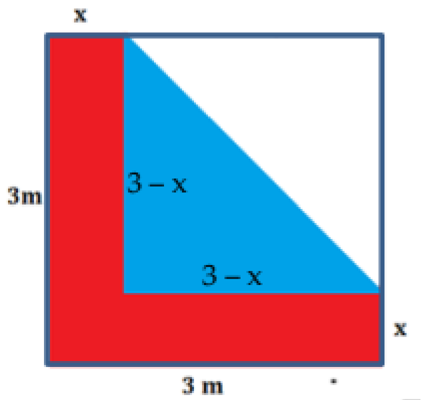
PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMP

TAHUN 2023

1. **Jawaban : A**



Luas segitiga = Luas daerah berbentuk L

$\frac{1}{2}(3-x)^2 = x^2 + 2x(3-x)$

$\Leftrightarrow \quad (3-x)^2 = 2x^2 + 4x(3-x)$

$\Leftrightarrow 9 - 6x + x^2 = 2x^2 + 12x - 4x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 6 \Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{6}$

Karena $x < 3$, maka $x = 3 - \sqrt{6}$

2. **Jawaban : B**

Pada 1 jam pertama, jarak A ke B; $S(AB)$ dapat dinyatakan dalam fungsi $S(AB) = 55 - 5t$. Pada jam berikutnya, A bergerak sejauh $5(t - 1)$ menuju B dan B bergerak sejauh $(t - 1)t$ terhitung saat B bergerak menuju A, dimana $x = t - 1$, sehingga fungsi jarak A ke B dapat dinyatakan dengan rumus fungsi:

$$S(AB) = 50 - 5(t - 1) - t(t - 1)$$

$$S(AB) = 50 - (5 + t)(t - 1)$$

$$S(AB) = 55 - 4t - t2$$

Dengan demikian, fungsi jarak A dan B yang sesuai dengan kejadian di atas adalah

$$S(AB) = \begin{cases} 55 - 5t, & untuk\ 0 \le t \le 1 \\ 55 - 4t - t^2, & untuk\ t\ lainnya \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi tersebut, maka grafik yang sesuai adalah pilihan B.

3. **Jawaban : B**

Agar supaya nilai $a + b + c + d$ terkecil, maka $a + b$, $a + c$, dan $a + d$ haruslah bilangan kuadrat ganjil terkecil yang lebih besar dari 1 dan a adalah nilai maksimal yang mungkin agar $b + c + d$ menjadi minimal.

Ambil $a + b = 9$, $a + c = 25$, dan $a + d = 49$. Maksimal a yang mungkin adalah 8 untuk nilai $b = 1$, $c = 17$, $d = 41$.

Jadi, nilai $a + b + c + d$ terkecil yang mungkin adalah $8 + 1 + 17 + 41 = 67$

4. **Jawaban : D**

Diketahui:

$x - \sqrt{xy} + y = 10 \Leftrightarrow x + y = \sqrt{xy} + 10$ .... 1)

$x^2 + \sqrt{xy} + y^2 = 168 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy + \sqrt{xy} = 168$ .... 2)

Misalkan $\sqrt{xy} = p$ dan substitusi 1) ke 2) diperoleh:

$$(p + 10)^2 - 2p^2 + p = 168$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 20p + 100 - 2p^2 + p = 168$$

$\Leftrightarrow \quad p^2 - 21p + 68 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (p - 4)(p - 17) = 0$

$\Leftrightarrow p = \sqrt{xy} = 4 \; atau \; \sqrt{xy} = 17$

$x + \sqrt{xy} + y = (x - \sqrt{xy} + y) + 2\sqrt{xy} = 10 + 2\sqrt{xy}$

Jadi, jumlah semua nilai $x + \sqrt{xy} + y$ yang mungkin adalah 10 + 2(4) + 10 + 2(17) = 62.

5. **Jawaban : C**

Kejadian untuk percobaan ini ada 2 kemungkinan. Pelemparan pertama muncul ganjil atau pelemparan pertama muncul genap.

