



PEMBAHASAN
OSK MATEMATIKA SMP
TAHUN 2017

1. Jawaban : A

$3n - 4$, $4n - 5$, dan $5n - 3$ merupakan bilangan prima, dan n bilangan bulat positif.

Catatan: semua bilangan prima merupakan bilangan ganjil, kecuali 2.

Untuk n bilangan ganjil maka $5n - 3$ merupakan bilangan genap sehingga $5n - 3 = 2$ diperoleh $n = 1$

Jika $n = 1$, maka $3n - 4 = -1$ bukan bilangan prima (kontradiksi)

Untuk n bilangan genap maka $3n - 4$ merupakan bilangan genap sehingga $3n - 4 = 2$ diperoleh $n = 2$

Jika $n = 2$, maka $4n - 5 = 3$, dan $5n - 3 = 7$.

Dengan demikian, $(3n - 4) + (4n - 5) + 5n - 3 = 2 + 3 + 7 = 12$

2. Jawaban : B

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12(4a + b) = ab$$

$$\Leftrightarrow 48a + 12b - ab = 0$$

$$\Leftrightarrow ab - 48a - 12b = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 12)(b - 48) = 12 \times 48 = 2^6 \times 3^2$$

Karena b ganjil, maka $b - 48$ juga merupakan bilangan ganjil, sehingga $b - 48$ haruslah faktor dari 3^2 , yakni 1, 3, atau 9. Dengan nilai-nilai ini, diperoleh nilai a dan b yang bulat positif (silahkan diselidiki).

Jadi terdapat 3 pasangan bilangan (a, b) yang memenuhi.

3. Jawaban : B





Perhatikan grafik!

Semakin besar nilai gradient(kemiringan) garis, semakin tinggi kecepatan pelari.

Pelari A dengan kecepatan tertinggi di 6 detik pertama, namun berhenti saat mencapai jarak 80 m.

Pelari B lebih cepat dari pelari C di 10 detik pertama, dan setelah itu pelari C lebih cepat dari B.

Pelari C menyusul pelari B di sekitar detik ke-14 dan finis pertama(detik 16) dan disusul B(detik 18).

Dengan demikian, alternative jawaban yang benar adalah pelari B disusul oleh C sebelum garis finish.

4. Jawaban : B

$$x + 2y = p + 6 \quad (\times 2) \Rightarrow 2x + 4y = 2p + 12 \quad (\times 1) \Rightarrow x + 2y = p + 6$$

$$2x - y = 25 - 2p \quad (\times 1) \Rightarrow \underline{2x - y = 25 - 2p} \quad - \quad (\times 2) \Rightarrow \underline{4x - 2y = 50 - 4p} \quad +$$

$$5y = 4p - 13$$

$$5x = 56 - 3p$$

$$y = \frac{4p-13}{5}$$

$$x = \frac{56-3p}{5}$$

Jika x bilangan bulat positif, maka $56 - 3p > 0 \Leftrightarrow 3p < 56 \Leftrightarrow p < 18$1)

Jika y bilangan bulat positif, maka $4p - 13 > 0 \Leftrightarrow 4p > 13 \Leftrightarrow p > 4$ 2)

Karena x dan y bilangan kelipatan 5, maka $x + y$ juga kelipatan 5, sehingga:

$$(4p - 13) + (56 - 3p) = p + 43 \text{ merupakan kelipatan 5, atau } p \in \{2, 7, 12, 17, 22, \dots\}$$

Dari 1) dan 2) diperoleh $4 < p < 18$, sehingga nilai p yang memenuhi adalah 7, 12, dan 17

5. Jawaban : B

Pilih $x = 1$ dan $x = \frac{1}{2}$, sehingga:

$$\text{Untuk } x = 1 \text{ diperoleh } 5f(1) + f(2) = 1 \Leftrightarrow f(2) = 1 - 5f(1) \text{1)}$$

$$\text{Untuk } x = \frac{1}{2} \text{ diperoleh } 5f(2) + 4f(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 10f(2) + 8f(1) = 1 \text{2)}$$





Substitusi 1) ke 2), diperoleh:

$$10(1 - 5f(1)) + 8f(1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 10 - 50f(1) + 8f(1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 42f(1) = 9$$

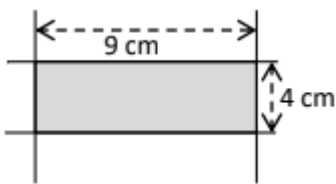
$$\Leftrightarrow f(1) = \frac{9}{42} = \frac{3}{14}$$

6. Jawaban : A

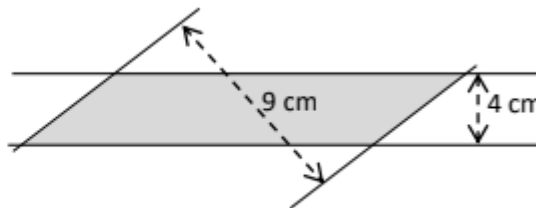
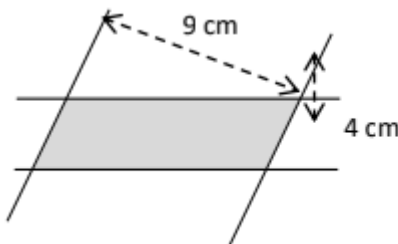
Gambar sepasang garis yang berjarak 4 cm (garis tetap) dan sepasang garis berjarak 9 cm (dapat dirotasikan).

