PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMP

TAHUN 2012

1. **Jawaban : 1 : 99**

Misalkan jumlah amoeba pada hari pertama adalah a dan jumlah bakteri pada hari pertama adalah b. Selain itu definisikan pula A_i dan B_i berturut - turut sebagai jumlah amoeba dan bakteri pada hari ke-i. Maka diperoleh dua barisan bilangan yaitu

$$\begin{aligned} A_1 &= a \\ A_2 &= 2a \\ A_3 &= 4a \\ A_4 &= 8a \\ \vdots &= \vdots \\ A_{100} &= 2^{99}a \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} B_1 &= b \\ B_2 &= 2b - 2a \\ B_3 &= 4b - 4a - 4a \\ B_4 &= 8b - 8a - 8a - 8a \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

$$B_{100} = 2^{99}b - 99 \cdot 2^{99}a$$

Karena pada hari ke-100 bakteri punah maka diperoleh $B_{100} = 0$ sehingga

$$2^{99}b - 99 \cdot 2^{99}a = 0$$

$$b - 99a = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{99}$$

Oleh karena itu, perbandingan jumlah amoeba dengan jumlah bakteri pada hari pertama adalah 1 : 99.

2. **Jawaban : 1625**

Sederhanakan bentuk $f(n)$ terlebih dahulu dengan mengalikan bentuk yang ada dengan sekawannya, yaitu

$$f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \cdot \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}$$

$$= \frac{4n(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) + \sqrt{4n^2-1}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})}{2}$$

$$= \frac{4n(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) + (2n+1)\sqrt{2n-1} - (2n-1)\sqrt{2n+1}}{2}$$

$$= \frac{2n\sqrt{2n+1} - 2n\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}}{2}$$

$$= \frac{(2n+1)\sqrt{2n+1} - (2n-1)\sqrt{2n-1}}{2}$$

dari sini diperoleh

$$f(13) = \frac{27\sqrt{27} - 25\sqrt{25}}{2}$$

$$f(14) = \frac{29\sqrt{279} - 27\sqrt{27}}{2}$$

$$f(15) = \frac{31\sqrt{31} - 29\sqrt{29}}{2}$$

$$: \; = \; :$$

$$f(111) = \frac{223\sqrt{223} - 221\sqrt{221}}{2}$$

$$f(112) = \frac{225\sqrt{225} - 223\sqrt{223}}{2}$$

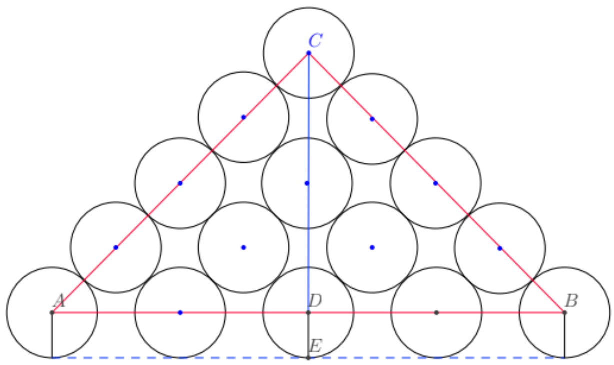
sehingga

$$f(13) + f(14) + f(15) + ... + f(111) + f(112) = \frac{225\sqrt{225} - 25\sqrt{25}}{2} = 1625$$

3. **Jawaban :** $(40\sqrt{2} + 10)$ **cm**

Susunan bola yang dibentuk oleh Budi dari tingkat atas ke tingkat dasar membentuk barisan persegi yaitu 1, 4, 9, 16, 25, 36, . . .

Oleh karena itu, jika Bambang memiliki 55 bola dan disusun seperti cara Budi maka akan ada 5 tingkatan yaitu 1, 4, 9, 16, 25. Apabila dilihat dari samping dari arah sudut maka akan diperoleh gambar seperti di bawah ini :



Ketinggian pusat bola yang paling atas diukur dari permukaan meja pada susunan bola yang dilakukan Bambang adalah panjang ruas garis CE.

