

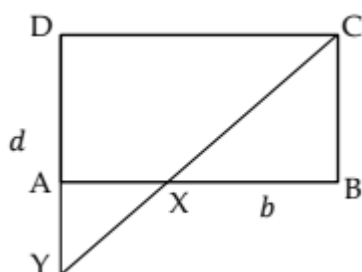


## PEMBAHASAN

### OSK MATEMATIKA SMP

### TAHUN 2022

#### 1. Jawaban : A



$$\frac{BC}{DY} = \frac{BX}{DC} \Leftrightarrow \frac{BC}{d} = \frac{b}{DC}$$

$$\Leftrightarrow b \times d = BC \times DC$$

$$\Leftrightarrow b \times d = L$$

#### 2. Jawaban : B

Karena  $a_1, a_2, a_3, \dots$  merupakan barisan aritmetika dan  $a_1 + a_2 + a_3 = 405$ , maka  $a_2 = \frac{405}{3} = 135$ , dan  $a_1 + a_3 = 270$ . Karena  $a_1 > 105$  dan  $a_2 = 135$ , maka  $105 < a_1 < 135$

Agar supaya  $k$  terkecil maka  $a_2 - a_1$  harus maksimal atau nilai  $a_1$  paling kecil yang mungkin sehingga  $3|a_1$  dan  $7|270 - a_1$ . Dari  $a_1 \in \{108, 111, 114, \dots, 132\}$ , diperoleh nilai  $a_1 = 123$  dengan selisih  $a_2 - a_1 = b = 135 - 123 = 12$ .

$$U_k = 123 + 12(k - 1) > 1000 \Leftrightarrow 12k > 889 \Leftrightarrow k > \left\lceil \frac{889}{12} \right\rceil \Leftrightarrow k = 75$$

#### 3. Jawaban : D

Peluang siswa menjawab benar 2 soal pada kartu adalah  $\frac{25}{30} \times \frac{24}{29} = \frac{120}{203}$

Peluang siswa menjawab benar 1 soal pada kartu pertama dan menjawab benar pada kartu berikutnya adalah  $\frac{25}{30} \times \frac{5}{29} \times \frac{24}{28} = \frac{25}{203}$

Jadi, peluang siswa tersebut lulus ujian adalah  $\frac{120}{203} + \frac{25}{203} = \frac{165}{203}$



## 4. Jawaban : B

Misalkan  $p$ ,  $w$  dan  $s$  berturut-turut menyatakan banyaknya guru pria, guru wanita dan siswa yang terlibat menanam pohon.

$$13p + 10w + 6s = 159 \dots\dots\dots 1)$$

$$\frac{1}{3}(p + w) = s \Leftrightarrow p + w = 3s \dots\dots\dots 2)$$

Substitusi 2) ke 1) diperoleh:  $15p + 12w = 159 \Leftrightarrow 5p + 4w = 53$

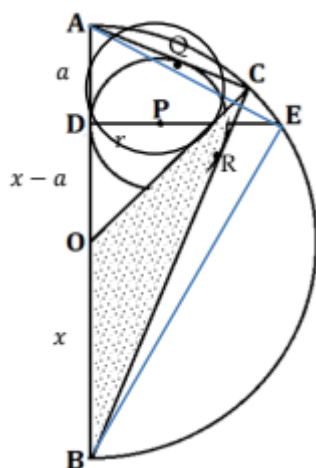
Pasangan  $(p, w)$  yang memenuhi pada persamaan ini adalah  $(1,12)$  dan  $(5,7)$

Karena  $3|(p + w)$  maka pasangan  $(p, w)$  yang memenuhi adalah  $(5,7)$

Jadi, banyak guru wanita yang menanam pohon adalah 7 orang

## 5. Jawaban : C

Perhatikan gambar.



