



# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



### PEMBAHASAN

#### OSK MATEMATIKA SMP

TAHUN 2014

#### 1. Jawaban : A

Banyak cara 10 guru ditugaskan di sekolah  $A = C_2^{10} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$  cara

Banyak cara 8 guru tersisa ditugaskan di sekolah  $B = C_3^8 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$  cara

Banyak cara 5 guru tersisa ditugaskan di sekolah  $C = C_5^5 = 1$  cara

Jadi, banyak cara menugaskan 10 guru tersebut di sekolah A, B, dan C adalah  $45 \times 56 \times 1 = 2520$  cara.

#### 2. Jawaban : C

Misalkan  $x$  = banyaknya siswa kelas VIII SMP Bina Prestasi

Banyak siswa perempuan =  $\frac{3}{5}x$ . Akibatnya, banyak siswa laki-laki =  $\frac{2}{5}x$

Banyak siswa laki-laki yang ke sekolah naik bus =  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}x = \frac{2}{10}x$

Banyak siswa perempuan yang ke sekolah naik bus =  $\frac{1}{6} \times \frac{3}{5}x = \frac{1}{10}x$

Banyak siswa ke sekolah naik bus =  $\frac{2}{10}x + \frac{1}{10}x = \frac{3}{10}x$

Banyak siswa ke sekolah tidak naik bus =  $1 - \frac{3}{10}x = \frac{7}{10}x = 147 \Leftrightarrow x = 210$

Jadi, banyak siswa kelas VIII SMP Bina Prestasi ke sekolah tidak naik bus adalah 210 orang.

#### 3. Jawaban : A

Diketahui bahwa: FPB(72,  $x$ ) = 3, KPK(72,  $x$ ) = 1800.





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Misalkan  $x = 3a$ . Karena  $72 = 3 \times 24$ , maka  $a$  relative prima dengan 24, sehingga:

$$\text{KPK}(72, x) = 3 \times 24 \times a = 1800 \Leftrightarrow a = 25.$$

$$\text{Dengan demikian, } x = 3 \times 25 = 75$$

Berdasarkan pernyataan di atas, maka  $x$  merupakan bilangan kelipatan 5.

### 4. Jawaban : B

Rata-rata  $a$  dan  $b = 50$ , sehingga  $a + b = 100$ .....1)

Rata-rata  $b$  dan  $c = 75$ , sehingga  $b + c = 150$  .....2)

Rata-rata  $c$  dan  $d = 70$ , sehingga  $c + d = 140$  .....3)

Persamaan 1) + 3) – 2), diperoleh:

$$(a + b) + (c + d) - (b + c) = 100 + 140 - 150$$

$$a + d = 90$$

Jadi, rata-rata  $a$  dan  $d$  adalah  $\frac{a+d}{2} = \frac{90}{2} = 45$ .

### 5. Jawaban : C

Misalkan  $a$  dan  $b$  adalah nilai siswa A dan siswa B, maka  $a = 3b$

Rata-rata nilai gabungan 30 siswa adalah 78 sehingga  $\frac{28 \times 80 + a + b}{30} = 78$ ,

$$\Leftrightarrow 2240 + 3b + b = 78 \times 30$$

$$\Leftrightarrow 2240 + 4b = 2340$$

$$\Leftrightarrow 4b = 100$$

$$\Leftrightarrow b = 25$$

Jadi, selisih nilai siswa A dan B adalah  $3b - b = 2b = 2 \times 25 = 50$ .

### 6. Jawaban : B

Misalkan kurva  $y = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$  dan  $y = x^2 + 2x - 1$  berpotongan pada titik  $(x,y)$ , maka:





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



$$x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = x^2 + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x + 2) + x(x + 2) + (x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 + x + 1) = 0$$

Karena  $x^2 + x + 1$  definit positif, maka  $x + 2 = 0$  adalah satu-satunya pembuat nol pada persamaan di atas, sehingga banyaknya titik potong kedua kurva hanya 1, yakni pada titik (2,7)

### 7. Jawaban : D

$$18^{10} = (3^2 \times 2)^{10} = 3^{20} \times 2^{10} = 3^n \times (3^{20-n} \times 2^{10}), \text{ dimana } 20 - n \geq 0$$

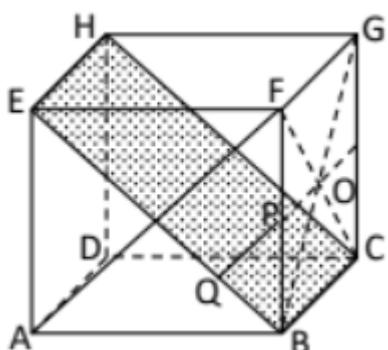
Dengan demikian, bilangan bulat terbesar  $n$  yang mungkin adalah 20.

