



JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMP

TAHUN 2015

1. Jawaban : D

$$5^1 = 5$$

$$5^2 = 5^1 * 5 = 5 * 5 = 4$$

$$5^3 = 5^2 * 5 = 4 * 5 = 6$$

$$5^4 = 5^3 * 5 = 6 * 5 = 2$$

$$5^5 = 5^4 * 5 = 2 * 5 = 3$$

$$5^6 = 5^5 * 5 = 3 * 5 = 1$$

$$5^7 = 5^6 * 5 = 1 * 5 = 5 = 5^{1 \times 6 + 1} = 5^1$$

Dengan demikian, $5^{6n+i} = 5^i$, untuk suatu $i \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$

$$5^{2015} = 5^{6 \times 335 + 5} = 5^5 = 3$$

2. Jawaban : B

Jika, $S = \{(a, b, c) | a \in A, b \in A, c \in A, b < a \text{ dan } b < c\}$, dan $T =$

$\{(a, b, c) | a \in A, b \in A, c \in A, \text{ dan } a = c\}$, maka $S \cap T =$

$\{(a, b, c) | a \in A, b \in A, c \in A, b < a = c\}$,

Jika $b = 1$, maka $S \cap T = \{(2,1,2), (3,1,3) \dots (50,1,50)\}$ sehingga $n(S \cap T) = 49$

Jika $b = 2$, maka $S \cap T = \{(3,2,3), (4,2,4) \dots (50,2,50)\}$ sehingga $n(S \cap T) = 48$

Jika $b = 3$, maka $S \cap T = \{(4,3,4), (5,3,5) \dots (50,3,50)\}$ sehingga $n(S \cap T) = 47$, dst.





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Dengan demikian, $n(S \cap T) = 1 + 2 + 3 + \dots + 49 = \frac{1}{2} \times 49 \times 50 = 1225$

3. Jawaban : C

Nilai terendah adalah 4 (nilai Adi(A)), sementara nilai tertinggi adalah 10(nilai Eki(E)). Hal ini berarti bahwa nilai Budi(B), Cici(C), dan Didi(D) harus terletak antara 4 dan 10.

Karena semua nilai merupakan bilangan bulat dan nilai rata-rata sama dengan median, maka kemungkinan nilai median adalah 6, 7 atau 8.

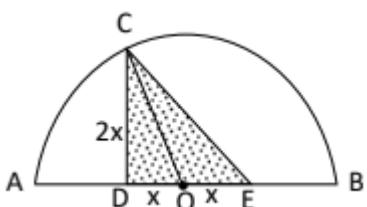
- Jika nilai median = 6, maka kemungkinan susunan nilai adalah (4, 4, 6, 6, 10). Hal ini tentu saja tidak mungkin karena terdapat dua orang dengan nilai terendah.
- Jika nilai median = 7, maka kemungkinan susunan nilai adalah (4, 4, 7, 10, 10), (4, 5, 7, 9, 10), (4, 6, 7, 8, 10), dan (4, 7, 7, 7, 10). Dalam hal ini, susunan nilai (4, 4, 7, 10, 10) tidak mungkin.
- Jika nilai median = 8, maka kemungkinan susunan nilai adalah (4, 8, 8, 10, 10). Hal ini tentu saja tidak mungkin karena terdapat dua orang dengan nilai tertinggi.

Jadi, kemungkinan susunannya adalah (4, 5, 7, 9, 10), (4, 6, 7, 8, 10), dan (4, 7, 7, 7, 10)

Untuk nilai (4, 5, 7, 9, 10) dan (4, 6, 7, 8, 10) masing-masing terdapat 6 kemungkinan susunan, yaitu (A,B,C,D,E), (A,B,D,C,E), (A,C,B,D,E), (A,C,D,B,E), (A,D,B,C,E), dan (A,D,C,B,E), sedangkan untuk nilai (4, 7, 7, 7, 10) hanya terdapat 1 susunan karena nilai B = C = D.

