PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2020

1. **Jawaban : 20**

Kita sederhanakan bentuk tersebut.

$$f(x) = \frac{3(x-1)(x-2)}{2} + \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 2(x-1)(x-3)$$

$$= \frac{3(x^2-3x+2)}{2} + \frac{x^2-5x+6}{2} - 2(x^2-4x+3)$$

$$= \frac{3x^2-9x+6+x^2-5x+6}{2} - 2x^2 + 8x - 6$$

$$= \frac{4x^2-14x+12}{2} - 2x^2 + 8x - 6$$

$$= 2x^2 - 7x + 6 - 2x^2 + 8x - 6$$

$$f(x) = x$$

Demikian kita peroleh $f(20) = 20$

2. **Jawaban :** $\frac{6}{13}$

Banyak kubus tidak terkena cat untuk kubus $n \times n \times n$ ada sebanyak $(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$, sedangkan banyak kubus yang terkena satu sisi ada sebanyak $6(n-2)(n-2)$, serta banyak kubus yang terkena cat sebanyak 3 sisi ada 8. Demikian untuk $n = 3$, banyak kubus yang tidak terkena cat adalah 1 kubus. Sehingga banyak kubus kecil yang salah satunya berwarna merah adalah 27 - 1 = 26. Tinjau bahwa banyak kubus yang terkena cat dua sisi adalah 26 - 6 - 8 = 12. Jadi, peluang bahwa Amir mengambil kubus kecil yang memiliki tepat dua sisi adalah $\frac{12}{26} = \frac{6}{13}$.

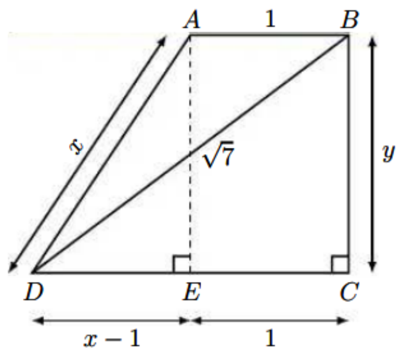
3. **Jawaban :** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Misalkan panjang CD = AD = x dan panjang BC = y. Misalkan titik E terletak pada CD sehingga AE tegak lurus CD. Karena AB || CE dan AE || BC, maka ABCE merupakan persegipanjang. Kita peroleh bahwa

$$EC = AB = 1 \quad \text{dan} \quad AE = BC = y$$

Demikian panjang DE = x - 1. Perhatikan ΔBCD. Dengan Phytagoras,

$$CD^2 + CB^2 = DB^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 7$$



Perhatikan ΔDEA. Dengan Phytagoras,

$$AD^2 = DE^2 + EA^2$$

$$x^2 = (x - 1)^2 + y^2$$

$$x^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$x^2 + 2x - 1 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + 2x - 1 = 7$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

Sehingga x = -4 atau x = 2. Karena haruslah x > 0, demikian x = 2. Subtitusikan, kita peroleh

$$y^2 = 7 - x^2 = 7 - 4 = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

Kita peroleh bahwa panjang CD = 2 dan BC = $\sqrt{3}$. Demikian luas trapesium tersebut adalah

$$[ABCD] = \frac{AB+DC}{2} \cdot BC = \frac{1+2}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

4. Jawaban : 3025

$$2x + 3y = 2020 \Rightarrow y = \frac{2020-2x}{3}$$

Jadi,

$$p = 3x + 2y$$

$$p = 3 + 2\left(\frac{2020-2x}{3}\right)$$

$$p = \frac{4040+5x}{3}$$

Agar p maksimum, maka x harus maksimum

$$y \geq 1 \Rightarrow \frac{2020-2x}{3} \geq 1$$

$$2020 - 2x \geq 3$$

$$-2x \geq -2017$$

$$x \leq 1008,5$$

Dipilih x bulat dengan $x \leq 1008,5$

Sehingga p juga bulat, maka $x = 1007$

$$p = \frac{4040 + 5\,(1007)}{3}$$

$$= \frac{4040 + 5035}{3}$$

$$= \frac{9075}{3}$$

$$= 3025$$

5. Jawaban : 1348

Misal $b_n = \frac{1}{a_n}$

$$b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2}$$

pers karakteristik

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$(r-1)^2 = 0$$

$$r_{1,2} = 1$$

solusi

$$b_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n n$$

$$b_n = c_1 + c_2 n$$

untuk $n = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2$

untuk $n = 2 \Rightarrow \frac{5}{3} = c_1 + 2c_2$

-

$$-\frac{2}{3} = -c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{2}{3}$$

$$c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 + \frac{2}{3} = 1$$

$$c_1 = \frac{1}{3}$$

Sehingga,

$$b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}n$$

$$b_n = \frac{1+2n}{3}$$

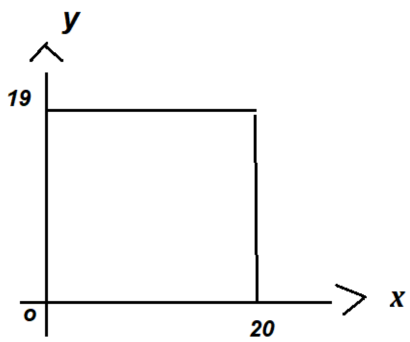
$$\frac{1}{b_n} = \frac{3}{1+2n}$$

$$a_n = \frac{3}{1+2n}$$

$a_{2020} = \frac{3}{4041} = \frac{1}{1347} = \frac{p}{q}$

Jadi, $p + q = 1348$

6. **Jawaban : 21890**



$0 \leq x \leq 20 \Rightarrow x$ ganjil ada 10 buah

x genap ada 11 buah

$0 \leq y \leq 19 \Rightarrow y$ ganjil ada 10 buah

y genap ada 10 buah

Misal $P(a,b)$ dan $Q(c,d)$

Titik tengah PQ adalah R.

