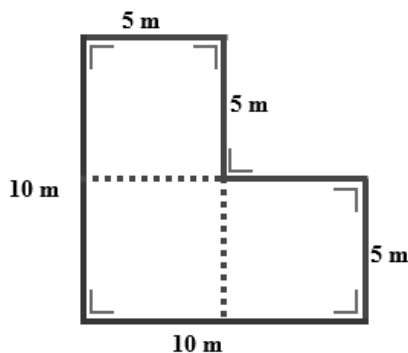


PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2019

1. **Jawaban : 75**



$$\begin{aligned} L &= 3 \times L \\ &= 3 \times 5 \times 5 \\ &= 3 \times 25 \\ &= 75 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

2. **Jawaban : Jam 03:21**

$$2019 \text{ menit} = 33 \times 60 \text{ menit} + 39 \text{ menit}$$

$$2019 \text{ menit} = 33 \text{ jam} + 39 \text{ menit}$$

$$2019 \text{ menit} = 24 \text{ jam} + 9 \text{ jam} + 39 \text{ menit}$$

$$2019 \text{ menit} = 1 \text{ hari} + 9 \text{ jam} + 39 \text{ menit}$$

Sekarang pukul 13:00 maka 2019 menit yang lalu pukul?

$$= \text{Pukul } 13.00 - 1 \text{ hari} - 9 \text{ jam} - 39 \text{ menit}$$

$$= \text{Pukul } 13.00 - 9 \text{ jam} - 39 \text{ menit}$$

$$= \text{pukul } 04.00 - 39 \text{ menit}$$

$$= \text{pukul } 03.00 + 60 \text{ menit} - 39 \text{ menit}$$

$$= \text{pukul } 03.00 + 21 \text{ menit}$$

$$= \text{pukul } 03.21$$

3. **Jawaban : 218**

$$x^2 - 111x + k = 0 \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$



$$x_1 + x_2 = 111$$

$$x_1 \cdot x_2 = k$$

dari $x_1 + x_2 = 111$ dengan x_1 dan x_2 bilangan prima, bilangan ganjil hanya diperoleh dari penjumlahan bilangan berbeda paritas.

Maka, salah satu x_1 atau x_2 adalah bilangan prima genap yaitu 2.

Untuk $x_1 = 2$, maka $x_2 = 109$. Jadi, $k = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 109 = 218$

4. **Jawaban :** $\frac{15}{16}$

$P(A)$ = Peluang Ani menang

$P(B)$ = Peluang Banu menang

$$P(A) + P(B) = 1$$

Agar Banu memenangkan permainan, maka Banu membutuhkan 4 kali menang dimana peluang 1 kali menang adalah $\frac{1}{2}$, maka:

$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(A) = 1 - P(B)$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

5. **Jawaban : 1011**

$$a + 2b = 1$$

$$b + 2c = 2 \text{ , kedua ruas dikali } 1009 = 1009b + 2018c = 2018$$

Maka,

$$\begin{array}{r} a + 2b = 1 \\ 1009b + 2018c = 2018 \\ \hline a + 1011b + 2018c = 2019 \end{array}$$





Jadi, $n = 1011$

6. Jawaban : 2

Misal $p = 2\sqrt{2}$, dan $q = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$

$$a = p - q \quad a + b = 2p = 4\sqrt{2}$$

$$b = p + q \quad ab = p^2 - q^2 = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Sehingga, } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab} - 2$$

Maka,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x + y\sqrt{2}$$

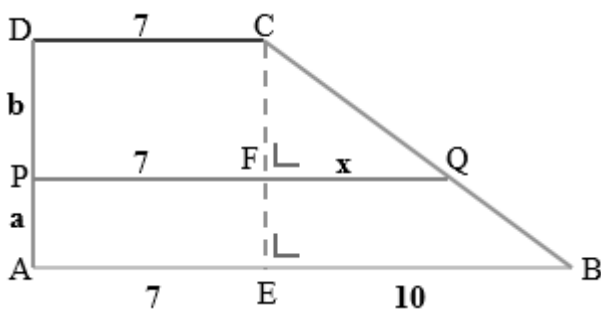
$$\frac{(a+b)^2}{ab} - 2 = x + y\sqrt{2}$$

$$\frac{(4\sqrt{2})^2}{4\sqrt{2}} - 2 = x + y\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} -2 + 4\sqrt{2} &= x + y\sqrt{2} \Rightarrow x = -2, y = 4 \\ &\Rightarrow x + y = -2 + 4 = 2 \end{aligned}$$

7. Jawaban : 13

Perhatikan gambar berikut ini.



Diketahui,

Panjang sisi sejajar $a = AB = 17$

Panjang sisi sejajar $b = DC = 7$



Maka,

$$\begin{aligned}\text{Panjang } PQ &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{17^2+7^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{338}{2}} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13\end{aligned}$$

Jadi, panjang PQ adalah 13.