$\triangle BEA$  siku-siku di E, sehingga

$$DE^2 = AD \times DB \Leftrightarrow a(2x - a) = 16 \dots\dots\dots 1)$$

Diketahui bahwa  $AQ = AD = a$  dan  $CQ = CR = DP = r$

Dengan menggunakan rumus lingkaran dalam segitiga  $ABC$ ;



$$r = \frac{L}{s} \Leftrightarrow L = rs \Leftrightarrow [ABC] = r \times \frac{1}{2} (AB + BC + CA)$$

$$[ABC] = \frac{1}{2} r(2x + (2x - a + r) + (r + a)) = r(2x + r) \dots\dots\dots 2)$$

Dengan cara lain;

$$[ABC] = \frac{1}{2} \times BC \times AC = \frac{1}{2} (2x - a + r)(a + r)$$

$$= \frac{1}{2} (a(2x - a + r) + r(2x - a + r))$$

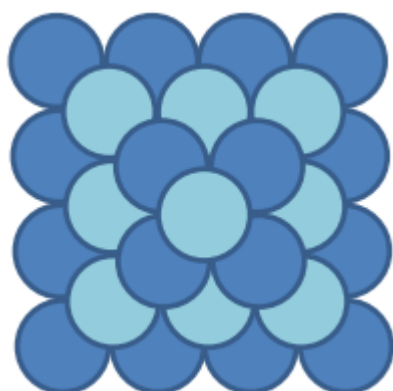
$$= \frac{1}{2} (a(2x - a) + ar + r(2x + r) - ar) \dots\dots\dots 3)$$

Dengan memasukkan 1) dan 2) pada 3) diperoleh:

$$[ABC] = \frac{1}{2} (16 + [ABC]) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [ABC] = 8. \text{ Jadi, } [OBC] = \frac{1}{2} [ABC] = 8$$

## 6. Jawaban : B

Model susunan koin di lihat dari atas



$$L_{daun} = 2 \left( \frac{1}{4} \left( \frac{22}{7} \right) \left( \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{7}{2} \right)^2 \right) = 7$$

$$\text{Luas 1 lingkaran, } L = \frac{22}{7} \left( \frac{7}{2} \right)^2 = 38,5$$

Pada bagian dasar terdapat 4 lingkaran dan 20 daun yang tertutup koin di atasnya.

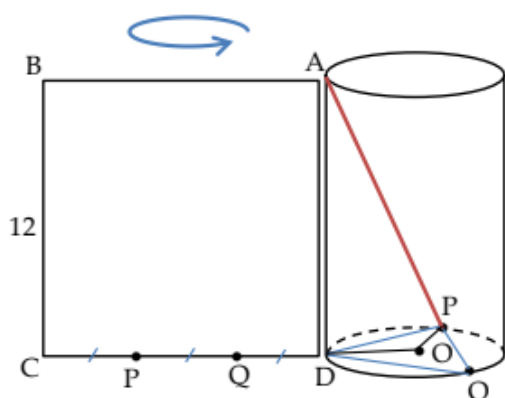
Pada bagian kedua terdapat 1 lingkaran dan 12 daun yang tertutup koin di atasnya

Pada bagian ketiga terdapat 4 daun yang tertutup koin diatasnya

Total koin yang tertutup koin diatasnya adalah 5 lingkaran dan 36 daun dengan luas:

$$5 \times 38,5 + 36 \times 7 = 444,5$$

## 7. Jawaban : A



Misalkan jari-jari tabung =  $r$ , maka

$$2\pi r = 12 \Leftrightarrow r = \frac{6}{\pi}$$

Perhatikan  $\triangle OPD$  dengan  $\angle OPD = 30^\circ$

$$OP:PD = 1:\sqrt{3} \Leftrightarrow PD = OP\sqrt{3} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$$

Pada  $\triangle APD$ ,  $AP^2 = PD^2 + AD^2$

$$AP = \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\right)^2 + 12^2} = \sqrt{\frac{108+144\pi^2}{\pi^2}}$$