Dengan demikian banyaknya susunan nilai yang mungkin adalah $6 + 6 + 1 = 13$ kemungkinan.

4. Jawaban : B



Misalkan $OD = x$, maka $CD = DE = 2x$.

Perhatikan ΔOCD ,

$$OD^2 + CD^2 = OD^2$$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



$$x^2 + (2x)^2 = 1^2 \rightarrow 5x^2 = 1 \rightarrow x^2 = 1/5$$

$$\text{Luas } \triangle OCD = 2x^2 = 2/5$$

5. Jawaban : B

Keliling Lapangan = $4 \times 180 = 720$ meter

- Toto berjalan dengan kecepatan 72 m/menit. Hal ini berarti 1 putaran ditempuh dalam waktu $720/72 = 10$ menit.
- Titi berjalan dengan kecepatan 60 m/menit. Hal ini berarti 1 putaran ditempuh dalam waktu $720/60 = 12$ menit.

$\text{KPK}(10, 12) = 60$. Dengan demikian, Toto dan Titi akan bertemu untuk pertama kalinya kembali di titik A setelah 60 menit, setelah Toto menempuh $60/10 = 6$ putaran (n) dan Titi menempuh $60/12 = 5$ putaran (m).

Jadi, $m + n = 5 + 6 = 11$

6. Jawaban : C

Bilangan 1418, 2134 dan 2850 akan bersisa y apabila dibagi dengan x . Hal ini berarti bahwa selisih setiap dua bilangan dari 1418, 2134 dan 2850 akan habis dibagi x .

Selisih 1418 dan 2134 adalah 716, sedangkan selisih antara 1418 dan 2850 adalah 1432.

Dengan demikian nilai x adalah faktor persekutuan dari 716 dan 1432, yakni: 716, 358, 179,

Jika $x = 716$, maka $1418 = 1 \times 716 + 702$, diperoleh nilai $y = 702$ sehingga $x + y = 1418$.

Jika $x = 358$, maka $1418 = 3 \times 358 + 344$, diperoleh nilai $y = 344$ sehingga $x + y = 702$.

Jika $x = 179$, maka $1418 = 7 \times 179 + 165$, diperoleh nilai $y = 165$ sehingga $x + y = 344$.

Jadi, nilai $x + y$ yang mungkin adalah 344.

7. Jawaban : B

Misalkan S adalah ruang sampel peristiwa pelemparan dua dadu dan sekeping uang logam sekaligus dan A adalah peristiwa munculnya sisi angka pada uang logam dan kedua dadu berjumlah 5.





$$n(S) = 2 \times 6 \times 6 = 72$$

$$A = \{(A,1,4), (A,2,3), (A,3,2), (A,4,1)\} \rightarrow n(A) = 4$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$$

Jadi, peluang akan didapatkan sisi angka pada mata uang dan kedua dadu berjumlah 5 adalah $\frac{1}{18}$.

8. Jawaban : D

$$2^{13} + 2^{10} + 2^n = 2^{10}(2^3 + 1 + 2^{n-10})$$

$$2^{13} + 2^{10} + 2^n = 2^{10}(9 + 2^{n-10})$$

Karena 2^{10} bilangan kuadrat sempurna, maka $2^{13} + 2^{10} + 2^n$ akan merupakan kuadrat sempurna apabila $9 + 2^{n-10}$ juga merupakan kuadrat sempurna. Hal ini dimungkinkan untuk $2^{n-10} = 16$ atau $-10 = 4$, sehingga diperoleh nilai $n = 14$.