Dengan $R\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$

$\frac{a+c}{2}$ bulat jika a dan c memiliki paritas yang sama

$\frac{b+d}{2}$ bulat jika b dan d memiliki paritas yang sama

Maka banyak cara pemilihan P dan Q :

- a,c genap dan b,d genap $\rightarrow 11 \times 10 = 110$ buah
- a,c genap dan b,d ganjil $\rightarrow 11 \times 10 = 110$ buah
- a,c ganjil dan b,d genap $\rightarrow 10 \times 10 = 100$ buah

- a,c ganjil dan b,d ganjil → $10 \times 10 = 100$ buah

Sehingga, banyak cara memiliki P,Q adalah :

$= {}_{110}C_2 + {}_{110}C_2 + {}_{100}C_2 + {}_{100}C_2$

$= 2\left({}_{110}C_2 + {}_{100}C_2\right)$

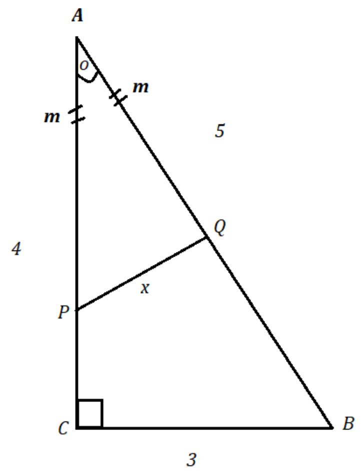
$= 2\left(\frac{110 \cdot 109}{1 \cdot 2} + \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2}\right)$

$= 110 \cdot 109 + 100 \cdot 99$

$= 11990 + 9900$

$= 21890$ cara

7. Jawaban : 2



$$\frac{[APQ]}{[ABC]} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot m \cdot \sin Q}{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin Q} = \frac{1}{2}$$

$$m^2 = 10$$

$$m = \sqrt{10}$$

$$\cos Q = \frac{m^2 + m^2 - x^2}{2m^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{20 - x^2}{20} = \frac{4}{5}$$

$100 - 5x^2 = 80$

$x^2 = 4$

$x = 2$

Jadi, $PQ = 2$

8. Jawaban : 2

Syarat $\frac{20-x^2}{1-x} \geq 0$

$\frac{(\sqrt{20}+x)(\sqrt{20}-x}{1-x} \geq 0$

Pembuat nol

$x = -\sqrt{20},\ x = \sqrt{20},\ x = 1$

Syarat penyebut $x \neq 1$

Jadi, $-\sqrt{20} \leq x \leq 1$ atau $x \geq \sqrt{20}$

a) untuk $x \geq \sqrt{20}$

$x + 1 + \frac{19}{x-1} = \frac{20-x^2}{1-x}$

$\frac{x^2-1+19}{x-1} = \frac{20-x^2}{1-x}$

$\frac{x^2+18}{x-1} = \frac{x^2-20}{x-1}$

$18 = 20$ (TM)

b) untuk $-1 \leq x < 1$

$x + 1 + \left(\frac{19}{-(x-1)}\right) = \frac{20-x^2}{1-x}$

$\frac{x^2-1-19}{x-1} = \frac{20-x^2}{1-x}$

$\frac{x^2-20}{x-1} = \frac{x^2-20}{x-1}$

$-20 =- 20$

c) untuk $-\sqrt{20} \leq x <- 1$

$-(x+1) - \left(\frac{19}{-(x-1)}\right) = \frac{20-x^2}{1-x}$

$\frac{-x^2+1-19}{x-1} = \frac{20-x^2}{1-x}$

$\frac{-x^2-18}{x-1} = \frac{x^2-20}{x-1}$

$-18 =- 20$ (TM)

Jadi, penyelesaian $-1 \leq x < 1$ atau dituliskan [-1,1)

Maka a = -1 dan b = 1 sehingga b - a = 1 - (-1) = 2

9. Jawaban : 10

Klaim. Tidak ada nilai n yang memenuhi dengan $n > 5$.

Tinjau bahwa $b = n - a$ dengan $a,b \leq n - 1$. Demikian haruslah

$$a^2 + b^2 = a^2 + (n-a)^2 = a^2 + n^2 - 2an + a^2 = 2a^2 - 2an + n^2$$

bilangan prima. Tinjau modulo 5.

$$2a^2 - 2an + n^2 \equiv 2a^2 + n^2 + 3an \pmod 5$$

a) Jika $n \equiv 0 \pmod 5$, maka

$2a^2 + n^2 + 3an \equiv 2a^2 \pmod 5$

Untuk $a \equiv 0 \pmod 5$ menyebabkan $2a^2 + n^2 - 2an$ bukan bilangan prima. Sehingga untuk $n \equiv 0 \pmod 5$ tidak memenuhi.