Perhatikan bahwa $\triangle ABC$ adalah segitiga sama kaki dengan $AC = BC = 80$ cm dan $AB = 80\sqrt{2}$. Selain itu ruas garis CD adalah garis tinggi sekaligus garis berat $\triangle ABC$ oleh karena itu, $\angle BDC = 90^\circ$ dan $AD = DB = 40\sqrt{2}$. Sehingga dengan teorema pythagoras pada $\triangle BDC$ diperoleh

$$CD^2 = BC^2 - BD^2$$

$$= 80^2 - (40\sqrt{2})^2$$

$$= 6400 - 3200$$

$$= 3200$$

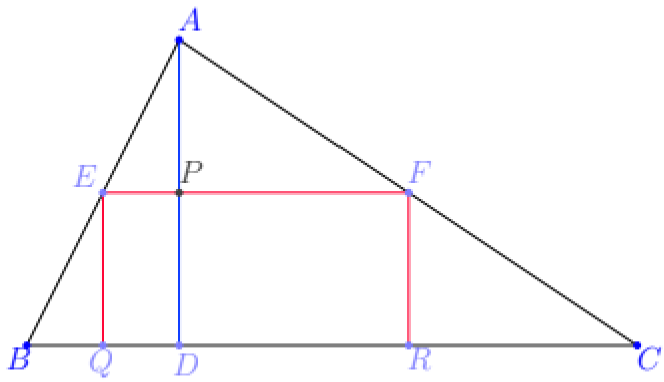
$$CD = 40\sqrt{2}$$

Oleh karena itu diperoleh $CE = CD + DE = 40\sqrt{2} + 10.$

Jadi, ketinggian pusat bola yang paling atas diukur dari permukaan meja pada susunan bola yang dilakukan Bambang adalah ($40\sqrt{2} + 10$) cm.

4. **Jawaban : 8** cm^2

Persegi panjang yang terbentuk luasnya akan maksimum jika salah satu sisinya berhimpit dengan salah satu sisi segitiga dan titik sudut di sisi yang berlawanan dengan sisi yang berhimpit tersebut menyinggung dua sisi segitiga yang lain. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar di bawah ini!



dengan $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm dan $AC = \sqrt{41}$ cm, AD garis tinggi dari $\triangle ABC$.

Dengan teorema pythagoras pada $\triangle ABD$ dan $\triangle ACD$ diperoleh,

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$$

$$5^2 - BD^2 = 41 - (8 - BD)^2$$

$$25 - BD^2 = 41 - 64 + 16BD - BD^2$$

$$16BD = 48$$

$$BD = 3$$

oleh karena itu AD = 4 cm.

Misalkan pula panjang dan lebar persegi panjang yang dicari berturut - turut adalah p dan l. Dalam hal ini (sesuai dengan gambar di atas) diperoleh $QR = EF = p$ dan $EQ = FR = l$. Karena EF sejajar BC maka mudah dibuktikan bahwa $\triangle AEP \sim \triangle EBQ$ dan $\triangle APF \sim \triangle FRC$. Oleh karena itu diperoleh,

$$\frac{EP}{BQ} = \frac{AP}{EQ} = \frac{4-l}{l} \text{ dan } \frac{PF}{RC} = \frac{AP}{FR} = \frac{4-l}{l}$$

sehingga didapat,

$$\frac{4-l}{l} = \frac{EP}{BQ} = \frac{PF}{RC} = \frac{EP+PF}{BQ+RC} = \frac{p}{8-p}$$

oleh sebab itu diperoleh,

$$\frac{4-l}{l} = \frac{p}{8-p} \Leftrightarrow (4-l)(8-p) = pl$$

$$\Leftrightarrow 32 - 4p - 8l + pl = pl$$

$$\Leftrightarrow 4p = 32 - 8l$$

$$\Leftrightarrow p = 8 - 2l$$

dengan mengingat rumus luas untuk persegi panjang didapat,

$$L = pl$$

$$= (8-2l)l$$

$$= 8l - 2l^2$$

$$= 2l^2 + 8l - 8 + 8$$

$$= -2(l-2)^2 + 8 \leq 8$$

Jadi, luas maksimum persegi panjang yang mungkin dapat dibuat di dalam segitiga ABC tersebut adalah 8 cm^2 dengan ukuran 4 cm x 2 cm.