9. Jawaban : A

$$f(n) = 2^{n-1} + 2^n - 2^{n+1}$$

$$f(1) = 2^0 + 2^1 - 2^2$$

$$f(2) = 2^1 + 2^2 - 2^3$$

$$f(3) = 2^2 + 2^3 - 2^4$$

$$f(4) = 2^3 + 2^4 - 2^5$$

$$\underline{f(5) = 2^4 + 2^5 - 2^6}$$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(5) = 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 - 2^6$$

$$= 1 + 2 + 2 + 4 + 8 + 16 - 64$$

$$= -31$$





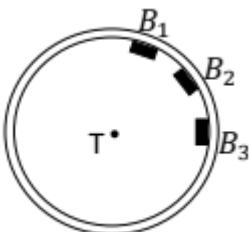
JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

10. Jawaban : C

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3^{2015}}}{\sqrt{3^{2015}} - \sqrt{3^{2013}}} &= \frac{\sqrt{3^{2015}}}{\sqrt{3^{2015}} - \sqrt{3^{2013}}} \times \frac{(\sqrt{3^{2015}} + \sqrt{3^{2013}})}{(\sqrt{3^{2015}} + \sqrt{3^{2013}})} \\ &= \frac{3^{2015} + 3^{2014}}{3^{2015} - 3^{2013}} \\ &= \frac{3^{2013}(3^2 + 3^1)}{3^{2013}(3^2 - 1)} \\ &= \frac{12}{8} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

11. Jawaban : B



Lintasan lari berbentuk lingkaran berjari-jari 50 meter.

Bakri bergerak dari B_1 ke B_7 menempuh $6/12$ lintasan.

Bima bergerak dari B_1 ke B_6 menempuh $5/12$ lintasan.

Budi bergerak dari B_1 ke B_4 berlawanan arah jarum jam menempuh $9/12$ lintasan.

Total yang telah ditempuh adalah $\frac{6+5+9}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ lintasan

$$= \frac{5}{3} \times 2 \times 3,14 \times 50$$

$$= 523,33..$$

$$= 523 \text{ meter}$$

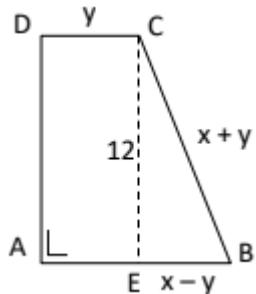
12. Jawaban : D





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Diketahui $AB + CD = BC$, dan $AD = 12$.

Diberikan titik E pada AB sehingga CE tegak lurus AB

Misalkan $AB = x$ dan $CD = y$, maka $BE = x - y$ dan $BC = x + y$

Perhatikan segitiga siku-siku EBC .

$$EC^2 = BC^2 - EB^2$$

$$12^2 = (x + y)^2 - (x - y)^2$$

$$144 = [(x + y) + (x - y)][(x + y) - (x - y)]$$

$$144 = (2x)(2y)$$

$$xy = 36$$

Jadi, $AB \times CD = xy = 36$

13. Jawaban : C

Misalkan Anton lahir pada tahun ‘ $20ab$ ’ dan kakaknya lahir pada tahun ‘ $199c$ ’ Karena umur nya sama dengan jumlah angka-angka tahun kelahirannya, maka:

$$2000 + 10a + b + 2 + a + b = 2015 \rightarrow 2002 + 11a + 2b = 2015$$

$$\rightarrow 11a + 2b = 13$$

$$\rightarrow \text{diperoleh nilai } a = 1 \text{ dan } b = 1$$

Hal ini berarti bahwa Anton lahir pada tahun 2011 atau Anton berumur 4 tahun.

$$1990 + c + 1 + 9 + 9 + c = 2015 \rightarrow 2009 + 2c = 2015$$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

$$\rightarrow 2c = 6$$

$$\rightarrow c = 3$$

Hal ini berarti bahwa kakak Anton lahir pada tahun 1993 atau berumur 22 tahun.

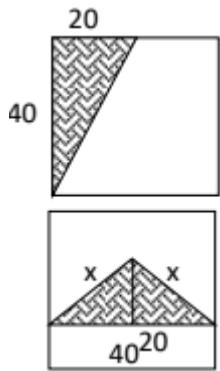
Jadi, jumlah umur mereka adalah $4 + 22 = 26$ tahun.