b) Jika $n \equiv 1 \pmod 5$, maka

$2a^2 + n^2 + 3an \equiv 2a^2 + 3a + 1 \pmod 5$

Untuk $a \equiv 4 \pmod 5$, maka

$$2a^2 + 3a + 1 \equiv 32 + 12 + 1 \equiv 45 \equiv 0 \pmod 5$$

Sehingga ada nilai a yang menyebabkan $2a^2 - 2an + n^2$ bukan bilangan prima.

c) Untuk $n \equiv 2 \pmod 5$, maka

$$2a^2 + n^2 + 3an \equiv 2a^2 + 4 + 6a \pmod 5$$

Untuk $a \equiv 3 \pmod 5$, maka

$$2a^2 + 6a + 4 \equiv 18 + 18 + 4 \equiv 40 \equiv 0 \pmod 5$$

Sehingga ada nilai a yang menyebabkan $2a^2 - 2an + n^2$ bukan bilangan prima.

d) Untuk $n \equiv 3 \pmod 5$, maka

$$2a^2 + n^2 + 3an \equiv 2a^2 + 9 + 9a \pmod 5$$

Untuk $a \equiv 1 \pmod 5$, maka

$$2a^2 + 9a + 9 \equiv 2 + 9 + 9 \equiv 20 \equiv 0 \pmod 5$$

Sehingga ada nilai a yang menyebabkan $2a^2 - 2an + n^2$ bukan bilangan prima.

e) Untuk $n \equiv 4 \pmod 5$, maka

$$2a^2 + n^2 + 3an \equiv 2a^2 + 16 + 12a \pmod 5$$

Untuk $a \equiv 1 \pmod 5$, maka

$$2a^2 + 12a + 16 \equiv 2 + 12 + 16 \equiv 30 \equiv 0 \pmod 5$$

Sehingga ada nilai a yang menyebabkan $2a^2 - 2an + n^2$ bukan bilangan prima.

Demikian untuk $n > 5$ tidak ada nilai n yang memenuhi sehingga setiap pasangan bilangan asli (a,b) sehingga $a^2 + b^2$ bilangan prima.

Demikian haruslah $n \leq 5$. Dengan mencoba semua kemungkinan nilai n, kita peroleh nilai n yang memenuhi adalah $n = 2,3,5$.

Jadi, jumlah semua nilai n yang memenuhi adalah 2 + 3 + 5 = 10.

10. Jawaban : 61

Misalkan banyak anggota komite tersebut dihadiri oleh n orang.

Misalkan terdapat komite A dan B sedang mengikuti rapat bersama. Banyak cara memilih 2 orang dari 10 orang tersebut adalah $\binom{10}{2}$. Karena ada 40 rapat, maka minimal ada

$$40\binom{10}{2} = 40 \cdot 45 = 1800$$

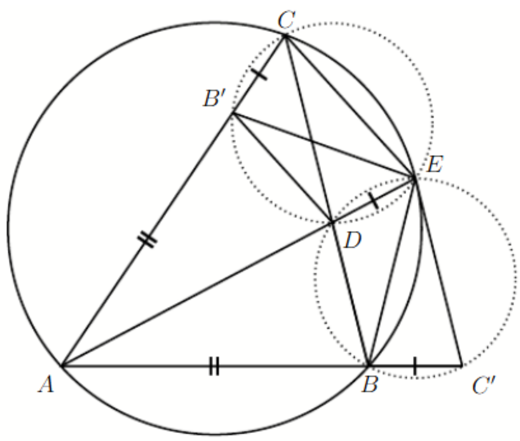
Sehingga haruslah

$$\binom{n}{2} \geq 1800 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \geq 1800$$

yang ekuivalen dengan $n(n-1) \geq 3600$. Cek $n = 61$, maka $n(n-1) = 3660$ dan $n = 60$ menghasilkan $n(n-1) = 3540$. Demikian nilai n terkecil haruslah $n = 61$.

11. Jawaban : 76

Karena $AC = AB + DE$, maka $AC > AB$. Misalkan C' pada sinar AB sehingga panjang $AC'' = AC$ dan B' pada AC sehingga $AB' = AB$. Tinjau bahwa panjang $BC' = DE = B'C$.



Klaim(1). Segitiga ACE kongruen dengan segitiga $AC'E$ dan segitiga $AB'D$ kongruen dengan segitiga ABD.

Diketahui bahwa AD garis bagi $\angle BAC$. Misalkan $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$. Karena panjang $BC = B'A$, $\angle BAD = \angle B'AD = \alpha$, dan $AD = AD$, maka segitiga $AB'D$ kongruen dengan segitiga

ABD (sisi-sudut-sisi). Karena panjang $C'A = CA$, $\angle C'AE = \angle CAE = \alpha$, dan $AE = AE$, maka segitiga $AC'E$ kongruen dengan segitiga ACE (sisi-sudut-sisi). Terbukti.

Dari klaim(1), kita peroleh bahwa panjang $BD = B'D$ dan panjang $C'E = CE$. Sehingga kita peroleh bahwa $B'DEC$ kongruen dengan $BDEC'$. Akibatnya, kita dapatkan $\angle EB'D = \angle EBD$. Tinjau bahwa dari hubungan sudut keliling, kita peroleh

$$\angle EB'D = \angle EBD = \angle EBC = \angle EAC = \alpha$$

dan juga

$$\angle ECD = \angle ECB = \angle EAB = \alpha$$

Karena $\angle EB'D = \angle ECD = \alpha$, demikian $B'DEC$ merupakan segiempat tali busur.