Peluang munculnya mata dadu ganjil pada pelemparan pertama dan kedua adalah

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Peluang munculnya mata dadu genap pada pelemparan pertama dan ganjil pada lemparan kedua adalah

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

Jadi, peluang munculnya mata dadu ganjil adalah $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

6. **Jawaban : B**

Banyak angka yang dibuat dengan plat besi sebanyak $\frac{33.416.000}{8000} = 4.177$ digit

Bilangan 1 digit dari 1 − 9 sebanyak 9 digit

Bilangan 2 digit dari 10 − 99 sebanyak 90 × 2 = 180 digit

Bilangan 3 digit dari 100 − 999 sebanyak 900 × 3 = 2700 digit

Jumlah digit dari bilangan 1 – 999 = 9 + 180 + 2700 = 2889 digit

Bilangan 4 digit dari 1000 − x sebanyak $\frac{4177-2889}{4} = \frac{1288}{4} = 322$

bilangan, yaitu dari bilangan 1000 sampai 1321. Jadi banyak kamar pada hotel tersebut adalah 1321 kamar.

7. **Jawaban : B**

Banyak cara memilih k bilangan berbeda dari $a_1, a_2, ..., a_k \in \{1, 2, 3, ... , n)\}$ dengan syarat $a_k - a_{k-1} > 1$ adalah $\binom{n-(k-1)}{k}$

Banyak cara memilih 1 jadwal kedatangan dari 1 – 10 adalah $\binom{10}{1} = 10$

Banyak cara memilih 2 jadwal kedatangan dari 1 – 10 adalah $\binom{9}{2} = 36$

Banyak cara memilih 3 jadwal kedatangan dari 1 – 10 adalah $\binom{8}{3} = 56$

Banyak cara memilih 4 jadwal kedatangan dari 1 – 10 adalah $\binom{7}{4} = 35$

Banyak cara memilih 5 jadwal kedatangan dari 1 – 10 adalah $\binom{6}{5} = 6$

Karena tidak boleh memilih jadwal berurutan, maka tidak mungkin memilih lebih dari 5 jadwal dari tanggal 1 sampai 10. Jadi, banyaknya kemungkinan jadwal kedatangan yang dapat dibuat oleh Aima adalah 10 + 36 + 56 + 35 + 6 = 143

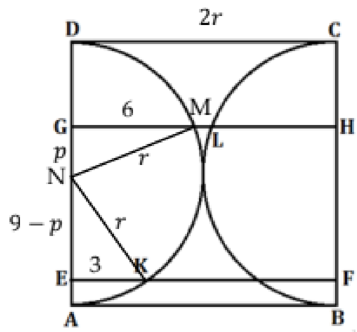
8. **Jawaban : A**

Jika perbandingan tinggi dua bangun ruang yang sebangun adalah $a : b$, maka perbandingan volumnya adalah $a^3 : b^3$.

Misalkan tinggi air pada kerucut dengan volume 1 liter 1000 mL adalah a dan tinggi air pada kerucut setelah ditambahkan 331 mL adalah b, maka:

$$a^3 : b^3 = 1000 : 1331 \Leftrightarrow a : b = 10 : 11$$

9. **Jawaban : A**



Misalkan N adalah titik tengah AD

$$p^2 + 6^2 = (9 - p)^2 + 3^2 \Leftrightarrow 36 = 81 - 18p + 9$$

$$\Leftrightarrow 4 = 9 - 2p + 1$$

$$\Leftrightarrow 2p = 6 \Leftrightarrow p = 3$$

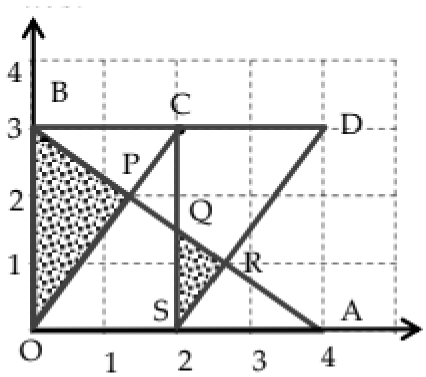
$$r^2 = p^2 + 6^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

$$[ABCD] = 2r \times 2r = 4r^2$$

$$= 4 \times 45$$

$$= 180$$

10. **Jawaban : D**



ΔSDC adalah pergeseran ΔOCB.

