



# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

Jalan Mardani Kaya No 37  
Cempaka Putih - Jakarta Pusat



### PEMBAHASAN

### OSK MATEMATIKA SMP

### TAHUN 2017

#### 1. Jawaban : A

$3n - 4$ ,  $4n - 5$ , dan  $5n - 3$  merupakan bilangan prima, dan n bilangan bulat positif.

*Catatan: semua bilangan prima merupakan bilangan ganjil, kecuali 2.*

Untuk n bilangan ganjil maka  $5n - 3$  merupakan bilangan genap sehingga  $5n - 3 = 2$  diperoleh  $n = 1$

Jika  $n = 1$ , maka  $3n - 4 = -1$  bukan bilangan prima (kontradiksi)

Untuk n bilangan genap maka  $3n - 4$  merupakan bilangan genap sehingga  $3n - 4 = 2$  diperoleh  $n = 2$

Jika  $n = 2$ , maka  $4n - 5 = 3$ , dan  $5n - 3 = 7$ .

Dengan demikian,  $(3n - 4) + (4n - 5) + 5n - 3 = 2 + 3 + 7 = 12$

#### 2. Jawaban : B

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{4}{b} &= \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12(4a + b) = ab \\ &\Leftrightarrow 48a + 12b - ab = 0 \\ &\Leftrightarrow ab - 48a - 12b = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - 12)(b - 48) = 12 \times 48 = 2^6 \times 3^2\end{aligned}$$

Karena b ganjil, maka  $b - 48$  juga merupakan bilangan ganjil, sehingga  $b - 48$  haruslah faktor dari  $3^2$ , yakni 1, 3, atau 9. Dengan nilai-nilai ini, diperoleh nilai a dan b yang bulat positif (silahkan diselidiki).

Jadi terdapat 3 pasangan bilangan (a, b) yang memenuhi.

#### 3. Jawaban : B



Grandwest Residence Blok B1 No 11  
Kaliabang Tengah - Bekasi Utara



085210255328



jelajahnalar.com



# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

Jalan Mardani Kaya No 37  
Cempaka Putih - Jakarta Pusat



Perhatikan grafik!

Semakin besar nilai gradient(kemiringan) garis, semakin tinggi kecepatan pelari.

Pelari A dengan kecepatan tertinggi di 6 detik pertama, namun berhenti saat mencapai jarak 80 m.

Pelari B lebih cepat dari pelari C di 10 detik pertama, dan setelah itu pelari C lebih cepat dari B.

Pelari C menyusul pelari B di sekitar detik ke-14 dan finis pertama(detik 16) dan disusul B(detik 18).

Dengan demikian, alternative jawaban yang benar adalah pelari B disusul oleh C sebelum garis finish.

### 4. Jawaban : B

$$x + 2y = p + 6 \quad (\times 2) \Rightarrow 2x + 4y = 2p + 12 \quad (\times 1) \Rightarrow x + 2y = p + 6$$

$$2x - y = 25 - 2p \quad (\times 1) \Rightarrow \underline{2x - y = 25 - 2p} \quad - \quad (\times 2) \Rightarrow \underline{4x - 2y = 50 - 4p} \quad +$$

$$5y = 4p - 13 \qquad \qquad \qquad 5x = 56 - 3p$$

$$y = \frac{4p-13}{5} \qquad \qquad \qquad x = \frac{56-3p}{5}$$

Jika  $x$  bilangan bulat positif, maka  $56 - 3p > 0 \Leftrightarrow 3p < 56 \Leftrightarrow p < 18$ .....1)

Jika  $y$  bilangan bulat positif, maka  $4p - 13 > 0 \Leftrightarrow 4p > 13 \Leftrightarrow p > 4$  .....2)

Karena  $x$  dan  $y$  bilangan kelipatan 5, maka  $x + y$  juga kelipatan 5, sehingga:

