan (1) diperoleh

$$2b + bc + 2c + 2 = 2bc$$

yang setara dengan

$$(b - 2)(c - 2) = 6$$

Oleh karena itu, ada dua kasus yang mungkin yaitu

i. b - 2 = 1 dan c - 2 = 6 sehingga diperoleh b = 3 dan c = 8.

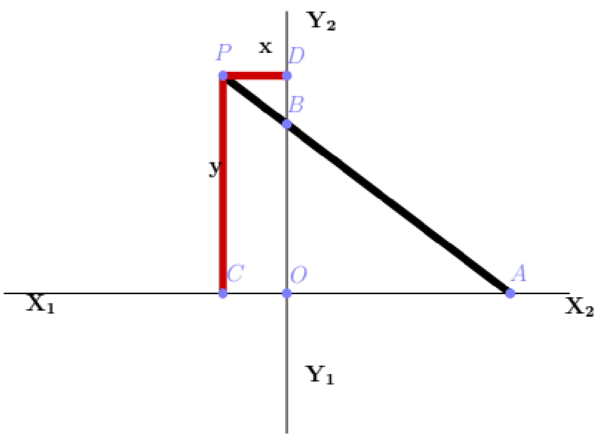
ii. b - 2 = 2 dan c - 2 = 3 sehingga diperoleh b = 4 dan c = 5.

Mudah dicek bahwa $a = 2$, $b = 3$, $c = 8$ dan $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$ serta semua permutasinya (total ada 12 solusi untuk tripel (a,b,c) yang mungkin).

4. **Jawaban** :

Untuk menyelesaikan soal ini, harus dicari hubungan antara variable - variable *a, b, x* dan *y*.

Karena berbicara mengenai geometri maka salah satu alat yang dapat digunakan tentu saja adalah kesebangunan. Untuk itu perhatikan gambar di bawah ini (gambar seperti pada soal setelah ditambah beberapa titik untuk memudahkan komputasi).



Perhatikan bahwa $\triangle AOB$ sebangun dengan $\triangle BDP$ sehingga diperoleh

$$\frac{OA}{AB} = \frac{PD}{PB} \Leftrightarrow \frac{OA}{a-b} = \frac{x}{b}$$

sehingga $OA = \frac{x(a-b)}{b}$.

Selanjutnya diperoleh (dengan bantuan Pythagoras tentunya)

$$OD = OB + BD \Leftrightarrow y = \sqrt{(a-b)^2 - \frac{x^2(a-b)^2}{b^2}} + \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\frac{a-b}{b}\right)\sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow b^2y^2 = a^2(b^2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Jadi, terbukti lintasan titik P berupa ellips dengan persamaan $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

5. **Jawaban** : $\frac{419}{7500}$

Berdasarkan tahap - tahap yang diberikan pada soal maka bagi menjadi 4 kasus, sebagai berikut :

a. Tahap ke-1 terambil bola berwarna putih dari kotak A dan Tahap ke-2 terambil bola berwarna putih dari kotak B.

Peluang terambil bola putih dari kotak A pada Tahap ke-1 adalah $\frac{3}{5}$. Selanjutnya kotak B berisi 4 bola putih dan 2 bola merah, sehingga peluang terambil bola berwarna putih pada Tahap ke-2 adalah $\frac{4}{6}$. Pada Tahap ke-3, kotak A berisi 2 bola putih dan 2 bola merah, kotak B berisi 3 bola putih dan 2 bola merah, kotak C berisi 4 bola putih dan 2 bola merah. Sehingga peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada Tahap ke-3 adalah $\frac{2}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{6}$.

Jadi, peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada kasus ini adalah

$\frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{75}$

b. Tahap ke-1 terambil bola berwarna putih dari kotak A dan Tahap ke-2 terambil bola berwarna merah dari kotak B.

Peluang terambil bola putih dari kotak A pada Tahap ke-1 adalah $\frac{3}{5}$. Selanjutnya kotak B berisi 4 bola putih dan 2 bola merah, sehingga peluang terambil bola berwarna merah pada Tahap ke-2 adalah $\frac{2}{6}$. Pada Tahap ke-3, kotak A berisi 2 bola putih dan 3 bola merah, kotak B berisi 4 bola putih dan 1 bola merah, kotak C berisi 3 bola putih dan 2 bola merah. Sehingga peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada Tahap ke-3 adalah $\frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5}$.