ΔOPB adalah irisan ΔOAB dan ΔOCB

ΔSRQ adalah irisan ΔOAB dan ΔSDC

Karena $\Delta OPB \cong \Delta SRQ$

$$\frac{[OPB]}{[SRQ]} = \frac{OB^2}{SQ^2}$$

$$= \frac{2^2}{1^2}$$

$= 4 : 1$

11. **Jawaban : B**

Perubahan populasi ikan A meningkat dari x menjadi $128\%x$

Perubahan populasi ikan B menurun dari y menjadi $72\%y$

Rasio perubahannya; $\frac{128\%x}{72\%y} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{72}{128} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

Misalkan populasi A dan B mula-mula adalah $3k$ dan $4k$ untuk suatu bilangan asli k, maka perubahan populasi keseluruhan ikan adalah

$|(128\%(3k) + 72\%(4k)) - 100\%(7k)| = |(384 + 288 - 700)\%k| = 28\%k.$

Persentase perubahan populasi keseluruhan ikan sekarang dibandingakan total populasi ikan semula adalah

$$\frac{perubahan\ populasi\ ikan}{Total\ populasi\ ikan\ semula} = \frac{28\%k}{700\%k} \times 100\% = 4\%$$

12. **Jawaban : C**

Diketahui $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ sehingga $a + b + c + d + e \leq 5e$

Karena $a + b + c + d + e = abcde$, maka abcde $\leq 5e \Leftrightarrow abcd \leq 5$

Selanjutnya kita akan memilih kemungkinan nilai a, b, c, d dan mencari nilai e yang sesuai.

Jika $abcd = 1$ maka $a = b = c = d = 1$, diperoleh $4 + e = e \Leftrightarrow e = \varnothing$

Jika $abcd = 2$ maka $a = b = c = 1$ dan $d = 2$, diperoleh $5 + e = 2e \Leftrightarrow e = 5$

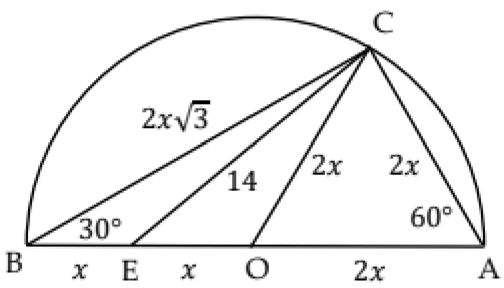
Jika $abcd = 3$ maka $a = b = c = 1$ dan $d = 3$, diperoleh $6 + e = 3e \Leftrightarrow e = 3$

Jika $abcd = 4$ maka $a = b = c = 1$ dan $d = 4$, diperoleh $7 + e = 4e \Leftrightarrow e = \varnothing$, atau
$a = b = 1$ dan $c = d = 2$, diperoleh $6 + e = 4e \Leftrightarrow e = 2$,

Jika $abcd = 5$ maka $a = b = c = 1$ dan $d = 5$, diperoleh $8 + e = 5e \Leftrightarrow e = 2$.

Jadi, nilai terbesar yang mungkin dari e adalah 5.

13. **Jawaban : A**



Dengan menggunakan rumus Median pada ΔBOC diperoleh:

$$EC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}OC^2 - \frac{1}{4}OB^2$$

$$14^2 = \frac{1}{2}(2 \times \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(2x)^2 - \frac{1}{4}(2x)^2$$

$$196 = 6x^2 + 2x^2 - x^2$$

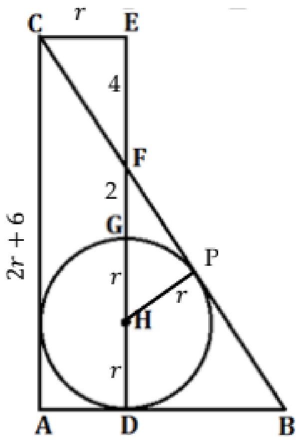
$$196 = 7x^2$$

$$x^2 = 28$$

$$[BEC] = \frac{1}{4}[ABC] = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times (2x)(2x\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2}(x^2\sqrt{3}) = 14\sqrt{3}$$

14. **Jawaban : C**



Perhatikan ΔCEF dan ΔHPF. $CE = HP = r$. Menurut syarat (Sd, S, SD), maka $\Delta CEF \cong \Delta HPF$. Akibatnya, $EF = PF = 4$.