Karena $B'DEC$ dan $BDEC'$ kongruen, maka $BDEC'$ juga segiempat tali busur.

Klaim(2). BD sejajar dengan $C'E$ dan $B'D$ sejajar dengan $C'E$.

Tinjau segiempat tali busur $BDEC'$. Menurut power of point, maka

$$AD \cdot AE = AB \cdot AC'$$

$$AD \cdot (AD + DE) = AB \cdot (AB + BC')$$

$$AD^2 + AD \cdot DE = AB^2 \cdot AB \cdot BC'$$

$$AD^2 - AB^2 = AB \cdot BC' - AD \cdot DE$$

$$(AD + AB)(AD - AB) = AB \cdot B'C - AD \cdot B'C$$

$$(AD + AB)(AD - AB) = B'C(AB - AD)$$

Jika $AD \neq AB$, akibatnya AD + AB = $-\ B'C$ yang jelas tidak mungkin. Demikian haruslah AD = AB yang berakibat $\angle ADB = \angle ABD$. Karena $BDEC'$ segiempat tali busur, maka

$$\angle ABD = \angle DEC' \text{ dan } BC'E = \angle ADB$$

yang menyimpulkan $\angle BC'E = \angle DEC' = \angle ABD = \angle ADB$. Karena

$$\angle ABD = \angle AD'E \text{ dan } ADB = \angle AEC'$$

Maka BD sejajar dengan EC'. Dengan cara yang sama pada $DB'CE$, kita peroleh $B'D$ sejajar dengan CE.

Tinjau kembali bahwa $\angle DAB' = \alpha$. Maka

$$\angle AB'D = \angle ADB' = 90^o - \frac{\alpha}{2}$$

Karena $B'D$ sejajar dengan CE, maka kita peroleh

$$\angle ACE = \angle AB'D = 90^o - \frac{\alpha}{2}$$

Tinjau kembali bahwa $\angle DCE = \alpha$. Maka kita peroleh

$$\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE = 90^o - \frac{\alpha}{2} - \alpha = 90^o - \frac{3\alpha}{2}$$

Sedangkan, kita tahu bahwa $\angle ACD = \angle ACB = 48^o$. Demikian

$$48^o = 90^o - \frac{3\alpha}{2}$$

$$48^o - 90^o = -\frac{3\alpha}{2}$$

$$-42^o = -\frac{3\alpha}{2}$$

$$-42^o \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \alpha$$

$$\alpha = 28^o$$

Demikian kita peroleh $\angle BAC = 2\alpha = 2 \cdot 28^o = 56^o$. Demikian

$$\angle ABC = 180^o - \angle BAC - \angle ACB = 180^o - 56^o - 48^o = 76^o$$

Jadi, $\angle ABC = 76^o$.

12. Jawaban : 3, 43, 163

Perhatikan bahwa persamaan soal ekuivalen dengan

$$(n + p)(n - 1)(m - 1) = 2020 - m$$

Karena ruas kiri habis dibagi (m - 1), maka haruslah ruas kanan habis dibagi (m - 1) juga. Demikian (m - 1) | (2020 - m) yang berarti

$$\frac{2020-m}{m-1} = -\frac{m-2020}{m-1} = \frac{(m-1)-2019}{m-1} = -\left(1 - \frac{2019}{m-1}\right) = -1 + \frac{2019}{m-1}$$

bilangan bulat. Demikian haruslah (m - 1) | 2019. Demikian m - 1 = 1, 3, 673, 2019 yang berarti m = 2, 4, 674, 2020.

Kasus 1.

Jika m = 2, maka

$$(n+p)(n-1)(2-1) = 2020-2$$

$$(n+p)(n-1)\cdot 1 = 2018$$

$$(n+p)(n-1) = 2018$$

$$(n+p)(n-1) = 2\cdot 1009$$

Tinjau bahwa $n + p > n - 1$.

- Jika $n + p = 2018$ dan $n - 1 = 1$, maka $n = 2$ yang berarti $p = 2018 - n = 2018 - 2 = 2016$. Tidak memenuhi.
- Jika $n + p = 1009$ dan $n - 1 = 2$, maka $n = 3$ yang berarti $p = 1009 - n = 1009 - 3 = 1006$. Tidak memenuhi.

Demikian dalam kasus ini tidak ada bilangan prima p yang memenuhi.

Kasus 2:

Jika m = 4, maka

$$(n+p)(n-1)(4-1) = 2020-4$$

$$(n+p)(n-1)\cdot 3 = 2016$$

$$(n+p)(n-1) = 672$$

$$(n+p)(n-1) = 2^5\cdot 3\cdot 7$$

Tinjau bahwa $n + p > n - 1$.