### 8. Jawaban : D

Karena tidak ada tiga titik atau lebih yang segaris, maka setiap 3 titik selalu dapat dibentuk sebuah segitiga. Jadi, banyak segi tiga yang dapat dibentuk dari 10 titik adalah

$$C_3^{10} = \frac{10!}{3! 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$

### 9. Jawaban : D



Misalkan  $P$  adalah proyeksi titik  $O$  pada rusuk  $BF$ , maka  $P$  merupakan titik tengah  $BF$ .

Jarak titik  $O$  pada bidang  $BCEH$  = jarak titik  $P$  pada diagonal  $BE$ .

Jika  $Q$  proyeksi titik  $P$  pada  $BE$ , maka  $PQ$  adalah jarak  $P$  pada  $BE$  atau jarak titik  $O$  pada bidang  $BCEH$ .

Karena  $PQ \perp BE$ , maka  $PQ$  sejajar  $AF$ . Akibatnya,  $PQ$  adalah seperempat dari diagonal  $AF$ (coba selidiki).





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



$$AF = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow PQ = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ satuan}$$

### 10. Jawaban : D

- Modus pada gambar A = 1, modus pada gambar B = 10, jadi Modus A < Modus B
- Banyak data pada kedua gambar di atas adalah  $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$   
Letak Median pada data ke  $\frac{1}{2}(55 + 1) =$  data ke 28.  
Median pada gambar A = 4, median pada gambar B = 7, jadi Median A < Median B
- Letak Quartil 1 pada data ke  $\frac{1}{4}(55 + 1) =$  data ke 14  
Quartil 1 pada gambar A = 2, quartil 1 pada gambar B = 5, jadi Quartil 1 A < Quartil 1 B
- Karena data kecil pada gambar A dan data besar pada gambar B memiliki frekuensi yang tinggi, maka rata-rata pada gambar A < rata-rata pada gambar B

### 11. Jawaban : B

$$x^2 = y^2 + 100 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 100 \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 100$$

Karena  $x$  dan  $y$  bilangan asli, maka  $x + y$  dan  $x - y$  merupakan faktor-faktor dari 100.

Kemungkinan 1.

$(x + y)(x - y) = 100 \times 1 \Leftrightarrow x + y = 100$ , dan  $x - y = 1$ , diperoleh nilai  $x$  dan  $y$  yang bukan bilangan asli.

Kemungkinan 2.

$(x + y)(x - y) = 50 \times 2 \Leftrightarrow x + y = 50$ , dan  $x - y = 2$ , diperoleh nilai  $x = 26$  dan  $y = 24$  yang kedua-duanya bilangan asli.

Kemungkinan 3.

$(x + y)(x - y) = 25 \times 4 \Leftrightarrow x + y = 25$ , dan  $x - y = 4$ , diperoleh nilai  $x$  dan  $y$  yang bukan bilangan asli.

Kemungkinan 4.

$(x + y)(x - y) = 20 \times 5 \Leftrightarrow x + y = 20$ , dan  $x - y = 5$ , diperoleh nilai  $x$  dan  $y$  yang bukan bilangan asli.





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Kemungkinan 5.

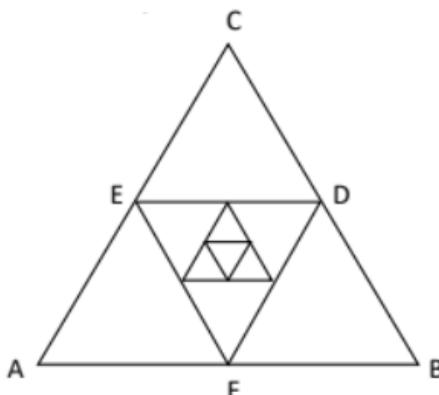
$(x + y)(x - y) = 10 \times 10 \Leftrightarrow x + y = 10$ , dan  $x - y = 10$ , diperoleh nilai  $x = 10$  dan  $y = 0$ , dimana  $y = 0$  bukan bilangan asli.