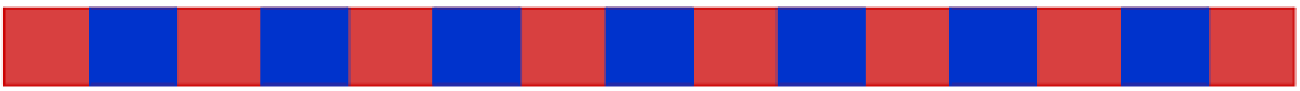
5. **Jawaban :** $\frac{13}{18}$

Misal S adalah ruang sampel dari semua susunan antrian yang mungkin dan A adalah susunan antrian dimana penjual tiket mempunyai cukup kembalian untuk melayani semua orang sesuai dengan urutan mereka dalam antrian. Untuk selanjutnya guna memudahkan penulisan kita misalkan susunan antrian dimana penjual tiket mempunyai cukup kembalian sebagai antrian bagus.

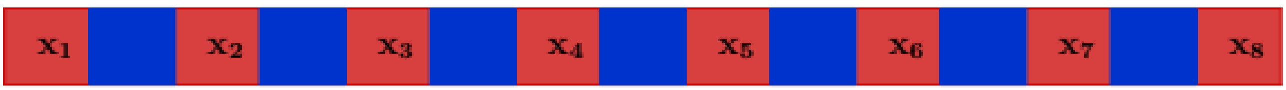
Selain itu, misalkan pula kelompok orang yang mempunyai uang Rp 10.000,00 sebagai kelompok merah dan kelompok orang yang mempunyai uang Rp 5.000,00 sebagai kelompok biru.

Selanjutnya mudah dilihat bahwa $n(S) = 12!$ Sedangkan untuk menghitung $n(A)$ yaitu banyaknya antrian bagus bisa dilakukan dengan cara seperti di bawah ini :

Karena penjual tiket diawal telah memiliki uang Rp 5.000,00 maka satu orang dari kelompok merah dapat berada di awal antrian. Oleh karena itu, karena kelompok biru terdiri dari 7 orang maka akan ada 8 tempat yang bisa ditempati oleh orang dari kelompok merah seperti ilustrasi di bawah ini.



Jika setiap kotak merah dari kiri ke kanan dilabeli dengan $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ dan x_8 berturut-turut seperti di bawah ini,



untuk membentuk *antrian bagus* maka haruslah dipenuhi $\sum_{k=1}^{i} x_k \leq i$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$ sedangkan untuk $i = 5, 6, 7, 8$ kotak x_i bisa diisi oleh sebarang orang (dalam hal ini maksimal 5 orang). Untuk menghitung banyaknya kemungkinan, ekuivalen dengan mencari banyaknya solusi bulat nonnegatif dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$$

dengan $\sum_{k=1}^{i} x_k \leq i$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$ dan $0 \leq x_i \leq 5$ untuk $i = 5, 6, 7, 8$.