14. Jawaban : B

Perhatikan tabel berikut:

Waktu	Tarif satuan (Rp)	Durasi (jam)	Biaya
16.00 – 19.00	40.000	3	120.000
19.00 – 06.00	30.000	11	330.000
06.00 – 07.00	120% x 30.000	1	36.000
07.00 – 08.00	120% x 36.000	1	43.200
08.00 – 09.00	120% x 43.200	1	51.840
Total Biaya Penitipan anak			581.040

15. Jawaban : D



Volume kardus = 64.000 cm^3 . Dengan demikian, panjang rusuk kardus (panjang sisi persegi) adalah 40 cm.

Perbandingan dua sisi siku-siku pada potongan pertama adalah 1 : 2 sehingga ukuran sisi siku-sikunya adalah 20 cm dan 40 cm.

Karena luas segitiga pada potongan kedua sama maka tinggi segitiga sama kaki tersebut 20 cm sehingga panjang sisi yang sama x adalah:

$$x^2 = 20^2 + 20^2$$

$$x^2 = 2 \times 20^2$$

$$x = 20\sqrt{2}$$

ISIAN SINGKAT





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

1. Jawaban : $x = -4$ dan $x = -1$

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Karena $x^2 + 5x + 6$ bilangan prima, maka $(x + 2) = \pm 1$ dengan $(x + 3)$ bilangan prima atau $(x + 3) = \pm 1$ dengan $(x + 2)$ bilangan prima.

Jika $x + 2 = 1$ maka $x = -1$ dengan $x + 3 = 2$ ($(x + 2)(x + 3)$ merupakan bilangan prima)

Jika $x + 2 = -1$ maka $x = 1$ dengan $x + 3 = 4$ ($(x + 2)(x + 3)$ bukan bilangan prima)

Jika $x + 3 = 1$ maka $x = -2$ dengan $x + 2 = 0$ ($(x + 2)(x + 3)$ bukan bilangan prima)

Jika $x + 3 = -1$ maka $x = -4$ dengan $x + 2 = -2$ ($(x + 2)(x + 3)$ merupakan bilangan prima)

Jadi, nilai x yang memenuhi sehingga $x^2 + 5x + 6$ merupakan bilangan prima adalah $x = -4$ dan $x = -1$.

2. Jawaban : 12

a , b , dan c merupakan bilangan genap positif berurutan, sehingga $b = a + 2$, dan $c = a + 4$.

Parabola melalui titik $(-2, 6)$. Hal ini berarti bahwa:

$$6 = a(-2)^2 + (a + 2)(-2) + (a + 4)$$

$$6 = 4a - 2a - 4 + a + 4$$

$$6 = 3a$$

$$a = 2$$

Jadi, $a + b + c = 2 + 4 + 6 = 12$

Atau menggunakan sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(a+2)}{2a} = -1 \rightarrow a + 2 = 2a \rightarrow a = 2$

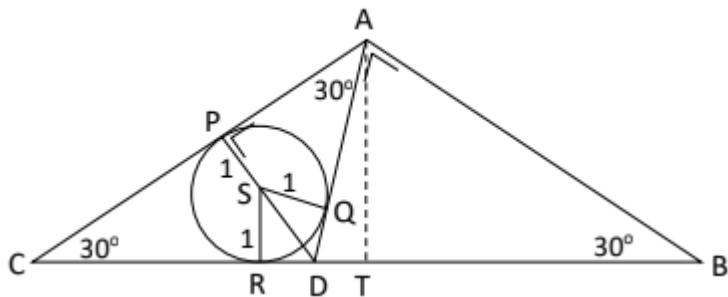
3. Jawaban : $(12 + 7\sqrt{3}) \text{ cm}^2$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Perhatikan $\triangle SRD$ siku-siku di R

$$\angle SDR = 60^\circ, \frac{SD}{SR} = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow SD = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

PD adalah diameter lingkaran, $PD = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Perhatikan $\triangle CPD$ siku-siku di P

$$\angle PCD = 30^\circ, \frac{PD}{PC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow PC = PD\sqrt{3} = \left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = \sqrt{3} + 2$$