8. Jawaban : 604.800

Jika $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = m$ dengan $x_i \geq 0$ maka banyak susunannya dari x_i adalah C_m^{m+n-1} .

Misalkan, setiap bendera tersebut bermotif sama dan tiang bendera t_1, t_2, t_3 dan t_4 , maka banyaknya susunan bendera pada tiang dapat dinyatakan sebagai:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 7 \text{ dengan } t_i > 0$$

Sehingga banyaknya susunan adalah:

$$\begin{aligned}&= C_7^{7+4-1} \\ &= C_7^{10} \\ &= \frac{10!}{7! \cdot (10-7)!} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 120 \text{ susunan.}\end{aligned}$$

Karena setiap bendera ada 7 motif berbeda, banyak susunan motif bendera adalah $7! = 5.040$.
Seluruh susunan adalah $120 \times 5.040 = 604.800$.

9. Jawaban : 12.132

Misalkan:



$$n = \underbrace{aaaaa \dots aaaa}_{\text{sebanyak} \geq 2019}$$
$$n = a(\underbrace{1111 \dots 111}_{\text{sebanyak} \geq 2019})$$

n habis dibagi 126, faktor $126 = 2 \times 9 \times 7$, maka:

n habis dibagi 2, maka nilai $a = \{2, 4, 6, 8\}$

n habis dibagi 9, maka nilai $a = \{6\}$

n habis dibagi 7, maka kita memilih bilangan asli terkecil $111 \dots 111$ yang habis dibagi 7, kita dapat mengujinya satu persatu:

111 tidak habis dibagi 7

1111 tidak habis dibagi 7

11111 tidak habis dibagi 7

111111 habis dibagi 7,

111111 adalah bilangan 6 digit.

$$n = a(\underbrace{1111 \dots 111}_{\text{sebanyak} \geq 2019})$$
$$n = a(\underbrace{1111 \dots 111}_{\text{sebanyak}(6k) \geq 2019})$$

$$6k \geq 2019 \Leftrightarrow k \geq \frac{2019}{6}$$

$k \geq 336,5$ karena k bilangan asli, maka $k = 337$

Banyak angka $1111 \dots 111$ adalah $6k = 6 \times 337 = 2022$, maka:

$$n = 6(\underbrace{1111 \dots 111}_{\text{sebanyak} = 2022})$$
$$n = (\underbrace{6666 \dots 666}_{\text{sebanyak} = 2022})$$

Jumlah angka $= 6 \times 2022 = 12.132$

10. Jawaban : 3

Kasus I:

Misalkan, $x = z$ dengan z bilangan bulat, maka:

$$[2x]^2 = [x] + 7$$





$$(2z)^2 = z + 7$$

$$4z^2 - z + 7 = 0$$

Uji nilai diskriminasi:

$$D = b^2 - 4ac$$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 4(-7) = 113$ bukan merupakan bilangan kuadrat maka z bukan bilangan bulat.

Kasus II:

Misalkan, x bukan bilangan bulat, maka:

$$x = z + p \text{ dengan } z \in \text{jumlah bulatan dan } 0 < p \leq \frac{1}{2}$$

$$x = z + \frac{1}{2} \text{ substitusi ke:}$$

$$[2x]^2 = [x] + 7$$

$$[2(z + \frac{1}{2})]^2 = [z + \frac{1}{2}] + 7$$

$$(2z)^2 = z + 1 + 7$$

$$4z^2 - z - 8 = 0$$

Uji nilai diskriminasi:

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 4(-8) = 129$ bukan merupakan bilangan kuadrat maka z bukan bilangan bulat.

Kasus III:

Misalkan, x bukan bilangan bulat, maka:

$$x = z - p \text{ dengan } z \in \text{jumlah bulatan dan } 0 < p \leq \frac{1}{2}$$

$$x = z - \frac{1}{2} \text{ substitusi ke:}$$

$$[2x]^2 = [x] + 7$$

$$[2(z - \frac{1}{2})]^2 = [z - \frac{1}{2}] + 7$$

$$(2z - 1)^2 = z + 7$$

$$4z^2 - 4z + 1 = z + 7$$





$$4z^2 - 5z - 6 = 0$$

$(4z + 3)(z - 2) = 0$, karena z bilangan bulat maka yang memenuhi adalah $z = 2$.