- Jika $n + p = 672$ dan $n - 1 = 1$, maka $n = 2$ yang berarti

  $p = 672 - n = 672 - 2 = 670$

  Tidak memenuhi.
- Jika $n + p = 336$ dan $n - 1 = 2$, maka $n = 3$ yang berarti

  $p = 336 - n = 336 - 3 = 333$

  Tidak memenuhi.
- Jika $n + p = 224$ dan $n -1 = 3$, maka $n = 4$ yang berarti

  $p = 224 - n = 224 - 4 = 220$

  Tidak memenuhi.
- Jika $n + p = 168$ dan $n - 1 = 4$, maka $n = 5$ yang berarti

  $p = 168 - n = 168 - 5 = 163$

  Memenuhi. Cek kembali, untuk $p = 163$ didapatkan pasangan $(m,n) = (4,5)$.
- Jika $n + p = 112$ dan $n - 1 = 6$, maka $n = 7$ yang berarti

  $p = 112 - n = 112 - 7 = 105$

  Tidak memenuhi.
- Jika $n + p = 96$ dan $n - 1 = 7$, maka $n = 8$ yang berarti

  $p = 96 - n = 96 - 8 = 88$

  Tidak memenuhi.
- Jika $n + p = 84$ dan $n - 1 = 8$, maka $n = 9$ yang berarti

  $p = 84 - n = 84 - 9 = 75$

  Tidak memenuhi.
- Jika $n + p = 56$ dan $n - 1 = 12$, maka $n = 13$ yang berarti

  $p = 56 - n = 56 - 13 = 43$

Memenuhi. Cek kembali, untuk $p = 43$ didapatkan pasangan $(m,n) = (4,13)$.

- Jika $n + p = 48$ dan $n - 1 = 14$, maka $n = 15$ yang berarti

  $p = 48 - n = 48 - 15 = 33$

  Tidak memenuhi.

- Jika $n + p = 42$ dan $n - 1 = 16$, maka $n = 17$ yang berarti

  $p = 42 - n = 42 - 17 = 25$

  Tidak memenuhi.

- Jika $n + p = 32$ dan $n - 1 = 21$, maka $n = 22$ yang berarti

  $p = 32 - n = 32 - 22 = 10$

  Tidak memenuhi.

- Jika $n + p = 28$ dan $n - 1 = 24$, maka $n = 25$ yang berarti

  $p = 28 - n = 28 - 25 = 3$

  Memenuhi. Cek kembali, untuk $p = 3$ didapatkan pasangan $(m,n) = (4,25)$.

Demikian untuk kasus ini diperoleh $p = 3, 43, 163$.

Kasus 3.

Jika $m = 674$, maka

$(n + p)(n - 1)(674 - 1) = 2020 - 674$

$(n + p)(n - 1) \cdot 673 = 1346$

$(n + p)(n - 1) = 2$

Maka haruslah $n + p = 2$ dan $n - 1 = 1$. Demikian $n = 2$ yang berarti

$$p = 2 - n = 2 - 3 =- 1$$

Tidak memenuhi.

Kasus 4.

Jika $m = 2020$, maka

$(n + p)(n - 1)(2020 - 1) = 2020 - 2020$

$(n + p)(n - 1) \cdot 2019 = 0$

$(n + p)(n - 1) = 0$

Demikian haruslah $n = 1$, tetapi $n > 1$ yang berarti tidak memenuhi.

Jadi, semua bilangan prima p yang memenuhi 3, 43, 163.

13. Jawaban : 9

Tinjau bahwa

$$P(x) - P(x - 2) = 6x^2 - 8x$$

Misalkan $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Maka

$$P(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$$

Tinjau bahwa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$P(x - 2) = a_n (x - 2)^n + a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1 (x - 2) + a_0$$

$$\underline{\hspace{10cm}} \; -$$

$$P(x) - P(x - 2) = a_n \left(x^n - (x - 2)^n\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - (x - 2)^{n-1}\right) + ... + a_1 (x - (x - 2))$$

$$6x^2 - 8x = a_n \left(x^n - (x - 2)^n\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - (x - 2)^{n-1}\right) + ... + a_1 (x - (x - 2))$$

Tinjau bentuk $a_i \left(x^i - (x - 2)^i\right)$. Dengan Binomial Newton, kita peroleh

$$(x - 2)^i = \binom{i}{0} x^i + \binom{i}{1} x^{i-1}(-2) + \binom{i}{2} x^{i-2}(-2)^2 + ... + \binom{i}{i}(-2)^i$$

yang berarti

$$x^i - (x - 2)^i = -\binom{i}{1} x^{i-1}(-2) - \binom{i}{2} x^{i-2}(-2)^2 - ... - \binom{i}{i}(-2)^i$$

Demikian bentuk

$$a_n\left(x^n - (x-2)^n\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - (x-2)^{n-1}\right) + \ldots + a_1(x - (x-2))$$

berderajat n - 1. Karena $6x^2 - 8x$ berderajat 2, maka haruslah $n = 3$.

$$P(x) - P(x-2) = a_3\left(x^3 - (x-2)^3\right) + a_2\left(x^2 - (x-2)^2\right) + a_1(x - (x-2))$$

$$6x^2 - 8x = a_3\left(6x^2 - 12x + 8\right) + a_2(4x - 4) + 2a_1$$

$$6x^2 - 8x = 6a_3x^2 - 12a_3x + 8a_3 + 4a_2x - 4a_2 + 2a_1$$

$$6x^2 - 8x = 6a_3x^2 - (12a_3 - 4a_2)x + (8a_3 - 4a_2 + 2a_1)$$

Demikian haruslah persamaan berikut memenuhi

$$6a_3 = 6 \qquad (1)$$

$$12a_3 - 4a_2 = 8 \qquad (2)$$

$$8a_3 - 4a_2 + 2a_1 = 0 \qquad (3)$$

Dari persamaan (1), kita peroleh $a_3 = 1$. Dari persamaan (2), kita dapatkan

$$4a_2 = 12a_3 - 8 = 12 \cdot 1 - 8 = 12 - 8 = 4$$

yang berarti $a_2 = 1$. Dari persamaan (3), kita peroleh

$$2a_1 = 0 - 8a_3 + 4a_2 = 0 - 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 0 - 8 + 4 = -4$$

yang berarti $a_1 = -2$. Tinjau bahwa $P(1) = 1$ yang berarti

$$1 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 + 1 - 2 + a_0 = 0 + a_0 = a_0$$

yang berarti $a_0 = 1$. Demikian kita peroleh bahwa

$$P(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$$

Demikian kita peroleh

$$P(2) = 2^3 + 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 8 + 4 - 4 + 1 = 9$$

Jadi, nilai dari $P(2)$ adalah 9.