Kemungkinan 1. Kedua pasang garis saling tegak lurus.

Luas jajar genjang ABCD adalah 36 cm^2

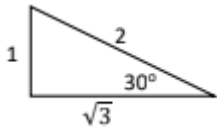


Kemungkinan 2, dan seterusnya dapat dibentuk dengan merotasi dan memperpanjang pasangan garis yang berjarak 9 cm, sehingga panjang alas jajar genjang semakin panjang.



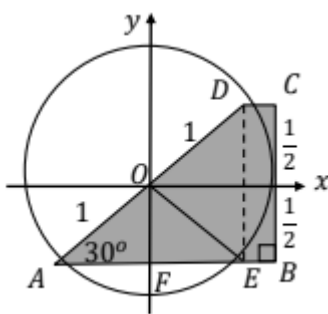
Dari ilustrasi gambar di atas, dapat disimpulkan bahwa luas jajar genjang ABCD minimal 36 cm^2 dan luas ABCD semakin bertambah dan mendekati tak hingga jika sepasang garis yang berjarak 9 cm dirotasi menghampiri sejajar dengan garis yang berjarak 4 cm.

7. Jawaban : B



Pada segitiga siku-siku dengan salah satu sudut 30° , sisi di depan sudut 30° , sisi miring dan sisi di samping sudut mempunyai perbandingan $1 : 2 : \sqrt{3}$

Perhatikan gambar.



$$AF = FE = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ dan } CD = BE = BF - FE = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Luas } ABCD &= \frac{1}{2} (AB + CD) \times DE \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) \times 1 \\ &= \frac{1}{2} (2) \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

8. Jawaban : D

Perhatikan segitiga ABC!

Dengan menggunakan triple Pythagoras diperoleh panjang $AC = 13$

$$\text{Dari luas segitiga } ABC \text{ diperoleh } AB \times BC = AC \times BQ \Leftrightarrow BQ = \frac{AB \times BC}{AC} = \frac{12 \times 5}{13} = \frac{60}{13}$$

Perhatikan segitiga BCQ sebangun dengan ABC , sehingga

$$\frac{BC}{AC} = \frac{CQ}{BC} \Leftrightarrow CQ = \frac{BC^2}{AC} = \frac{5^2}{13} = \frac{25}{13}$$



$$\text{Panjang } AP = CQ = \frac{25}{13}, \text{ sehingga } PQ = AC - 2CQ = 13 - \frac{50}{13} = \frac{119}{13}$$

$$\text{Panjang lintasan } DPQB = DP + PQ + QB = 2QB + PQ = \frac{120}{13} + \frac{119}{13} = \frac{239}{13}$$

9. Jawaban :

M mempunyai 90 anggota yang terdiri dari 45 bilangan ganjil dan 45 bilangan genap.

A mempunyai 4 anggota yang berjumlah genap apabila:

1. Keempat anggotanya adalah ganjil

Jika keempat anggotanya ganjil, maka banyak A yang memenuhi adalah

$$C_4^{45} = \frac{45!}{4! 41!} = \frac{45 \times 44 \times 43 \times 42}{4 \times 3 \times 2} = 148.995$$

2. Keempat anggotanya adalah genap

Jika keempat anggotanya genap, maka banyak A yang memenuhi adalah

$$C_4^{45} = \frac{45!}{4! 41!} = 148.995$$

3. Terdapat tepat dua anggota ganjil dan dua anggota genap

Jika terdapat tepat dua anggota ganjil dan dua anggota genap, maka banyak A yang memenuhi adalah

$$C_2^{45} C_2^{45} = \left(\frac{45!}{2! 43!} \right)^2 = 990^2 = 980.100$$

Jadi, banyak himpunan A yang mungkin adalah $148.995 + 148.995 + 980.100 = 1.278.090$

10. Jawaban : B

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

$$Me = \frac{x_2 + x_3}{2}, \text{ Jangkauan} = x_4 - x_1 = 16, \text{ dan } x_3 = x_4$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_2 + x_3}{2} \right) = \frac{1}{4} (x_2 + x_3) \Leftrightarrow 4x_2 = x_2 + x_3 \Leftrightarrow 3x_2 = x_3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{3} x_3 \dots\dots\dots 1)$$

$$x_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{x_2 + x_3}{2} \right) = \frac{1}{12} (x_2 + x_3) \Leftrightarrow 12x_1 = x_2 + x_3 = \frac{1}{3} x_3 + x_3 = \frac{4}{3} x_3 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{9} x_3 \dots\dots\dots 2)$$