Karena $\triangle ACD$ sama kaki, maka $AP = PC$, sehingga $AC = (2\sqrt{3} + 4)$

Perhatikan $\triangle ACT$ siku-siku di T

$$\angle ACT = 30^\circ, \frac{AT}{AC} = \frac{1}{2} \rightarrow AT = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3} + 2$$

$$\frac{CT}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow CT = AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (\sqrt{3} + 2)\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 3, \text{ sehingga } BC = 2(2\sqrt{3} + 3)$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AT$$

$$= \frac{1}{2} \times 2(2\sqrt{3} + 3) \times (\sqrt{3} + 2)$$

$$= (2\sqrt{3} + 3) \times (\sqrt{3} + 2)$$

$$= (6 + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 6)$$

$$= (12 + 7\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

4. Jawaban : 55 : 153





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Misalkan volum kedua botol adalah 1 satuan

Perbandingan gula dan air pada botol I = 2 : 11, dan pada botol II = 3 : 5

Volum gula dalam botol I = $\frac{2}{13}$, sedangkan volum gula dalam botol II = $\frac{3}{8}$

Volum air dalam botol I = $\frac{11}{13}$, sedangkan volum air dalam botol II = $\frac{5}{8}$

$$\begin{aligned}\text{Perbandingan kandungan gula dan air hasil campuran} &= \left(\frac{2}{13} + \frac{3}{8}\right) : \left(\frac{11}{13} + \frac{5}{8}\right) \\ &= (16 + 39) : (88 + 65) \\ &= 55 : 153\end{aligned}$$

5. Jawaban : 19

$$f(x) = 209 - x^2$$

$$f(a + 2b) = 209 - (a + 2b)^2$$

$$f(a - 2b) = 209 - (a - 2b)^2$$

$$\underline{f(ab) = - (a + 2b)^2 + (a - 2b)^2}$$

$$= (2a)(- 4b)$$

$$209 - (ab)^2 = - 8ab$$

$$(ab)^2 - 8(ab) - 209 = 0$$

$$(ab + 11)(ab - 19) = 0$$

$$ab = - 11 \text{ atau } ab = 19$$

Karena a dan b bilangan bulat positif, dimana $a < b$, maka $ab = 19$ (bilangan prima), diperoleh nilai tunggal $a = 1$ dan $b = 19$, sehingga nilai $\frac{b}{a} = 19$

6. Jawaban : 10.080





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Misalkan S_n dan U_n adalah jumlah n suku pertama dan suku ke- n suatu deret aritmetika, dimana:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)b] \text{ dan } U_n = a + (n - 1)b$$

$$S_4 = \frac{4}{2} [2a + 3b] = 70 \rightarrow 2a + 3b = 35 \quad \dots \dots \dots \quad 1)$$

$$S_{16} - S_4 = \frac{16}{2} [2a + 15b] - \frac{4}{2} [2a + 3b]$$

$$690 = 8[2a + 15b] - 2[2a + 3b]$$

$$345 = 4[2a + 15b] - [2a + 3b]$$

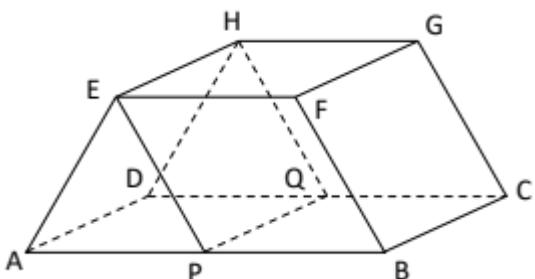
$$= 6a + 57b \rightarrow 2a + 19b = 115 \quad \dots \dots \dots \quad 2)$$

Dari selisih persamaan 2) dan 1) diperoleh: $16b = 80 \rightarrow b = 5$. Akibatnya, nilai $a = 10$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_{2015} = 10 + (2014)5 = 10 + 10070 = 10.080$$

7. Jawaban : 1 : 2



Perbandingan vulum prisma $APE.DQH$ dan prisma $PBFE.QCGH$ = Perbandingan luas segitiga APE dan jajar genjang $PBFE$.