$(4p - 13) + (56 - 3p) = p + 43$  merupakan kelipatan 5, atau  $p \in \{2, 7, 12, 17, 22, \dots\}$

Dari 1) dan 2) diperoleh  $4 < p < 18$ , sehingga nilai  $p$  yang memenuhi adalah 7, 12, dan 17

### 5. Jawaban : B

Pilih  $x = 1$  dan  $x = \frac{1}{2}$ , sehingga:

Untuk  $x = 1$  diperoleh  $5f(1) + f(2) = 1 \Leftrightarrow f(2) = 1 - 5f(1)$  .....1)

Untuk  $x = \frac{1}{2}$  diperoleh  $5f(2) + 4f(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 10f(2) + 8f(1) = 1$  .....2)





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

Jalan Mardani Kaya No 37  
Cempaka Putih - Jakarta Pusat



Substitusi 1) ke 2), diperoleh:

$$10(1 - 5f(1)) + 8f(1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 10 - 50f(1) + 8f(1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 42f(1) = 9$$

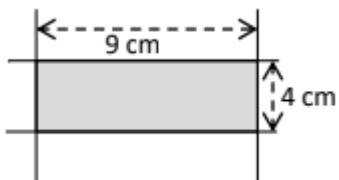
$$\Leftrightarrow f(1) = \frac{9}{42} = \frac{3}{14}$$

### 6. Jawaban : A

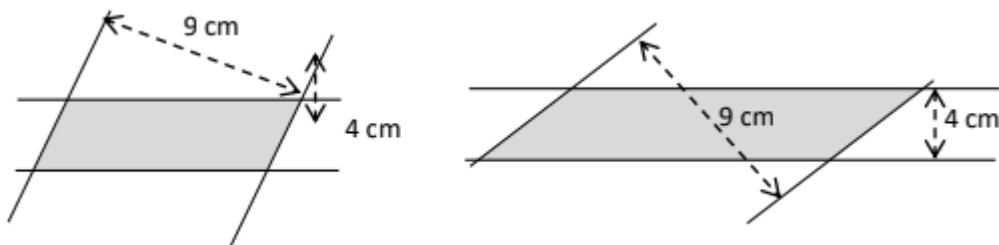
Gambar sepasang garis yang berjarak 4 cm (garis tetap) dan sepasang garis berjarak 9 cm (dapat dirotasikan).

Kemungkinan 1. Kedua pasang garis saling tegak lurus.

Luas jajar genjang ABCD adalah  $36 \text{ cm}^2$



Kemungkinan 2, dan seterusnya dapat dibentuk dengan merotasi dan memperpanjang pasangan garis yang berjarak 9 cm, sehingga panjang alas jajar genjang semakin panjang.



Dari ilustrasi gambar di atas, dapat disimpulkan bahwa luas jajar genjang ABCD minimal  $36 \text{ cm}^2$  dan luas ABCD semakin bertambah dan mendekati tak hingga jika sepasang garis yang berjarak 9 cm dirotasi menghampiri sejajar dengan garis yang berjarak 4 cm.

### 7. Jawaban : B

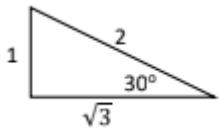




# JELAJAH NALAR

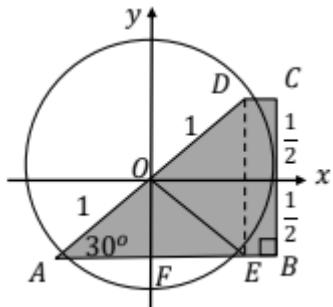
## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

Jalan Mardani Kaya No 37  
Cempaka Putih - Jakarta Pusat



Pada segitiga siku-siku dengan salah satu sudut  $30^\circ$ , sisi di depan sudut  $30^\circ$ , sisi miring dan sisi di samping sudut mempunyai perbandingan  $1 : 2 : \sqrt{3}$

Perhatikan gambar.



$$AF = FE = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ dan } CD = BE = BF - FE = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Luas } ABCD = \frac{1}{2} (AB + CD) \times DE$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) \times 1 \\ = \frac{1}{2} (2) \times 1$$

$$= 1$$

### 8. Jawaban : D

Perhatikan segitiga ABC!