Pada HPF,

$$HF^2 - HP^2 = PF^2 \Leftrightarrow (r + 2)^2 - r^2 = 4^2$$
$$\Leftrightarrow (2r + 2)(2) = 16$$
$$\Leftrightarrow 4(r + 1) = 16$$
$$\Leftrightarrow r + 1 = 4$$
$$\Leftrightarrow r = 3$$

$[CEF] = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ satuan, dan $AC = 2(3) + 6 = 12$

$\Delta ABC \sim \Delta CEF$, sehingga $\frac{[ABC]}{[CEF]} = \frac{AC^2}{EF^2} = \frac{12^2}{4^2} = \frac{9}{1}$

Jadi, $[ABC] = 9[CEF] = 9 \times 6 = 54$

15. **Jawaban : A**

P(ada siswa lahir di bulan yang sama) = 1 - P(Semua siswa lahir di bulan berbeda)

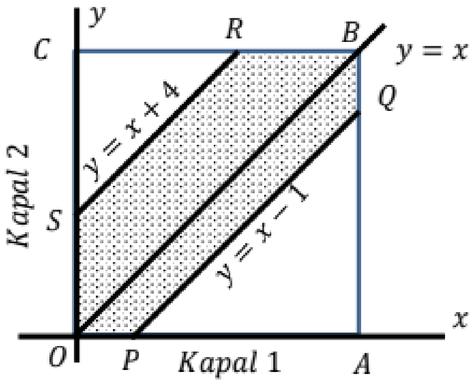
$$= 1 - \left(1 \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12}\right)$$
$$= 1 - 0,5729$$

$$= 0,4271$$

16. **Jawaban : C**

Perhatikan grafik berikut:

Misalkan x dan y menyatakan waktu kapal 1 dan 2 untuk berlabuh dari pukul 00.00 – 24.00 dan garis $y = x$ menunjukkan waktu kedua kapal bertemu. Garis $y = x - 1$ adalah batas waktu kapal 1 menunggu ketika kapal 2 berlabuh dan $y = x + 4$ merupakan batas waktu kapal 2 menunggu ketika kapal 1 berlabuh.



Peluang kapal 1 menunggu saat kapal 2 berlabuh adalah $\left[\frac{OPQB}{OAB}\right] = 1 - [PAQ]/[OAB]$

$$= 1 - \frac{22^2}{24^2} = \frac{23}{144}$$

Peluang kapal 2 menunggu saat kapal 1 berlabuh adalah $\left[\frac{OSRB}{OCB}\right] = 1 - [SCR]/[OCB]$

$$= 1 - \frac{20^2}{24^2} = \frac{44}{144}$$

Jadi, peluang bahwa satu kapal harus menunggu sampai tempat bersandar dapat digunakan

$$P = \frac{23}{144} + \frac{44}{144} = \frac{67}{144}$$

17. **Jawaban : D**

Diketahui $p + q + r = 0$

$(p + q + r)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2(pq + qr + rp) = 0$

$p^2 + q^2 + r^2 = -2(pq + qr + rp)$

$(p^2 + q^2 + r^2)^2 = 4(pq + qr + rp)^2$

$= 4(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 + 2pqr(p + q + r)$

$= 4(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2) + 0$

Sehingga:

$$A = \frac{(p^2+q^2+r^2)^2}{p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2} = \frac{4(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2)}{p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2} = 4 \text{ .... } 1)$$