Jadi,  $a + b = 108 + 144 = 252$

**8. Jawaban : B**

$$\begin{aligned} P(1_2, 5_2) &= \frac{K(1_2) \times K(5_2)}{K(1_1) \times K(5_1) + K(1_1) \times K(5_2) + K(1_2) \times K(5_1) + K(1_2) \times K(5_2)} \\ &= \frac{1 \times 3}{1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times 3} \\ &= \frac{3}{2 + 3 + 2 + 3} \\ &= \frac{3}{10} = 0,3 \end{aligned}$$

**9. Jawaban : B**

$$f(x) = x^{2022} - x^{2021} = x^{2022} \left( \frac{x-1}{x} \right) \geq 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ atau } x \geq 1$$



$$\begin{aligned} g(x) &= x^{2020} - 2x^{2019} + 3x^{2018} - 4x^{2017} + \dots - 2020x + 2021 \\ &= x^{2018}(x^2 - 2x + 1) + 2x^{2016}(x^2 - 2x + 1) + \dots + 1010(x^2 - 2x + 1) + 1011 \\ &= (x - 1)^2(x^{2018} + 2x^{2016} + 3x^{2014} + \dots + 1010) + 1011 \end{aligned}$$

Karena  $(x - 1)^2(x^{2018} + 2x^{2016} + 3x^{2014} + \dots + 1010) \geq 0$ , maka  $g(x) \geq 1011$

Dengan demikian, untuk  $x < 0$  atau  $x \geq 1$ ,  $f(x) + g(x) \geq 1011$  dan mencapai minimum 1011 untuk  $x = 1$ .

Selanjutnya, untuk  $0 \leq x < 1$ , mudah dipahami bahwa:

$$(x^{2022} - x^{2021}) + (x - 1)^2(x^{2018} + 2x^{2016} + 3x^{2014} + \dots + 1010) > 0$$

Sehingga,  $f(x) + g(x) > 1011$

Dengan demikian nilai  $n$ , minimum hasil dari  $f(x) + g(x)$  adalah 1011 sehingga nilai dari  $n + 1 = 1012$

## 10. Jawaban : A

$(\sqrt[3]{6})^{200-n}$  merupakan bilangan bulat jika  $200 - n$  merupakan bilangan kelipatan 3, dan  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$  merupakan bilangan rasional jika  $n$  merupakan bilangan genap.

Perhatikan bahwa:

$$(\sqrt[3]{6})^{200-n} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = 6^{\frac{200-n}{3}} \times 3^{(-\frac{n}{2})} = 2^{\frac{200-n}{3}} \times 3^{\frac{200-n}{3} - \frac{n}{2}}$$

Merupakan bilangan bulat apabila:

$$\frac{200-n}{3} - \frac{n}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 400 - 2n - 3n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 400 - 5n \geq 0 \Leftrightarrow 5n \leq 400 \Leftrightarrow n \leq 80$$

Bilangan  $n$  genap sehingga  $200 - n$  merupakan kelipatan 3 adalah  $6k - 4$  untuk suatu  $k$  bilangan asli, sehingga:

$$6k - 4 \leq 80 \Leftrightarrow 6k \leq 84 \Leftrightarrow k \leq 14$$



Jadi banyak bilangan positif  $n$  yang mungkin adalah 14, (yakni 2, 8, 14, ..., 80)

## 11. Jawaban : A

Banyak cara setiap burung akan ditempatkan di kandang bersama pasangannya yang sesuai adalah  $3! = 6$

Banyak cara menempatkan 6 burung ke dalam 3 kandang secara berpasangan adalah

$$C_2^6 C_2^4 C_2^2 = \frac{6!}{2! 2! 2!} = 90$$

Jadi, peluang setiap burung akan ditempatkan di kandang bersama pasangannya yang sesuai adalah  $\frac{6}{90} = \frac{1}{15}$

## 12. Jawaban : A

Diketahui bahwa  $10^{199} = 10^{111} \times 10^{88}$

Hal ini berarti bahwa bilangan bulat positif yang habis membagi  $10^{199}$  dan merupakan kelipatan  $10^{111}$  adalah keseluruhan faktor dari  $10^{88}$  dengan bentuk kanonik  $2^{88} \times 5^{88}$ , yakni sebanyak  $(88 + 1)(88 + 1) = 89^2 = 7921$ .