Jadi, peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada kasus ini adalah

$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{625}$

c. Tahap ke-1 terambil bola berwarna merah dari kotak A dan Tahap ke-2 terambil bola berwarna putih dari kotak C.

Peluang terambil bola merah dari kotak A pada Tahap ke-1 adalah $\frac{2}{5}$. Selanjutnya kotak C berisi 3 bola putih dan 3 bola merah, sehingga peluang terambil bola berwarna putih pada Tahap ke-2 adalah $\frac{3}{6}$. Pada Tahap ke-3, kotak A berisi 4 bola putih dan 1 bola merah, kotak B berisi 3 bola putih dan 2 bola merah, kotak C berisi 2 bola putih dan 3 bola merah. Sehingga peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada Tahap ke-3 adalah $\frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$.

Jadi, peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada kasus ini adalah

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{625}$

d. Tahap ke-1 terambil bola berwarna merah dari kotak A dan Tahap ke-2 terambil bola berwarna putih dari kotak C.

Peluang terambil bola merah dari kotak A pada Tahap ke-1 adalah $\frac{2}{5}$. Selanjutnya kotak C berisi 3 bola putih dan 3 bola merah, sehingga peluang terambil bola berwarna merah pada Tahap ke-2 adalah $\frac{3}{6}$. Pada Tahap ke-3, kotak A berisi 3 bola putih dan 1 bola merah, kotak B berisi 3 bola putih dan 3 bola merah, kotak C berisi 3 bola putih dan 2 bola merah. Sehingga peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada Tahap ke-3 adalah $\frac{1}{4} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5}$.

Jadi, peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada kasus ini adalah

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{100}$

Dari keempat kasus di atas maka total peluang terambil 3 bola berwarna merah pada Tahap ke-3 yaitu

$$\frac{2}{75}+\frac{6}{625}+\frac{6}{625}+\frac{1}{100}=\frac{419}{7500}$$

6. Jawaban : Tidak ada bilangan asli *n* yang memenuhi

Kita buktikan dengan kontradiksi. Andaikan terdapat bilangan asli n sehingga $49|n^2+5n+1$. Karena $49|n^2+5n+1$ maka berakibat $7|n^2+5n+1=(n-1)(n+6)+7$ sehingga $7|(n-1)$ atau $7|(n+6)$. Akan tetapi $7|(n^2+6)-(n-1)=7$. Dengan kata lain, $7|(n-1)$ dan $7|(n+6)$. Oleh karena itu, diperoleh $49|(n-1)(n+6)$. Dan karena $49(n-1)(n+6)+7$ maka diperoleh $49|7$ yang jelas tidak mungkin. Jadi, terbukti tidak ada bilangan asli n sehingga $49|n^2+5n+1$.

Selain dengan cara di atas (yang menurut saya harus sedikit kreatif), ada cara lain yang lebih umum dan mudah dilihat. Yaitu dengan bekerja pada modulo 7 dan membagi kasus. Ada 7 kasus untuk pilihan n yang mungkin yaitu

a. $n \equiv 0 \bmod 7$.
   Sehingga $n^2+5n+1\equiv 1 \bmod 7$. Jadi, kasus ini tidak memenuhi.

b. $n \equiv 1 \bmod 7$.
   Sehingga $n^2+5n+1\equiv 1+5+1\equiv 7\equiv 0 \bmod 7$. Jadi, kasus ini ada kemungkinan memenuhi.

c. $n \equiv 2 \bmod 7$.
   Sehingga $n^2+5n+1\equiv 4+10+1\equiv 15\equiv 1 \bmod 7$. Jadi, kasus ini tidak memenuhi.

d. $n \equiv 3 \bmod 7$.
   Sehingga $n^2+5n+1\equiv 9+15+1\equiv 25\equiv 4 \bmod 7$. Jadi, kasus ini tidak memenuhi.

e. $n \equiv 4 \bmod 7$.
   Sehingga $n^2+5n+1\equiv 16+20+1\equiv 37\equiv 2 \bmod 7$. Jadi, kasus ini tidak memenuhi.

f. $n \equiv 5 \bmod 7$.

Sehingga $n^2 + 5n + 1 \equiv 25 + 25 + 1 \equiv 51 \equiv 2 \mod 7$. Jadi, kasus ini tidak memenuhi.

g. $n \equiv 6 \bmod 7$.

Sehingga $n^2 + 5n + 1 \equiv 36 + 30 + 1 \equiv 67 \equiv 4 \mod 7$. Jadi, kasus ini tidak memenuhi.