14. Jawaban : 102

Karena $x \leq y \leq z$, maka $x + y + z \geq 3x$ yang berarti $32 \geq 3x$. Karena x bilangan asli, maka $10 \geq x$.

- Untuk $x = 0$, maka $y + z = 32$. Sehingga kita peroleh

  $(y, z) = (0, 32), (1, 31), (2, 30), \dots, (16, 16)$

  yang berarti ada 17 pasangan.

- Untuk $x = 1$, maka $y + z = 31$. Sehingga kita peroleh

  $(y, z) = (1, 30), (2, 29), (3, 28), \dots, (15, 16)$

  yang berarti ada 15 pasangan.

- Untuk $x = 2$, maka $y + z = 30$. Sehingga kita peroleh

  $(y, z) = (2, 28), (3, 27), (4, 26), \dots, (15, 15)$

  yang berarti ada 14 pasangan.

- Untuk $x = 3$, maka $y + z = 29$. Sehingga kita peroleh

  $(y, z) = (3, 26), (4, 25), (5, 24), \dots, (14, 15)$

  yang berarti ada 12 pasangan.

- Untuk $x = 4$, maka $y + z = 28$. Sehingga kita peroleh

  $(y, z) = (4, 24), (5, 23), (6, 22), \dots, (14, 14)$

  yang berarti ada 11 pasangan.

- Untuk $x = 5$, maka $y + z = 27$. Sehingga kita peroleh

  $(y, z) = (5, 22), (6, 21), (7, 20), \dots, (13, 14)$

yang berarti ada 9 pasangan.

- Untuk $x = 6$, maka $y + z = 26$. Sehingga kita peroleh

  $(y, z) = (6, 20), (7, 19)(8, 18), \ldots, (13, 13)$

  yang berarti ada 8 pasangan.

- Untuk $x = 7$, maka $y + z = 25$. Sehingga kita peroleh

  $(y, z) = (7, 18), (8, 17), (9, 16), \ldots, (12, 13)$

  yang berarti ada 6 pasangan.

- Untuk $x = 8$, maka $y + z = 24$. Sehingga kita peroleh

  $(y, z) = (8, 16), (9, 15), (10, 14), (11, 13), (12, 12)$

  yang berarti ada 5 pasangan.

- Untuk $x = 9$, maka $y + z = 23$. Sehingga kita peroleh

  $(y, z) = (9, 14), (10, 13), (11, 12)$

  yang berarti ada 3 pasangan.

- Untuk $x = 10$, maka $y + z = 22$. Sehingga kita peroleh

  $(y, z) = (10, 12), (11, 11)$

  yang berarti ada 2 pasangan.

Demikian total pasangan (x,y,z) adalah

$$17 + 15 + 14 + 12 + 11 + 9 + 8 + 6 + 5 + 3 + 2 = 102$$

15. Jawaban : 9/10

Diketahui bahwa [ABC] = 20[PQR] dan

$$[ARQ] + [BRP] + [QPC] = \frac{19}{20}[ABC] \qquad (1)$$

Misalkan $\frac{AQ}{AC} = a, \frac{BR}{BA} = b$ dan $\frac{CP}{CB} = c$. Maka $a + b + c = 1$. Kuadratkan, kita peroleh

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 1$$

yang ekuivalen dengan

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2(ab + bc + ac)$$

Tinjau bahwa

$$\frac{[ARQ]}{[ARC]} = \frac{AQ}{AC} = a, \quad \frac{[BPR]}{[BPA]} = \frac{BR}{BA} = b, \quad \frac{[QCP]}{[BQC]} = \frac{CP}{CB} = c$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{[ARC]}{[ABC]} = \frac{AR}{AB} = \frac{AB-BR}{AB} = 1 - \frac{BR}{AB} = 1 - b$$

yang berarti [ARC] = (1 - b)[ABC]. Dengan cara yang sama, kita peroleh

$$[APB] = (1 - c)[ABC] \text{ dan } [BQC] = (1 - a)[ABC]$$

Tinjau bahwa $[ARQ] = a \cdot [ARC]$. Demikian kita peroleh

$$[ARQ] = a \cdot [ARC] = a \cdot (1 - b)[ABC] = (a - ab)[ABC]$$

Dengan cara yang sama, kita peroleh juga

$$[BPR] = (b - bc)[ABC] \text{ dan } [QCP] = (c - ac)[ABC]$$

Tinjau persamaan (1)

$$[ARQ] + [BRP] + [QPC] = \frac{19}{20}[ABC]$$

$$(a - ab)[ABC] + (b - bc)[ABC] + (c - ac)[ABC] = \frac{19}{20}[ABC]$$

$$a - ab + b - bc + c - ac = \frac{19}{20}$$

$$(a + b + c) - (ab + bc + ac) = \frac{19}{20}$$

$$1 - (ab + bc + ac) = \frac{19}{20}$$

$$ab + bc + ac = 1 - \frac{19}{20}$$

$$ab + bc + ac = \frac{1}{20}$$

Demikian kita peroleh

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2(ab + bc + ac) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{20} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