## 13. Jawaban : A

Diketahui  $a^5 = b^4$ . Jika dimisalkan  $a = x^4$  maka tentulah  $b = x^5$ . Demikian hal nya dengan  $c^3 = d^2$ . Jika dimisalkan  $c = y^2$  maka tentulah  $d = y^3$ .

Diketahui juga  $c - a = 19$ , maka  $y^2 - x^4 = (y + x^2)(y - x^2) = 19$ .

Karena  $x, y$  bilangan-bilangan asli dan 19 merupakan bilangan prima, maka:

$y + x^2 = 19$  dan  $y - x^2 = 1$ . Dengan metode eliminasi diperoleh  $y = 10$  dan  $x = 3$

Jadi, nilai dari  $d - b = y^3 - x^5 = 10^3 - 3^5 = 1000 - 243 = 757$

## 14. Jawaban : C

Diketahui  $M_n$  adalah rata-rata dari seluruh anggota himpunan ke- $n$



Pada barisan  $\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9,10\}, \{11,12,13,14,15\} \dots$ , diperoleh barisan bertingkat  $2M_n$ ,

$$2, 5, 10, 17, 26 \dots \text{ dengan pola } 2M_n = n^2 + 1$$

$$\text{Jadi, } 2M_{2022} - 2M_{2021} = (2022^2 + 1) - (2021^2 + 1) = 2022 + 2021 = 4043$$

## 15. Jawaban : A

Dari grafik diperoleh bahwa banyak siswa laki-laki  $= 9 + 2 + 4 + 5 = 20$  orang dan banyak siswan perempuan adalah  $= 18 + 10 + 8 + 4 = 40$  orang.

$$R_L = \frac{70(9) + 80(2) + 90(4) + 100(5)}{20} = \frac{1650}{20} = 82,5$$

$$R_P = \frac{70(18) + 80(10) + 90(8) + 100(4)}{40} = \frac{3180}{40} = 79,5$$

$M_L$  terletak antara data ke 10 dan 11, diperoleh  $M_L = 80$

$M_P$  terletak antara data ke 20 dan 21, diperoleh  $M_P = 80$

Dengan demikian, pernyataan yang benar adalah  $M_P = M_L$

## 16. Jawaban : B dan D

$$a) \overline{abcd} - (a + b + c + d) = 1000a + 10c + d - a - c - d = 999a + 9c$$

$$b) \frac{999a + 9c}{9} = 111a + c \text{ mempunyai digit pertama } \begin{cases} a, & \text{jika } a \neq 9 \text{ or } c = 0 \\ 1, & \text{jika } a = 9 \text{ dan } c \neq 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \text{jika } a \neq 9 \text{ or } c = 0, \text{ maka hasilnya } 111a + c - 99a = 12a + c \\ \text{jika } a = 9 \text{ dan } c \neq 0, \text{ maka hasilnya adalah } 111a + c - 99 \end{cases}$$

Selanjutnya kita akan menyelidiki satu persatu dari opsi yang tersedia.

$38 = 12(3) + 2$ , merupakan bilangan **primus** untuk  $a = 3$  dan  $c = 2$

**59 bukan** bilangan **primus** karena tidak ada angka  $a$ , dan  $c$ , sehingga  $12a + c = 59$

$104 = 12(8) + 8$ , merupakan bilangan **primus** untuk  $a = 8$  dan  $c = 8$



117 **bukan** bilangan *primus* karena tidak ada  $a$ , dan  $c$ , sehingga  $111a + c - 99 = 117$

## 17. Jawaban : D

$$\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 1$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-2}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-2}-3)^2} = 1 \Leftrightarrow |\sqrt{x-2}-2| + |\sqrt{x-2}-3| = 1$$