Dengan demikian, banyak pasangan bilangan asli yang memenuhi  $x^2 = y^2 + 100$  adalah 1, yaitu (26, 24)

### 12. Jawaban : C

Karena penjumlahan setiap dua bilangan genap tak negatif adalah bilangan genap tak negatif, dan perkalian dua bilangan genap tak negatif adalah bilangan genap tak negatif, maka himpunan A tertutup pada operasi penjumlahan dan perkalian. (sangat jelas)

### 13. Jawaban : C



Luas segitiga sama sisi dengan panjang sisi  $a$  satuan adalah  $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$  satuan.

Luas segitiga  $ABC = \frac{1}{4} \times 2^2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$  satuan luas.

Misalkan  $D$ ,  $E$  dan  $F$  adalah titik tengah  $BC$ ,  $AC$  dan  $AB$ , maka:

$$\text{Luas segitiga } DEF = \frac{1}{4} \times \text{Luas segitiga } ABC = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

Perbandingan luas segitiga  $DEF$  dan segitiga  $ABC$  adalah  $1 : 4$

Jumlah semua segitiga pada gambar di atas jika diteruskan akan mengikuti pola deret geometri dengan suku pertama( $a$ ) = luas segitiga  $ABC$ , dan rasio( $r$ ) =  $\frac{1}{4}$

Dengan menggunakan rumus deret geometri tak hingga, diperoleh jumlah seluruh segitiga sebagai berikut:

$$S_{\sim} = \frac{a}{1-r} = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ satuan luas.}$$





**14. Jawaban : C**

Posisi katak mula-mula pada angka 1

Lompatan ke-1, katak berada pada angka 4

Lompatan ke-2, katak berada pada angka 7

Lompatan ke-3 katak berada pada angka 8

Lompatan ke-4, katak berada pada angka 1 (kembali pada posisi semula)

Dengan demikian, posisi katak pada:

Lompatan ke  $4n + 1$ , berada pada angka 4

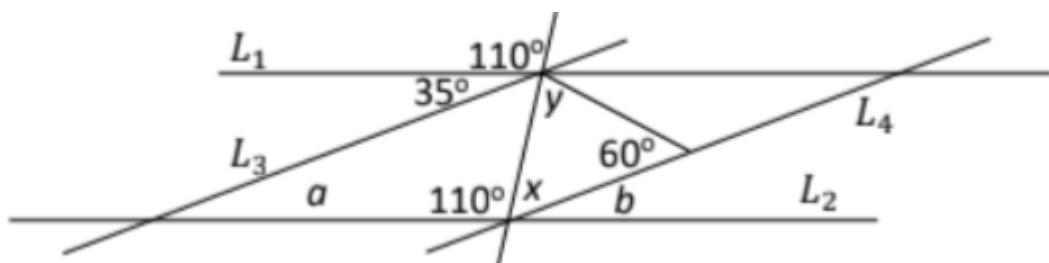
Lompatan ke  $4n + 2$ , berada pada angka 7

Lompatan ke  $4n + 3$ , berada pada angka 8

Lompatan ke  $4n$ , berada pada angka 1

Karena  $2014 = 4 \times 503 + 2$ , maka posisi katak setelah melompat 2014 kali adalah angka 7.

**15. Jawaban : D**



Garis L1 sejajar dengan L2, akibatnya  $a = 35^\circ$  (sepasang sudut dalam berseberangan)