Untuk mempermudah kita selesaikan terlebih dahulu sistem persamaan yang menjadi batasan/syarat yaitu

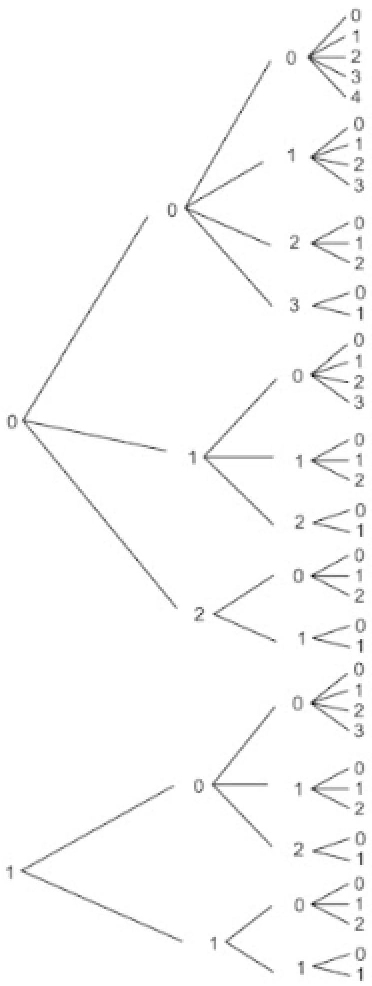
$$x_1 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 4$$

yang banyaknya solusi ada 42 seperti terlihat pada diagram di bawah ini



Selanjutnya untuk menyelesaikan persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$$

kita bagi menjadi beberapa kasus sebagai berikut :

a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$

Hal ini berakibat $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1$. Padahal berdasarkan diagram di atas diperoleh banyaknya solusi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ ada 14, sedangkan banyaknya solusi persamaan $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1$ bisa dihitung dengan relatif mudah yaitu ada sebanyak $C_3^4 = 4$.

Oleh karena itu, pada kasus ini banyaknya penyelesaian dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$ ada sebanyak 14 x 4 = 56.

b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$

Hal ini berakibat $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 2$. Padahal berdasarkan diagram di atas diperoleh banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ ada 14, sedangkan banyaknya solusi persamaan $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 2$ bisa dihitung dengan relatif mudah yaitu ada sebanyak $C_3^5 = 10$.

Oleh karena itu, pada kasus ini banyaknya penyelesaian dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$ ada sebanyak 14 x 10 = 140.

c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$

Hal ini berakibat $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 3$. Padahal berdasarkan diagram di atas diperoleh banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ ada 9, sedangkan banyaknya solusi persamaan $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 3$ bisa dihitung dengan relatif mudah yaitu ada sebanyak $C_3^6 = 20$.

Oleh karena itu, pada kasus ini banyaknya penyelesaian dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$ ada sebanyak 9 x 20 = 180.

d) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

Hal ini berakibat $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 4$. Padahal berdasarkan diagram di atas diperoleh banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ ada 4, sedangkan banyaknya solusi persamaan $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 4$ bisa dihitung dengan relatif mudah yaitu ada sebanyak $C_3^7 = 35$.

Oleh karena itu, pada kasus ini banyaknya penyelesaian dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$ ada sebanyak 4 x 35 = 140.

e) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

Hal ini berakibat $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$. Padahal berdasarkan diagram di atas diperoleh banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ ada 1, sedangkan banyaknya solusi persamaan $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$ bisa dihitung dengan relatif mudah yaitu ada sebanyak $C_3^8 = 56$.

Oleh karena itu, pada kasus ini banyaknya penyelesaian dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$ ada sebanyak 1 x 56 = 56.

Sehingga banyaknya penyelesaian dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$$

seluruhnya adalah 56 + 140 + 180 + 140 + 56 = 572.

Namun ingat bahwa dari masing - masing penyelesaian persamaan di atas untuk membentuk antrian bagus, masing - masing dari 5 orang dari kelompok merah dan 7 orang dari kelompok biru dapat dipermutasikan. Oleh karena itu,

$$n(A) = 572 \cdot 5! \cdot 7!$$

sehingga

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{572 \cdot 5! \cdot 7!}{12!} = \frac{13}{18}$$

Jadi, peluang penjual tiket tersebut mempunyai cukup kembalian untuk melayani semua orang sesuai dengan urutan mereka dalam antrian adalah $\frac{13}{18}$.