- Jika  $x-2 \geq 9$ , maka  $2\sqrt{x-2}-5 = 1 \Leftrightarrow x-2 = 3^2 \Leftrightarrow x = 11$
- Jika  $4 < x-2 < 9$ , maka  $\sqrt{x-2}-2+3-\sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \Leftrightarrow x = 7, 8, 9, 10$
- Jika  $x-2 \leq 4$ , maka  $5-2\sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow x-2 = 2^2 \Leftrightarrow x = 6$

Jadi, banyak bilangan bulat  $x$  yang memenuhi persamaan tersebut adalah 6

## 18. Jawaban : B

Banyak cara memilih angka pada baris pertama adalah  $4! = 24$

Banyak cara memilih angka pada baris kedua kolom 1 dan 2, masing-masing 3 cara

Banyak cara memilih angka pada baris kedua kolom 3 dan 4 masing-masing 1 cara

Jadi banyak cara memilih angka pada baris 2 adalah  $3 \times 3 = 9$  cara

Dari 9 cara tersebut terdapat 3 pasangan reflektif, misalnya baris pertama (1,2,3,4), maka kemungkinan baris kedua (2,1,4,3), (3,4,1,2), atau (4,3,2,1)

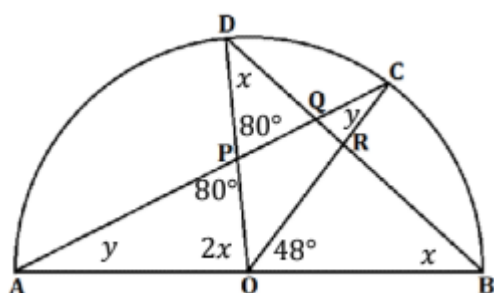
- Jika pada baris 1 dan 2 muncul pasangan reflektif, maka banyak cara memilih angka pada baris ketiga sebanyak 4 cara, sehingga diperoleh  $24 \times 3 \times 4 = 288$  tampilan
- Jika pada baris 1 dan 2 muncul bukan pasangan reflektif, maka banyak cara memilih angka pada baris ketiga sebanyak 2 cara, sehingga diperoleh  $24 \times 6 \times 2 = 288$  tampilan

Jadi, banyak tampilan sudoku yang mungkin adalah  $288 + 288 = 576$

## 19. Jawaban : C

Perhatikan gambar!





Mudah dipahami bahwa  $\triangle OBD$  dan  $\triangle OAC$  adalah segitiga sama kaki.

$$\angle OAC + \angle OCA = \angle BOC \Leftrightarrow 2y = 48 \Leftrightarrow y = 24^\circ$$

$$\triangle OAP, 2x + y + 80 = 180 \Leftrightarrow 2x = 76 \Leftrightarrow x = 38^\circ$$

$\angle PQR$  adalah sudut luar  $\triangle PQR$ , sehingga:

$$\angle PQR = x + 80 = 38 + 80 = 118^\circ$$

## 20. Jawaban : C

Misalkan (3,4,5,6,8) menunjukkan urutan bangun datar berdasarkan jumlah sisinya pada gambar di atas. Adapun urutan ideal yang memenuhi ketiga syarat di atas hanyalah (3,4,5,8,6) dan urutan refleksinya (6,8,5,4,3).

Banyak urutan yang mungkin untuk menyusun bangun-bangun datar tersebut adalah  $5! = 120$

Jadi, banyak urutan yang tidak ideal dari kelima bangun datar tersebut adalah  $120 - 2 = 118$

## 21. Jawaban : D

$10|a^9 + 2$  apabila angka satuan dari  $a^9$  adalah angka 8 dan tentulah digit terakhir dari  $a$  harus angka genap. Dari angka 0, 2, 4, 6, 8, bilangan yang menghasilkan digit terakhir angka 8 setelah dipangkatkan 9 hanyalah angka 8, berarti dua bilangan terkecil yang memenuhi adalah 8 dan 18. Jadi,  $a_1 + a_2 = 8 + 18 = 26$

## 22. Jawaban : A

Perhatikan Tabel.