Garis L3 sejajar dengan L4, akibatnya sudut  $a =$  sudut  $b = 35^\circ$  (sepasang sudut sehadap)

$$x + b = 180 - 110 = 70 \text{ (berpelurus)} \Leftrightarrow x + 35 = 70 \Leftrightarrow x = 35^\circ$$

$$x + y + 60 = 180 \text{ (sifat sudut segitiga)} \Leftrightarrow 35 + y + 60 = 180 \Leftrightarrow y = 85^\circ$$

$$\text{Jadi, } y - x = 85 - 35 = 50^\circ.$$





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

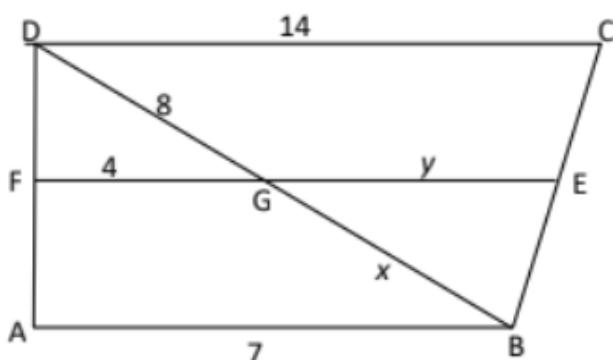
### 16. Jawaban : A

Persentase banyak siswa yang tidak mengirim SMS =  $100 - (5 + 10 + 15 + 20 + 25) = 25\%$

Persentase banyak siswa yang mengirim SMS tidak lebih 30 kali =  $25 + 5 + 10 + 15 = 55\%$

Jadi, peluang siswa mengirim sms tidak lebih 30 kali adalah  $\frac{55}{100} = 0,55$

### 17. Jawaban : C



Perhatikan  $\Delta DFG$  sebangun  $\Delta DAB$

$$\begin{aligned}\frac{FG}{AB} &= \frac{DG}{DB} \Leftrightarrow \frac{4}{7} = \frac{8}{8+x} \\ \Leftrightarrow 4(8+x) &= 7 \times 8 \\ \Leftrightarrow 8+x &= 14 \\ \Leftrightarrow x &= 6\end{aligned}$$

Perhatikan  $\Delta BEG$  sebangun  $\Delta BCD$

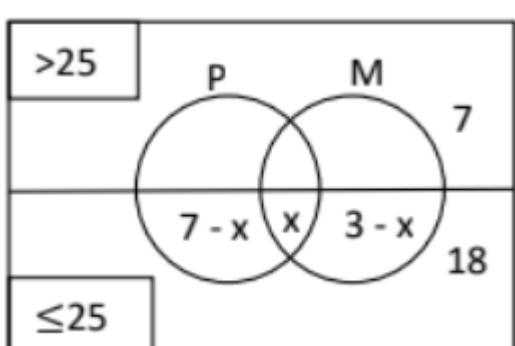
$$\frac{GE}{DC} = \frac{BG}{BD} \Leftrightarrow \frac{y}{14} = \frac{6}{14}$$

$$\Leftrightarrow y = 6$$

Jadi,  $x + y = 6 + 6 = 12$

### 18. Jawaban : B

Misalkan  $P$ , dan  $M$  berturut-turut merupakan himpunan orang yang menyukai masakan pedas dan manis.  $X$  adalah banyak orang yang berumur tidak lebih dari 25 tahun dan menyukai masakan pedas dan manis.



Banyak orang berumur > 25 tahun = 50 orang.

Banyak orang berumur ≤ 25 tahun =  $75 - 50 = 25$  orang.

Banyak orang berumur ≤ 25 tahun dan menyukai masakan pedas = 7 orang.





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



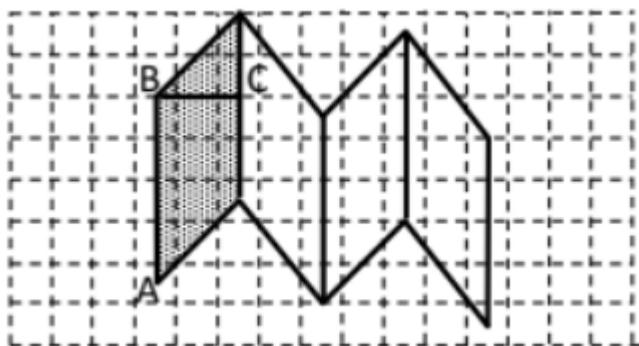
Banyak orang berumur  $\leq 25$  tahun dan menyukai masakan manis =  $28 - 25 = 3$  orang.

Banyak orang berumur  $\leq 25$  tahun tetapi tidak menyukai masakan pedas dan manis =  $25 - 7 = 18$  orang.