Jadi, satu-satunya bilangan asli n yang mungkin adalah $n \equiv 1 \bmod 7$ atau $n = 7k + 1$ untuk suatu bilangan bulat nonnegatif k. Akan tetapi untuk $n = 7k + 1$ diperoleh

$$(7k + 1)^2 + 5(7k + 1) + 1 = 49k^2 + 14k + 1 + 35k + 5 + 1 = 49(k^2 + k) + 7$$

yang jelas tidak habis dibagi oleh 49. Jadi, dapat disimpulkan tidak ada bilangan asli n sehingga $49 | n^2 + 5n + 1$.

7. **Jawaban** :

Karena parabola tersebut melalui titik $(-3, 4)$ dan $(3, 16)$ diperoleh

$$9a - 3b + c = 4 \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$9a + 3b + c = 16 \cdots\cdots\cdots(2)$$

dari persamaan (1) dan (2) di atas diperoleh $6b = 12 \Leftrightarrow b = 2$.

Perhatikan juga bahwa parabola tersebut tidak memotong sumbu-X oleh karena itu diskriminan dari $y = ax^2 + bx + c$ kurang dari nol,

$$b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow 4 - 4ac < 0 \Leftrightarrow ac > 1 \cdots\cdots(3)$$

Selain itu, dari persamaan (1) dan $b = 2$ diperoleh pula $c = 10 - 9a$. Jika nilai $c = 10 - 9a$ disubstitusikan ke pertidaksamaan (3) diperoleh,

$$a(10 - 9a) > 1 \Leftrightarrow 9a^2 - 10a + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (9a - 1)(a - 1) < 0$$

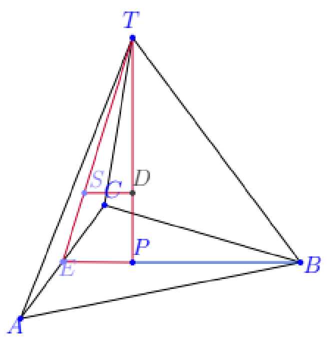
sehingga diperoleh $\frac{1}{9} < a < 1$.

Misalkan absis dari titik puncak parabola tersebut adalah x_p, kita ketahui bahwa $x_p = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2a} = -\frac{1}{a}$ dan karena $\frac{1}{9} < a < 1$ maka diperoleh $-9 < x_p < -1$.

Jadi, kemungkinan nilai absis yang mungkin untuk titik puncak parabola tersebut adalah $-9 < x_p < -1$.

8. **Jawaban :** $\frac{2\sqrt{2}}{81}\ cm^2$

Untuk membuat visualisasi soal ini dalam bentuk tiga dimensi relatif susah. Oleh karena itu, kita ambil titik *P* dan *S* sebagai wakilnya (seperti pada gambar di bawah ini).



Perhatikan bahwa *TP* dan *DP* berturut - turut adalah tinggi limas segitiga beraturan *TABC* dan *PQRS*. Dan karena bidang *ABC* dan *PQR* sejajar maka *EP*//*SD*. Hal ini berakibat ΔTEP sebangun dengan ΔTSD. Dan karena $\frac{TS}{SE} = 2$ diperoleh $\frac{TP}{DP} = 3$.

Selanjutnya, kita hitung terlebih dahulu volume limas segitiga beraturan *TABC*. Perhatikan kembali gambar di atas. Segitiga *ABC* adalah segitiga samasisi sehingga *BE* adalah garis berat dan sekaligus garis tinggi. Oleh karena itu dengan pytagoras diperoleh $BE = \sqrt{3}$ sehingga $BP = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Sekali lagi dengan bantuan pytagoras pada ΔBPT diperoleh $TP = \sqrt{\frac{8}{3}}$. Sehingga volume limas segitiga beraturan *TABC* yaitu

$$\text{Volume Limas } TABC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AC \times BE \times TP$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{8}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Mengingat limas $TABC$ sebangun dengan limas $PQRS$, diperoleh

$$\text{Volume Limas } PQRS = \left(\frac{DP}{TP}\right)^3 \times \text{Volume Limas } TABC$$