Karena $AP = PB = EF$, maka luas $PBFE = 2$ kali luas segitiga APE , sehingga:

Perbandingan volum prisma $APE.DQH$ dan prisma $PBFE.QCGH$ = $1 : 2$

8. Jawaban : 28

Tabel berikut adalah kemungkinan susunan peserta OSN yang mewakili sekolah:





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Matematika	IPA	IPS	Banyak cara
A	C	D, E, F	3
	E	D, F	2
B	C	D, E, F	3
	E	D, F	2
C	A	D, E, F	3
	B	D, E, F	3
	E	A, D, F	3
D	A	E, F	2
	B	E, F	2
	C	A, E, F	3
	E	A, F	2
Total kemungkinan susunan peserta OSN			28

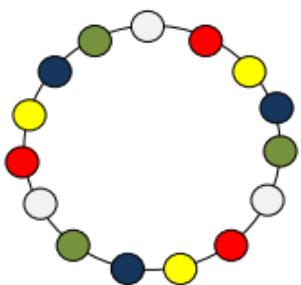
9. Jawaban : A(-8, 6), B(-8, 10), dan C(-4, 6)

Koordinat A, B, dan C dapat ditentukan dengan mencerminkan $\Delta A'B'C'$ berturut-turut pada garis $y = 3$ dan sumbu Y, atau merotasi $\Delta A'B'C'$ sejauh 180 derajat dengan pusat rotasi (0, 3).

Tabel berikut adalah refleksi berturut-turut $\Delta A'B'C'$ pada garis $y = 3$ dan sumbu Y.

Koordinat $\Delta A'B'C'$.	Refleksi pada $y = 3$	Refleksi pada sumbu Y
(x, y)	(x, 6 - y)	(-x, 6 - y)
$A'(8, 0)$	(8, 6)	$A(-8, 6)$
$B'(8, -4)$	(8, 10)	$B(-8, 10)$
$C'(4, 0)$	(4, 6)	$C(-4, 6)$

10. Jawaban : 61.628



Aturan: Diantara 2 manik putih terdapat 4 manik berwarna selain putih.

Banyak cara menyusun 12 manik-manik selain warna putih dalam urutan memanjang adalah:

$$\frac{12!}{3! \times 3! \times 3! \times 3!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{6 \times 6 \times 6 \times 3!}$$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



$$= 12 \times 11 \times 10 \times 8 \times 7 \times 5$$

$$= 369.600$$

Jika manik-manik disusun dalam posisi melingkar, maka selalu terdapat tiga susunan yang sama dari komposisi yang berbeda.

Sebagai contoh :

PMMMKPKKHHPHBBB, PKKHHPHBBBPMMMK, PHBBBPMMMKPKKHH

Ketiga komposisi berbeda di atas mempunyai susunan yang sama dalam posisi melingkar.

Akan tetapi, komposisi ini tidak terjadi apabila setiap antara dua warna putih memuat komposisi warna yang sama yang memuat keempat warna berbeda,

Contoh: **PMKHBPMKHBPMKHB**

Banyak cara menyusun 4 warna dari 4 warna berbeda adalah $4! = 24$

Jadi, banyak cara membuat gelang dimana setiap antara dua putih mempunyai komposisi warna yang sama adalah 24 cara.

Banyak cara membuat gelang dimana setiap antara dua putih mempunyai komposisi warna tidak sama adalah $\frac{369.600 - 24}{3} = \frac{369.576}{3} = 123.192$ cara

Akan tetapi, perlu dipahami bahwa setiap gelang bisa digunakan dua cara sehingga setiap dua komposisi manik-manik yang berkebalikan dianggap sama.

Contoh: **PMMMKPKKHHPHBBB** sama dengan **PBBBPHHHKKPKMM**

Dengan demikian, banyak susunan gelang yang mungkin adalah $\frac{24+123.192}{2} = 12 + 61.596 = 61.608$ cara.