Selanjutnya diketahui, $p^2 + q^2 + r^2 =- 2(pq + qr + rp)$

$p^2 + q^2 + r^2 =- 2(q(p + r) + rp)$

$=- 2(q(-q) + rp)$

$= 2(q^2 - pr)$

Sehingga:

$$B = \frac{q^2-pr}{p^2+q^2+r^2} = \frac{q^2-pr}{2(q^2-pr)} = \frac{1}{2} \text{ .... } 2)$$

Dari 1) dan 2) diperoleh: $A^2 - 4B = 4^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) = 14$

18. **Jawaban : B**

Persamaan di atas dapat diubah sebagai berikut:

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{2023} = 25$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{2023}^2 = 125$

Diketahui bahwa $x_i \in \{-2, -1, 0, 1\}$. Misalkan p, q, r, s berturut-turut menyatakan banyaknya $-2, -1, 0, 1$ yang digunakan pada masing-masing persamaan,maka:

$-2p - q + s = 25$ ……… 1)

$4p + q + s = 125$ ……… 2)

Nilai untuk $x_1^3 + x_3^3 + ... + x_{2023}^3 = -8p - q + s = 25 - 6p$ akan terkecil apabila p dengan nilai terbesar. Dengan memperkurangkan kedua persamaan di atas di peroleh:

$$6p + 2q = 100 \Leftrightarrow 3p + q = 50$$

Nilai terbesar $p = 16$ untuk $q = 2$. Jadi, nilai terkecil yang mungkin untuk $x_1^3 + x_3^3 + ... + x_{2023}^3$ adalah 25 - 6(16) = 25 - 96 = - 71

19. **Jawaban : A**

Perhatikan bahwa semua bilangan prima dua digit yang angka satuannya 3 atau 7 adalah "prima kanan". Adapun bilangan yang memenuhi sifat ini, yaitu 13, 17, 23, 37, 43, 47, 53, 67, 73, 83, 97. Selanjutnya, semua bilangan prima 3 digit yang angka satuan atau 2 digit terakhir bilangan prima adalah "prima kanan". Bilangan yang memenuhi adalah 103, 107, 113, 127, 131, 137, 157, 163, 167, 173, 179, 193, dan 197. Jadi, banyaknya bilangan prima antara 10 dan 200 yang merupakan "prima kanan" adalah 11 + 13 = 24 bilangan.

20. **Jawaban : D**

$$M = \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2023}}{\frac{1}{1\times 2023}+\frac{1}{3\times 2021}+\frac{1}{5\times 2019}+...+\frac{1}{2023\times 1}}$$

$$M = \frac{\left(1+\frac{1}{2023}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2021}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2019}\right)+...+\left(\frac{1}{1011}+\frac{1}{1013}\right)}{\left(\frac{1}{1\times 2023}+\frac{1}{2023\times 1}\right)+\left(\frac{1}{3\times 2021}+\frac{1}{2021\times 3}\right)+...+\left(\frac{1}{1011\times 1013}+\frac{1}{1013\times 1011}\right)}$$

$$M = \frac{2024\left(\frac{1}{1\times 2023}+\frac{1}{3\times 2021}+\frac{1}{5\times 2019}+...+\frac{1}{1011\times 1013}\right)}{2\left(\frac{1}{1\times 2023}+\frac{1}{3\times 2021}+\frac{1}{5\times 2019}+...+\frac{1}{1011\times 1013}\right)} = 1012$$

$$M = 1012 = 2^2 \times 11 \times 23$$

Jadi, hasil penjumlahan semua faktor prima dari M adalah 2 + 11 + 23 = 36

21. **Jawaban : A**

$$x^2 + 2023x + 2023 = y^2$$

Kita akan ubah ke dalam bentuk kuadrat dengan mengalikan semua suku dengan 4;

$$4x^2 + 4(2023x) + 4(2023) = 4y^2$$

$(2x + 2023)^2 - 2023^2 + 4(2023) = (2y)^2$

$$(2x + 2023)^2 - (2y)^2 = 2023^2 - 4(2023)$$

$(2x + 2y + 2023)(2x - 2y + 2023) = 2023 \times 2019$

Karena $x, y > 0$, maka $2x + 2y + 2023 > 2023$, sehingga $2x - 2y + 2023 < 2019$.