Dengan menggunakan triple Phythagoras diperoleh panjang  $AC = 13$

$$\text{Dari luas segitiga } ABC \text{ diperoleh } AB \times BC = AC \times BQ \Leftrightarrow BQ = \frac{AB \times BC}{AC} = \frac{12 \times 5}{13} = \frac{60}{13}$$

Perhatikan segitiga  $BCQ$  sebangun dengan  $ABC$ , sehingga

$$\frac{BC}{AC} = \frac{CQ}{BC} \Leftrightarrow CQ = \frac{BC^2}{AC} = \frac{5^2}{13} = \frac{25}{13}$$


Grandwest Residence Blok B1 No 11  
Kaliabang Tengah - Bekasi Utara



085210255328



jelajahnalar.com



Panjang  $AP = CQ = \frac{25}{13}$ , sehingga  $PQ = AC - 2CQ = 13 - \frac{50}{13} = \frac{119}{13}$

$$\text{Panjang lintasan } DPQB = DP + PQ + QB = 2QB + PQ = \frac{120}{13} + \frac{119}{13} = \frac{239}{13}$$

### 9. Jawaban :

M mempunyai 90 anggota yang terdiri dari 45 bilangan ganjil dan 45 bilangan genap.

A mempunyai 4 anggota yang berjumlah genap apabila:

1. Keempat anggotanya adalah ganjil

Jika keempat anggotanya ganjil, maka banyak A yang memenuhi adalah

$$C_4^{45} = \frac{45!}{4! \cdot 41!} = \frac{45 \times 44 \times 43 \times 42}{4 \times 3 \times 2} = 148.995$$

2. Keempat anggotanya adalah genap

Jika keempat anggotanya genap, maka banyak A yang memenuhi adalah

$$C_4^{45} = \frac{45!}{4! 41!} = 148.995$$

3. Terdapat tepat dua anggota ganjil dan dua anggota genap

Jika terdapat tepat dua anggota ganjil dan dua anggota genap, maka banyak A yang memenuhi adalah

$$C_2^{45} C_2^{45} = \left( \frac{45!}{2! \cdot 43!} \right)^2 = 990^2 = 980.100$$

Jadi, banyak himpunan A yang mungkin adalah  $148.995 + 148.995 + 980.100 = 1.278.090$

10. Jawaban : B

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

$$Me = \frac{x_2 + x_3}{2}, \text{ Jangkauan} = x_4 - x_1 = 16, \text{ dan } x_3 = x_4$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{x_2 + x_3}{2} \right) = \frac{1}{4} (x_2 + x_3) \Leftrightarrow 4x_2 = x_2 + x_3 \Leftrightarrow 3x_2 = x_3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{3}x_3 \dots \quad 1)$$





Dari 2) dan 3) diperoleh:

$$\frac{1}{9}x_3 = x_3 - 16 \Leftrightarrow \frac{8}{9}x_3 = 16 \Leftrightarrow x_3 = 18$$

Dengan demikian,  $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = x_4 = 18$

Jadi, nilai rata-rata data tersebut adalah

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{2+6+18+18}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

## **ISIAN SINGKAT**

1. Jawaban : 112

$$\begin{aligned} \frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13} &\Leftrightarrow \frac{13}{7} < \frac{n+k}{n} < \frac{15}{8} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{6}{7} < 1 + \frac{k}{n} < 1 + \frac{7}{8} \\ &\Leftrightarrow \frac{6}{7} < \frac{k}{n} < \frac{7}{8} \\ &\Leftrightarrow \frac{48}{56} < \frac{k}{n} < \frac{49}{56} \end{aligned}$$