$n$	5	41
$2n - 29$	$58 - n$	17
$75 - 2n$	$2n - 17$	$n - 12$

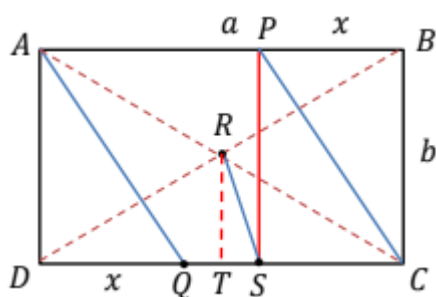
Jumlah bilangan pada baris I adalah  $46 + n$ .

Karena semua baris, kolom dan diagonal berjumlah sama, maka bilangan pada baris III kolom III adalah  $n - 12$ . Akibatnya bilangan pada baris II kolom II adalah  $58 - n$ .

Selanjutnya diperoleh baris II kolom I, baris III kolom 2 dan baris III kolom I berturut-turut  $2n - 29$ ,  $2n - 17$  dan  $75 - 2n$ . Jadi jumlah semua bilangan yang berada di keempat sel pojok adalah  $n + 41 + 75 - 2n + n - 12 = 104$

## 23. Jawaban : B

Perhatikan gambar.



Misalkan  $DQ = x$ , maka  $CQ = CP = a - x$

Pada  $\triangle CBP$ ,  $BC^2 = PC^2 - PB^2$

$$b^2 = (a - x)^2 - x^2 = a(a - 2x) \Leftrightarrow a - 2x = \frac{b^2}{a}$$

$$QS = a - 2x = \frac{b^2}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Pada } \triangle RTS; RS^2 &= RT^2 + TS^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}QS\right)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{b^2}{2a}\right)^2 \\ &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 (a^2 + b^2) \end{aligned}$$



$$RS = \frac{b}{2a}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Jadi, selisih panjang  $RS$  dan  $QS$  adalah  $RS - QS = \frac{b}{2a}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{b^2}{a}$

## 24. Jawaban : B

$$x^{2023} - x^{2021} - x^{2019} - \dots - x^3 = 2x$$

$$x^{2023} - x = x^{2021} + x^{2019} + x^{2017} + \dots + x^3 + x$$

(deret geometri dengan rasio  $x^2, n = 1011$ )

$$= \frac{x((x^2)^{1011} - 1)}{x^2 - 1}; x^2 \neq 1$$

$$(x^2 - 1)x(x^{2022} - 1) = x(x^{2022} - 1)$$

$$(x^2 - 2)x(x^{2022} - 1) = 0$$

$$(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})x(x^{2022} - 1) = 0$$

Dari persamaan tersebut diperoleh akar-akar  $\{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}$ . Karena  $x^2 \neq 1$ , maka akar-akar yang memenuhi adalah  $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$ . Jadi, jumlah dari kuadrat akar-akar real persamaan tersebut adalah  $2 + 0 + 2 = 4$

## 25. Jawaban : C

Untuk  $n = 2022$ , maka anggota A berbentuk  $\frac{2020^k + 2}{m}$  untuk  $k = 2, 3, 4 \dots$

Jika  $n$  adalah kelipatan dari  $m$  maka  $m$  adalah faktor dari 2022, yaitu 1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011, 2022.

Agar  $\frac{2020^k + 2}{m}$  merupakan bilangan bulat positif, maka  $m | 2020^k + 2$

Jelas bahwa,  $1 | 2020^k + 2$  dan  $2 | 2020^k + 2$ .



$2020^k = (673 \times 3 + 1)^k$ . Hal ini berarti bahwa  $2020^k \equiv 1 \pmod{3}$  atau  $2020^k + 2 \equiv 0 \pmod{3}$ . Dengan demikian  $3|2020^k + 2$ , akibatnya  $6|2020^k + 2$ . Sementara itu, 337, 674, 1011, 2022 tidak bisa habis membagi  $2020^k + 2$  untuk  $k = 2$ .

Jadi, jumlah semua nilai  $m$  yang mungkin untuk  $n = 2022$  adalah  $1 + 2 + 3 + 6 = 12$