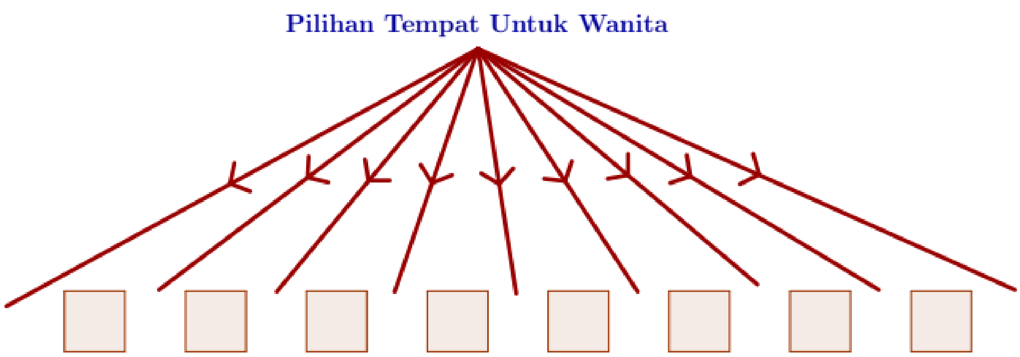
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{81}$$

Jadi, volume limas segitiga beraturan $PQRS$ adalah $\frac{2\sqrt{2}}{81}\ cm^2$.

9. **Jawaban** :

Terlebih dahulu atur tempat duduk 8 pria dalam satu baris yaitu ada 8! cara. Selanjutnya kelima wanita tersebut dapat ditempatkan di sela - sela tempat duduk laki - laki, yaitu ada 9 pilihan tempat duduk yang dapat dipilih oleh kelima wanita tersebut, seperti gambar berikut.



Sehingga cara mengatur tempat duduk kelima wanita tersebut adalah $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$ cara. Jadi, total banyak posisi duduk yang mungkin dari ketiga belas tamu istimewa tersebut adalah $15120 \times 8!$ cara.

10. **Jawaban** :

Misalkan a_{ij} menyatakan bilangan pada baris ke-i, kolom ke-j. Pertama - tama isi terlebih dahulu tabel $(n-1)\times(n-1)$ yang pertama dengan 1 atau -1. Banyaknya cara pengisian jelas ada $2^{(n-1)^2}$. Selanjutnya untuk bilangan - bilangan yang diisikan pada kolom terakhir yaitu kolom ke-n ada tepat satu pilihan, menyesuaikan agar perkalian setiap baris ke-i sama dengan -1. Sebagai contoh untuk a_{1n} nilainya tergantung dari hasil $\prod_{i=1}^{n-1} a_{1i}$. Oleh karena itu pengisian bilangan-bilangan pada kolom ke-n adalah unik untuk setiap cara pengisian pada tabel $(n-1)\times(n-1)$ yang pertama. Demikian pula untuk pengisian bilangan - bilangan pada baris ke-n juga unik.

Dari sini dapat dilihat bahwa banyaknya cara pengisian tabel $n \times n$ sesuai kriteria pada soal ada maksimal $2^{(n-1)^2}$. Mengapa demikian? Sebab untuk setiap cara pengisian yang diperoleh dari tabel $(n-1)\times(n-1)$ yang pertama, bisa jadi kita tidak dapat mengisi kolom ke-n dan baris ke-n sehingga dipenuhi kriteria pada soal. Apa masalahnya? Tentu saja mudah dilihat bahwa untuk mengisi kolom ke-n dari a_{1n} sampai dengan $a_{(n-1)n}$ atau untuk mengisi baris ke-n dari a_{n1} sampai dengan $a_{n(n-1)}$ tidak ada masalah. Masalahnya terletak pada bilangan a_{nn} karena nilainya ditentukan oleh $\prod_{i=1}^{n-1} a_{in}$ dan $\prod_{i=1}^{n-1} a_{ni}$. Dengan kata lain, untuk menjamin bahwa untuk setiap cara pengisian dari tabel $(n-1)\times(n-1)$ yang pertama, kita selalu bisa mengisi bilangan - bilangan pada kolom ke-n dan baris ke-n sehingga kondisi pada soal terpenuhi, harus dibuktikan bahwa

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_{in} = \prod_{i=1}^{n-1} a_{ni}$$

Untuk itu, misalkan A adalah hasil perkalian semua bilangan yang diisikan pada tabel $(n-1)\times(n-1)$ yang pertama. Diperoleh

$$A \times \prod_{i=1}^{n-1} a_{in} = (-1)^{n-1}$$

demikian pula

$$A \times \prod_{i=1}^{n-1} a_{ni} = (-1)^{n-1}$$

Dari kedua kesamaan di atas diperoleh

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_{in} = \prod_{i=1}^{n-1} a_{ni}$$

seperti yang diharapkan.

Jadi, banyaknya cara pengisian tabel *n x n* tersebut adalah $2^{(n-1)^2}$.