Agar  $k$  tunggal, maka pembilang ketiga ruas haruslah berurutan, sehingga:

$$\frac{48}{56} < \frac{k}{n} < \frac{49}{56} \Leftrightarrow \frac{96}{112} < \frac{k}{n} < \frac{98}{112}$$

Dengan demikian, nilai  $n$  terbesar yang memenuhi adalah 112 dengan  $k = 97$

2. Jawaban :  $2017 \cdot 2^{2018} + 1$

Misalkan  $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 2018 \cdot 2^{2017} \equiv A$



# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

Jalan Mardani Kaya No 37  
Cempaka Putih - Jakarta Pusat



$$2A = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + 2017 \cdot 2^{2017} + 2018 \cdot 2^{2018}$$

$$A = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 2018 \cdot 2^{2017}$$

$$A = -1 - 2 - 2^2 - 2^3 - \dots - 2^{2017} + 2018 \cdot 2^{2018}$$

$$= 2018 \cdot 2^{2018} - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2017})$$

$$A = 2018 \cdot 2^{2018} - \frac{1(2^{2018}-1)}{2-1}$$

$$A = 2018 \cdot 2^{2018} - 2^{2018} + 1$$

$$A = 2017 \cdot 2^{2018} + 1$$

### 3. Jawaban : -2

Jika penyelesaian dari  $x^2 + px + q = 0$  adalah  $r$  dan  $s$ , maka  $r + s = -p$  dan  $rs = q$  ..... 1)

Jika penyelesaian dari  $x^2 + rx + s = 0$  adalah  $p$  dan  $q$ , maka  $p + q = -r$  dan  $pq = s$ .....2)

Karena  $r + s = -p$  dan  $p + q = -r$ ; maka  $p + q - r - s = -r + p \Leftrightarrow q - s = 0 \Leftrightarrow q = s$

Karena  $rs = q$ ,  $pq = s$  dan  $q = s$ , maka  $r = 1$  dan  $p = 1$ .

Akibatnya,  $p + q + r + s = -p - r = -1 - 1 = -2$

### 4. Jawaban : 6

Pada gambar!

$$\text{Luas segitiga } CDE = 6 = \frac{1}{2} \times CD \times DE$$

Karena  $F$  titik tengah  $AD$ , maka  $DE = 2DF = 2BF \Leftrightarrow BF = \frac{1}{2} \times DE$

$CD: CF = DE: FB = 2 : 1$ , Akibatnya,  $CD: AC = 2 : 4 = 1 : 2$ , atau  $AC = 2CD$

$$\text{Luas segitiga } ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BF = \frac{1}{2} \times 2CD \times \frac{1}{2} \times DE$$

$$= \frac{1}{2} \times CD \times DE = 6$$

### 5. Jawaban :





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

Jalan Mardani Kaya No 37  
Cempaka Putih - Jakarta Pusat



Misalkan  $A$  = banyak cara 4 orang pertama dilayani di loket berbeda, dan orang ke-5 di loket yang sama dengan salah satu dari 4 orang sebelumnya, dan

$S$  = banyak cara 5 orang pertama pada antrian dilayani di sembarang loket

Banyak cara 4 orang pertama dilayani di loket berbeda adalah  $P_4^{10} = \frac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7$  cara.

Banyak cara orang kelima dilayani di salah satu tempat dari orang sebelumnya adalah 4 cara.

Jadi,

$$n(A) = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 4 = 20.160 \text{ cara}$$

$n(S)$  = Banyak cara kelima orang tersebut dilayani di sembarang loket adalah  $10^5 = 100.000$  cara.

Dengan demikian, peluang bahwa 4 orang pertama pada antrian dilayani di loket berbeda, dan orang ke-5 pada antrian dilayani di loket yang sama dengan salah satu dari 4 orang sebelumnya adalah:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20160}{100000} = \frac{126}{625}$$