Jangkauan = $x_4 - x_1 = 16$, dan $x_3 = x_4$, sehingga
 $x_1 = x_3 - 16$ 3)

Dari 2) dan 3) diperoleh:

$$\frac{1}{9}x_3 = x_3 - 16 \Leftrightarrow \frac{8}{9}x_3 = 16 \Leftrightarrow x_3 = 18$$

Dengan demikian, $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = x_4 = 18$

Jadi, nilai rata-rata data tersebut adalah

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{2 + 6 + 18 + 18}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

ISIAN SINGKAT

1. Jawaban : 112

$$\begin{aligned}\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13} &\Leftrightarrow \frac{13}{7} < \frac{n+k}{n} < \frac{15}{8} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{6}{7} < 1 + \frac{k}{n} < 1 + \frac{7}{8} \\ &\Leftrightarrow \frac{6}{7} < \frac{k}{n} < \frac{7}{8} \\ &\Leftrightarrow \frac{48}{56} < \frac{k}{n} < \frac{49}{56}\end{aligned}$$

Agar k tunggal, maka pembilang ketiga ruas haruslah berurutan, sehingga:

$$\frac{48}{56} < \frac{k}{n} < \frac{49}{56} \Leftrightarrow \frac{96}{112} < \frac{k}{n} < \frac{98}{112}$$

Dengan demikian, nilai n terbesar yang memenuhi adalah 112 dengan $k = 97$

2. Jawaban : $2017 \cdot 2^{2018} + 1$

Misalkan: $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 2018 \cdot 2^{2017} = A$





$$2A = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + 2017 \cdot 2^{2017} + 2018 \cdot 2^{2018}$$

$$A = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 2018 \cdot 2^{2017}$$

$$A = -1 - 2 - 2^2 - 2^3 - \dots - 2^{2017} + 2018 \cdot 2^{2018}$$

$$= 2018 \cdot 2^{2018} - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2017})$$

$$A = 2018 \cdot 2^{2018} - \frac{1(2^{2018} - 1)}{2 - 1}$$

$$A = 2018 \cdot 2^{2018} - 2^{2018} + 1$$

$$A = 2017 \cdot 2^{2018} + 1$$

3. Jawaban : -2

Jika penyelesaian dari $x^2 + px + q = 0$ adalah r dan s , maka $r + s = -p$ dan $rs = q$ 1)

Jika penyelesaian dari $x^2 + rx + s = 0$ adalah p dan q , maka $p + q = -r$ dan $pq = s$ 2)

Karena $r + s = -p$ dan $p + q = -r$, maka $p + q - r - s = -r + p \Leftrightarrow q - s = 0 \Leftrightarrow q = s$

Karena $rs = q$, $pq = s$ dan $q = s$, maka $r = 1$ dan $p = 1$.

Akibatnya, $p + q + r + s = -p - r = -1 - 1 = -2$

4. Jawaban : 6

Pada gambar!

$$\text{Luas segitiga } CDE = 6 = \frac{1}{2} \times CD \times DE$$

$$\text{Karena } F \text{ titik tengah } AD, \text{ maka } DE = 2DF = 2BF \Leftrightarrow BF = \frac{1}{2} \times DE$$

$$CD: CF = DE: FB = 2 : 1, \text{ Akibatnya, } CD: AC = 2 : 4 = 1 : 2, \text{ atau } AC = 2CD$$

$$\text{Luas segitiga } ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BF = \frac{1}{2} \times 2CD \times \frac{1}{2} \times DE$$

$$= \frac{1}{2} \times CD \times DE = 6$$

5. Jawaban :





Misalkan A = banyak cara 4 orang pertama dilayani di loket berbeda, dan orang ke-5 di loket yang sama dengan salah satu dari 4 orang sebelumnya, dan

S = banyak cara 5 orang pertama pada antrian dilayani di sembarang loket

Banyak cara 4 orang pertama dilayani di loket berbeda adalah $P_4^{10} = \frac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7$ cara.

Banyak cara orang kelima dilayani di salah satu tempat dari orang sebelumnya adalah 4 cara.

Jadi,

$$n(A) = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 4 = 20.160 \text{ cara}$$

$n(S)$ = Banyak cara kelima orang tersebut dilayani di sembarang loket adalah $10^5 = 100.000$ cara.

Dengan demikian, peluang bahwa 4 orang pertama pada antrian dilayani di loket berbeda, dan orang ke-5 pada antrian dilayani di loket yang sama dengan salah satu dari 4 orang sebelumnya adalah:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20160}{100000} = \frac{126}{625}$$