Dengan demikian,  $(7 - x) + x + (3 - x) + 18 = 25 \Leftrightarrow 28 - x = 25 \Leftrightarrow x = 3$

Jadi, banyak orang yang berumur tidak lebih dari 25 tahun yang menyukai masakan pedas dan juga masakan manis adalah 3 orang.

### 19. Jawaban : C



Perhatikan gambar.

Panjang  $AB = 4,5 \times 2 = 9$  satuan

Panjang  $BC = 2 \times 2 = 4$  satuan

Luas jajar genjang yang diarsir =  $AB \times BC = 9 \times 4 = 36$

Luas bangun datar = 4 kali luas jajar genjang yang diarsir.

Luas bangun datar =  $4 \times 36 = 144$  satuan.

### 20. Jawaban : B

Maksimal banyak siswa di kelas tersebut sama dengan banyak cara membagi 7 permen dari 3 kantong yang tersedia.

Banyak cara memilih 2 kantong dari 3 kantong yang tersedia =  $C_2^3 = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3$  cara.

Banyak cara memilih 7 permen dari 2 kantong terpilih adalah  $\{(1,6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} = 6$  cara.

Banyak cara memilih 7 permen dari 3 kantong adalah  $3 \times 6 = 18$  cara.

Jadi, maksimal banyak siswa di kelas tersebut = 18 orang.

## ISIAN SINGKAT





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

### 1. Jawaban : 26

$$\begin{aligned}\frac{3^{2014} - 3^{2011} + 130}{3^{2011} + 5} &= \frac{27 \times 3^{2011} - 3^{2011} + 130}{3^{2011} + 5} \\&= \frac{26 \times 3^{2011} + 130}{3^{2011} + 5} \\&= \frac{26 \times (3^{2011} + 5)}{3^{2011} + 5} \\&= 26\end{aligned}$$

### 2. Jawaban : 35

Banyak persegi berukuran  $1 \times 1 = 22$  buah

Banyak persegi berukuran  $2 \times 2 = 3$  buah

Banyak persegi berukuran  $3 \times 3 = 8$  buah

Banyak persegi berukuran  $4 \times 4 = 2$  buah

Jadi, banyak persegi pada gambar =  $22 + 3 + 8 + 2 = 35$  buah

### 3. Jawaban : 566

Banyak korek api pada bentuk  $1 \times 5 = 16$

Banyak korek api pada bentuk  $2 \times 5 = 27 = 16 + 11$

Banyak korek api pada bentuk  $3 \times 5 = 38 = 16 + 2 \times 11$ .

Banyak korek api pada bentuk  $n \times 5 = 16 + (n - 1) \times 11$

Banyak korek api pada bentuk  $51 \times 5 = 16 + 50 \times 11 = 566$  batang.

### 4. Jawaban : 688

Jumlah angka satuan pada  $\underbrace{2 + 22 + 222 + \dots + 222 \dots 222}_{2014 \text{ suku}} = 2014 \times 2 = 4028 = 4020 + 8$

Jadi, angka satuan dari M adalah 8

Jumlah angka puluhan pada  $\underbrace{2 + 22 + 222 + \dots + 222 \dots 222}_{2014 \text{ suku}} = 2013 \times 2 + 402 = 4428 = 4420 + 8$

Jadi, angka puluhan dari M adalah 6.





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Jumlah angka ratusan pada  $\underbrace{2 + 22 + 222 + \dots + 222\dots 222}_{2014 \text{ suku}} = 2012 \times 2 + 442 = 4466 = 4460 + 6$

Jadi, angka ratusan dari M adalah 6.

Dengan demikian, tiga angka dari M adalah 688.

### 5. Jawaban : $-3 < x \leq 1$

$$\frac{(x-1)(x^2+6)}{x+3} \leq x - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+6)}{x+3} - \frac{(x-1)(x+3)}{x+3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2-x+3)}{x+3} \leq 0; (x^2 - x + 3) > 0, \text{ untuk setiap } x \text{ bilangan real.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)}{x+3} \leq 0, x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow -3 < x \leq 1$$



### 6. Jawaban : 505

Bilangan terbesar dari jumlah bilangan asli berurutan apabila banyaknya bilangan asli bilangan berurutan tersebut terkecil.