Jadi, nilai dari $\left(\frac{AQ}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BR}{BA}\right)^2 + \left(\frac{CP}{CB}\right)^2$ adalah $\frac{9}{10}$

16. Jawaban : 2

Tinjau bahwa

$$a^2 < b = a^2 + 1 < (a + 1)^2$$

yang berarti b bukan bilangan kuadrat sempurna. Dengan alasan yang sama, maka c dan d juga bukan kuadrat sempurna. Akibatnya, $\tau(b), \tau(c)$, dan $\tau(d)$ masing-masing bernilai genap. Sehingga

$$\tau(b) + \tau(c) + \tau(d)$$

bernilai genap. Karena $\tau(a) + \tau(b) + \tau(c) + \tau(d)$ bernilai ganjil, dapat disimpulkan bahwa $\tau(a)$ harus bernilai ganjil. Demikian dapat disimpulkan bahwa a merupakan bilangan kuadrat sempurna.

- Jika $a = 1$, maka $b = 2$, $c = 5$, dan $d = 26$. Kita peroleh kwartet $(a,b,c,d) = (1,2,5,26)$.
- Jika $a = 4$, maka $b = 17$, $c = 230$ dan $d = 52.900$. Kita peroleh kwartet $(a,b,c,d) = (4, 17, 230, 52.900)$.
- Jika $a = 9$, maka $b = 82$, $c = 6.724$ dan $d = 45.212.177$. Karena haruslah $a,b,c,d < 10^6$, maka tidak ada kwartet (a,b,c,d) yang memenuhi. Dapat disimpulkan bahwa untuk $a \geq 9$ tidak ada kwartet (a,b,c,d) yang memenuhi.

Jadi, banyak kwartet (a,b,c,d) yang memenuhi adalah 2.

17. Jawaban : 1/6

Tinjau bahwa $ab \geq 0$. Maka $4ab \geq 3ab$. Kita peroleh

$$ab + 2ac = \frac{3ab+6ac}{3} \leq \frac{4ab+6ac}{3} = \frac{2a(2b+3c)}{3} = \frac{2a(1-a)}{3} = \frac{2a-2a^2}{3}$$

Tinjau bahwa $f(x) = ax^2 + bx + c$ jika $a < 0$ memiliki nilai maksimum

$$\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Demikian nilai maksimum dari $-\ 2a^2 + 2a$ adalah

$$\frac{4(-2)(0)-2^2}{4(-2)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

Sehingga kita peroleh

$$\frac{2a-2a^2}{3} \leq \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

Jadi, kita dapatkan

$$ab + 2ac \leq \frac{1}{6}$$

Jadi, nilai maksimum dari $ab + 2ac$ adalah $\frac{1}{6}$. Kesamaaan saat $a = \frac{1}{2}, b = 0$ dan $c = \frac{1}{6}$

18. Jawaban : 726

Misalkan $n + 3 = k^2$ untuk suatu bilangan bulat k. Maka $n = k^2 - 3$. Demikian

$$2020n + 1 = 2020(k^2 - 3) + 1 = 2020k^2 - 6060 + 1 = 2020k^2 - 6059$$

Diketahui $2020n + 1$ kuadrat sempurna, misalkan $2020n + 1 = m^2$ dengan m bilangan ganjil. Tinjau mod 2020. Kita peroleh

$$m^2 \equiv 1 \pmod{2020}$$

Tinjau bahwa $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$. Demikian

$$m^2 \equiv 1 \quad (mod\ 4), \quad m^2 \equiv 1 \quad (mod\ 5), \quad m^2 \equiv 1 \quad (mod\ 101)$$

Sehingga kita peroleh

$$m \equiv 1, 3 \quad (mod\ 4), \ m \equiv 1, 4 \quad (mod\ 5), \ m \equiv 1, 100 \quad (mod\ 101)$$

Misalkan

$$m \equiv r_1 \quad (mod\ 4), \quad m \equiv r_2 \quad (mod\ 5), \quad m \equiv r_3 \quad (mod\ 101)$$

dimana $r_1 \in \{1, 4\}$, $r_2 \in \{1, 4\}$, dan $r_3 \in \{1, 100\}$. Kita gunakan Chinese Remainder Theorem.

Tuliskan $D = 4 \cdot 5 \cdot 101 = 2020$

Tuliskan

$$d_1 = \frac{D}{4} = 505, \quad d_2 = \frac{D}{5} = 404, \quad d_3 = \frac{D}{101} = 20$$

Misalkan z_1, z_2, z_3 merupakan bilangan asli terkecil sehingga

$$z_1 d_1 \equiv 1 \pmod 4, \quad z_2 d_2 \equiv 1 \pmod 5, \quad z_3 d_3 \equiv 1 \pmod{101}$$

Sehingga kita peroleh $z_1 = 1, z_2 = 4$, dan $z_3 = 96$. Maka kita peroleh

$$m \equiv r_1 d_1 z_1 + r_2 d_2 z_2 + r_3 d_2 z_3 \pmod D$$

$$\equiv r_1 \cdot 505 \cdot 1 + r_2 \cdot 404 \cdot 4 + r_3 \cdot 20 \cdot 96 \pmod{2020}$$

$$m \equiv 505 r_1 + 1616 r_2 + 1920 r_3 \pmod{2020}$$

Dengan mensubtitusikan semua kemungkinan nilai r_1, r_2, r_3, kita peroleh bahwa

$$m \equiv 1, 201, 809, 1009, 1011, 1211, 1819, 2019 \pmod{2020}$$

Kita coba satu per satu, ternyata $m = 1211$ memenuhi. Sehingga kita peroleh $k = 27$.