Akibatnya: $x - y < 0 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow y$. Hal ini bertentangan dengan syarat $x > y$.

Dengan demikian, tidak ada pasangan (x, y) yang mungkin.

22. **Jawaban : A**

Dengan menggunakan teori binomial Newton diperoleh:

$$\binom{21}{0} + \binom{21}{1} + \binom{21}{2} + \binom{21}{3} + ... + \binom{21}{21} = 2^{21}$$

Karena $\binom{21}{0} = 1$, maka $\binom{21}{1} + \binom{21}{2} + \binom{21}{3} + ... + \binom{21}{21} = 2^{21} - 1$

Perhatikan bahwa:

$$\frac{1}{r}\binom{20}{r-1} = \frac{20!}{r(r-1)!(20-(r-1))!} = \frac{1}{21}\left(\frac{21!}{r!(21-r)!}\right) = \frac{1}{21}\binom{21}{r}$$

Dengan demikian:

$\frac{1}{1}\binom{20}{0} + \frac{1}{2}\binom{20}{1} + \frac{1}{3}\binom{20}{2} + \frac{1}{4}\binom{20}{3} + ... + \frac{1}{21}\binom{20}{20} =$

$= \frac{1}{21}\binom{21}{1} + \frac{1}{21}\binom{21}{2} + \frac{1}{21}\binom{21}{3} + \frac{1}{21}\binom{21}{4} + ... + \frac{1}{21}\binom{21}{21}$

$= \frac{1}{21}\left(\binom{21}{1} + \binom{21}{2} + \binom{21}{3} + \binom{21}{4} + ... + \binom{21}{21}\right)$

$= \frac{1}{21}(2^{21} - 1) = \frac{2^{21}-1}{21}$

23. **Jawaban : A**

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} memuat 5 bilangan ganjil dan 4 bilangan genap.

Banyak cara memilih 2 bilangan ganjil dari {1, 3, 5, 7, 9} adalah $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,.\,3!} = 10$ cara dan banyak cara memilih 1 bilangan genap dari {2, 4, 6, 8} adalah 4 cara.

Jadi, banyaknya himpunan bagian dari {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} yang berisi 3 bilangan dan memuat tepat dua bilangan ganjil adalah $10 \times 4 = 40$

24. **Jawaban : A**

Sebuah bilangan habis dibagi 6 jika bilangan tersebut habis dibagi 2 dan habis dibagi 3. Hal ini berarti bilangan tersebut harus memuat 3 atau 6 angka 1, diawali dengan angka 1 dan berakhir dengan angka 0.

Banyak bilangan 7 digit yang memuat 3 angka 1 dan habis dibagi 6 adalah $\frac{5!}{2!\,.\,3!} = 10$

Banyak bilangan 7 digit yang memuat 6 angka 1 dan habis dibagi 6 adalah 1

Jadi, Banyaknya bilangan asli tujuh digit yang disusun dari 0 atau 1 saja serta habis 6 adalah $10 + 1 = 11$

25. **Jawaban : D**

Garis $y = 2kx + 3k^2$ memotong parabola $y = x^2$, maka:

$$x^2 = 2kx + 3k^2 \Leftrightarrow x^2 - 2kx - 3k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + k)(x - 3k) = 0$$

Untuk $x = -k$ diperoleh $y = k^2$ sehingga koordinat $Q(-k, k^2)$

Untuk $x = 3k$ diperoleh $y = 9k^2$ sehingga koordinat $P(3k, 9k^2)$

Dengan koordinat $O(0,0)$ dan luas segitiga $POQ = 48$ satuan, maka:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -k & 3k & 0 \\ 0 & k^2 & 9k^2 & 0 \end{vmatrix} = 48 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(3k^3 - (-9k^3)) = 48$$

$$\Leftrightarrow 6k^3 = 48$$

$$\Leftrightarrow k^3 = 8 \Leftrightarrow k = 2$$

Jadi, kemiringan garis $y = 2kx + 3k^2$ adalah $2k = 4$