Setiap bilangan ganjil selalu dapat dinyatakan dari penjumlahan dua bilangan asli berurutan.

Setiap bilangan kelipatan 3 selalu dapat dinyatakan dari penjumlahan tiga bilangan asli berurutan.

‘2014’ bukan bilangan ganjil dan bukan bilangan kelipatan tiga sehingga tidak dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan dua atau tiga bilangan asli berurutan.

Misalkan ‘2014’ dapat dinyatakan dalam penjumlahan empat bilangan asli berurutan dengan bilangan terbesar x, maka tiga bilangan yang lain adalah  $(x - 3)$ ,  $(x - 2)$ , dan  $(x - 1)$ .  $(x - 3) + (x - 2) + (x - 1) + x = 2014 \Leftrightarrow 4x - 6 = 2014 \Leftrightarrow 4x = 2020 \Leftrightarrow x = 505$

Jadi, bilangan asli terbesar yang mungkin jika 2014 dinyatakan sebagai jumlah dari bilangan-bilangan asli berurutan adalah 505.

### 7. Jawaban : 254





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Banyak cara meletakkan 8 pensil warna ke dalam dua kotak adalah  $2^8 = 256$

Karena setiap kotak tidak boleh kosong, maka banyak cara yang mungkin adalah  $256 - 2 = 254$

8. **Jawaban :**  $\frac{1}{320}$

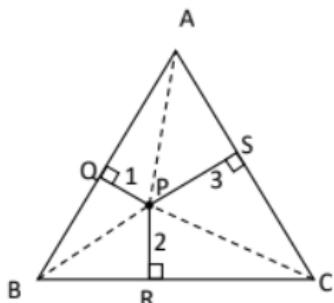
KPK dari 2, 4, 8, 16, 20 dan 40 adalah 80, sehingga:

$$\frac{1}{2} = \frac{40}{80}, \frac{1}{4} = \frac{20}{80}, \frac{1}{8} = \frac{10}{80}, \frac{1}{16} = \frac{5}{80}, \frac{1}{20} = \frac{4}{80}, \frac{1}{40} = \frac{2}{80}, \frac{9}{10} = \frac{72}{80}$$

Empat bilangan yang berjumlah  $\frac{9}{10} = \frac{72}{80}$  adalah  $\frac{1}{2} = \frac{40}{80}, \frac{1}{4} = \frac{20}{80}, \frac{1}{8} = \frac{10}{80}$ , dan  $\frac{1}{40} = \frac{2}{80}$

Hasil kali dua bilangan yang lain adalah  $\frac{1}{16} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{320}$

9. **Jawaban :**  $4\sqrt{3}$  cm



Misalkan panjang sisi segitiga adalah  $a$  cm.

$$\text{Luas segitiga } ABC \text{ adalah } \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \text{Luas } \Delta PAB + \text{Luas } \Delta PBC + \text{Luas } \Delta PAC$$

$$\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}AB \times PQ + \frac{1}{2}BC \times PR + \frac{1}{2}AC \times PS$$

$$= \frac{1}{2}a \times 1 + \frac{1}{2}a \times 2 + \frac{1}{2}a \times 3$$

$$\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = 3a$$

$$a\sqrt{3} = 12$$





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



$$a = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

### 10. Jawaban : 2240

Banyak cara menyusun 8 persegi kecil ke dalam persegi  $4 \times 4$  adalah 1 cara

Banyak cara menyusun 2 segitiga siku-siku ke dalam persegi  $4 \times 4$  adalah 2 cara



Banyak cara meletakkan 3 persegi warna merah ke dalam 8 persegi adalah

$$C_3^8 = \frac{8!}{3! 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56 \text{ cara}$$

Banyak cara meletakkan 3 persegi warna kuning ke dalam 5 persegi tersisa adalah

$$C_3^5 = \frac{5!}{3! 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ cara}$$

Banyak cara meletakkan 2 persegi warna hijau ke dalam 2 persegi tersisa adalah 1 cara.

Banyak cara meletakkan 2 warna ke dalam 2 segitiga adalah 2 cara

Jadi, banyak cara mengatur komposisi warna ke dalam persegi  $4 \times 4 = 2 \times 56 \times 10 \times 2 = 2240$  cara.