Demikian

$$n = 27^2 - 3 = 729 - 3 = 726$$

Jadi, nilai n terkecil adalah 726.

19. Jawaban : 17/32

Kita dapat menggunakan komplemen. Komplemen dari kejadian tersebut yaitu salah satu tim selalu menang atau salah satu tim selalu kalah. Setiap bertanding sebanyak 4 kali. Peluang salah satu tim selalu menang dalam permainan tersebut adalah $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$. Kita dapat memilih 1 tim dari 5 tim yang ada, sehingga peluangnya adalah

$$\binom{5}{1} \cdot \frac{1}{16} = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

Dengan cara yang sama, maka peluang salah satu tim selalu kalah adalah $\frac{5}{16}$. Tetapi, ada kejadian dimana terdapat tim yang selalu menang dan tim yang lain yang selalu kalah. Andaikan tim tersebut adalah tim A dan tim B. Maka tim A mengalami kemenangan sebanyak 4 kali dan tim B mengalami kekalahan sebanyak 4 kali. Sehingga ada 7 pertandingan yang dialami oleh tim A dan tim B. Maka peluangnya adalah $\frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$.

Karena kita dapat memilih 2 tim dari 5 tim yang sesuai dengan kondisi tersebut, maka peluangnya adalah

$$P_2^5 \cdot \frac{1}{128} = 20 \cdot \frac{1}{128} = \frac{5}{32}$$

karena kejadian tim A menang dan tim B kalah dengan tim A kalah dan tim B menang merupakan kejadian yang berbeda (dengan kata lain, hal ini memperhatikan urutan).

Demikian peluang terdapat satu tim yang selalu menang atau satu tim yang selalu kalah adalah

$$\frac{5}{16} + \frac{5}{16} - \frac{5}{32} = \frac{10+10-5}{32} = \frac{15}{32}$$

Sehingga peluang bahwa setiap tim menang minimal sekali dan kalah minimal sekali adalah

$$1 - \frac{15}{32} = \frac{32-15}{32} = \frac{17}{32}$$

20. Jawaban : $\sqrt{11}$

Misalkan AH memotong BC di titik D dan CH memotong AB di titik E. Misalkan panjang $AE = x$, $BE = y$, dan $HE = z$.

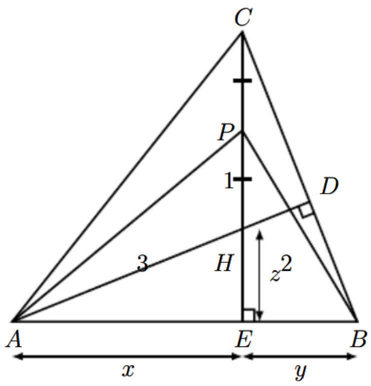
Misalkan $\angle EAH = \alpha$. Maka kita peroleh

$$\angle DHC = \angle AHE = 90^o - \angle EAH = 90^o - \alpha$$

Sehingga kita peroleh

$$\angle ECB = \angle HCD = 90^o - \angle DHC = 90^o - (90^o - \alpha) = 90^o - 90^o + \alpha = \alpha$$

Demikian kita peroleh $\angle EBC = 90^o - \angle ECB = 90^o - \alpha$.



Karena $\angle CEB = \angle EAH = \alpha, \angle AEH = \angle BEC$, dan $\angle ABC = \angle EHA = 90^o - \alpha$, maka segitiga AEH sebangun dengan segitiga CEB. Akibatnya,

$$\frac{HE}{AE} = \frac{EB}{CE} \Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{y}{2+z}$$

Dengan mengalikan silang, kita peroleh $xy = z(2 + z) = 2z + z^2$. Sedangkan, kita tahu bahwa

$$AB^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

Perhatikan segitiga AEP, dengan phytagoras kita dapatkan

$$AP^2 = AE^2 + PE^2 \Rightarrow 9 = x^2 + (1 + z)^2$$

yang ekuivalen dengan

$$x^2 = 9 - (1 + z)^2 = 9 - (1 + 2z + z^2) = 9 - 1 - 2z - z^2 = 8 - 2z - z^2$$

Perhatikan segitiga BEP, dengan phytagoras kita dapatkan

$$BP^2 = BE^2 + PE^2 \Rightarrow 4 = y^2 + (1 + z)^2$$

yang ekuivalen dengan

$$y^2 = 4 - (1 + z)^2 = 4 - (1 + 2z + z^2) = 4 - 1 - 2z - z^2 = 3 - 2z - z^2$$

Subtitusiakan ke persamaan (1). Kita peroleh

$$AB^2 = x^2 + y^2 + 2yz$$

$$= 8 - 2z - z^2 + 3 - 2z - z^2 + 2(2z + z^2)$$

$$= 11 - 4z - 2z^2 + 4z + 2z^2$$

$$= 11$$

$$AB = \sqrt{11}$$

Jadi, panjang AB adalah $\sqrt{11}$.