Untuk $z = 2$ agar x minimal maka:

$$x = z - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1,5 = a$$

Untuk $z = 2$ agar x maksimum maka:

$$x = z - 0 \Leftrightarrow x = 2 = b$$

$$\text{Jadi, } a \cdot b = 1,5 \times 2 = 3$$

11. Jawaban : 11101

$$10^5 = 9 \times 11111 + 1 \quad \Rightarrow 10^5 \equiv 1(\text{mod } 11111)$$

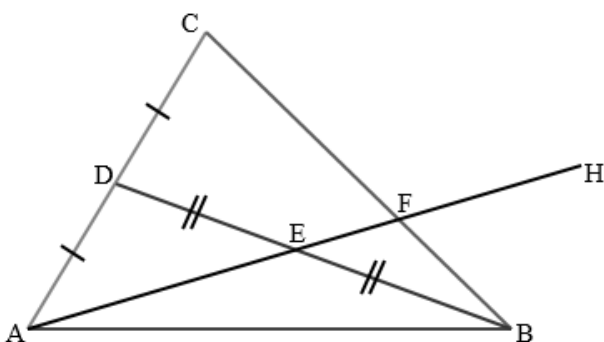
$$\begin{aligned} 1111^2 &= (1110 + 1) \left(\frac{11111-1}{10} \right) \Rightarrow 1111^2 \equiv 10^3(\text{mod } 11111) \\ &= 111 \times 11111 + 1000 \end{aligned}$$

$$11110 = 11111 - 1 \quad \Rightarrow 11110 \equiv (-1)(\text{mod } 11111)$$

$$\begin{aligned} 1111^{2019} &\equiv (1111^2)^{1009} \cdot 1111(\text{mod } 11111) \\ &\equiv (10^3)^{1009} \cdot 1111(\text{mod } 11111) \\ &\equiv (10^{15})^{201} \cdot 10^2 \cdot 1111(\text{mod } 11111) \\ &\equiv 10 \cdot 11110(\text{mod } 11111) \\ &\equiv (-10)(\text{mod } 11111) \\ &\equiv (11101)(\text{mod } 11111) \end{aligned}$$

Jadi, sisa pembagian 1111^{2019} oleh 11111 adalah (-10) atau 11101

12. Jawaban : 2





Berdasarkan Dalil Menelaus:

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CA}{AD} \cdot \frac{DE}{EB} = 1$$

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{2 \times AD}{AD} \cdot \frac{EB}{EB} = 1$$

$$\frac{2BF}{FC} = 1$$

$$FC = 2BF \text{ atau } BC = 3 \times BF$$

Berdasarkan Dalil Menelaus:

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CB}{BF} \cdot \frac{FE}{EA} = 1$$

$$\frac{DC}{DC} \cdot \frac{3 \times BF}{BF} \cdot \frac{FE}{EA} = 1$$

$$\frac{3FE}{EA} = 1$$

$$AE = 3 \times EF$$

$$\begin{aligned} \frac{AF}{FH} &= \frac{AE+EF}{EH-EF} \\ &= \frac{AE+EF}{AE-EF} \\ &= \frac{3 \times EF + EF}{3 \times EF - EF} \\ &= \frac{4 \times EF}{2 \times EF} \\ &= 2 \end{aligned}$$

13. Jawaban : 149

Contoh beberapa bilangan yang diperbolehkan:

22222222, 11212222, 11221122, 11211211

Banyak digit 1 yang diperbolehkan adalah antara 0 sampai 6 buah. Dengan prinsip inklusi-eksklusi dan rumus De Moivre diperoleh:

$$\text{Ada 0 buah digit 1} \Rightarrow a+b+c+d+e+f+g+h+i=0, 0 \leq a,b,c,d,e,f,g,h,i \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{0} = 1$$

$$\text{Ada 1 buah digit 1} \Rightarrow a+b+c+d+e+f+g+h=1, 0 \leq a,b,c,d,e,f,g,h \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{1} = 8$$

$$\text{Ada 2 buah digit 1} \Rightarrow a+b+c+d+e+f+g=2, 0 \leq a,b,c,d,e,f,g \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{2} = 28$$





$$\text{Ada 3 buah digit 1} \Rightarrow a+b+c+d+e+f=3, 0 \leq a,b,c,d,e,f \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{5} - \binom{6}{1} \binom{5}{5} = 50$$

$$\text{Ada 4 buah digit 1} \Rightarrow a+b+c+d+e=4, 0 \leq a,b,c,d,e \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{4} - \binom{5}{1} \binom{5}{4} = 45$$

$$\text{Ada 5 buah digit 1} \Rightarrow a+b+c+d=5, 0 \leq a,b,c,d \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{3} - \binom{4}{1} \binom{5}{3} = 16$$

$$\text{Ada 6 buah digit 1} \Rightarrow a+b+c=6, 0 \leq a,b,c \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{2} - \binom{3}{1} \binom{5}{2} + \binom{3}{2} \binom{2}{2} = 1$$

$$\text{Jadi, banyak bilangan yang dapat dibentuk} = 1 + 8 + 28 + 50 + 45 + 16 + 1 = 149$$

14. Jawaban : 10

$$\begin{aligned} \underbrace{f(f \dots (f(x) \dots))}_{2019 \text{ kali}} &= x \\ \underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)(x)}_{2019 \text{ kali}} &= x \\ \underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)\left(1 + \frac{90}{x}\right)}_{2018 \text{ kali}} &= x \\ \underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)(x)}_{2018 \text{ kali}} &= \frac{90}{x-1} \end{aligned}$$

$$x = \frac{90}{x-1}$$

$$x^2 - x - 90 = 0$$

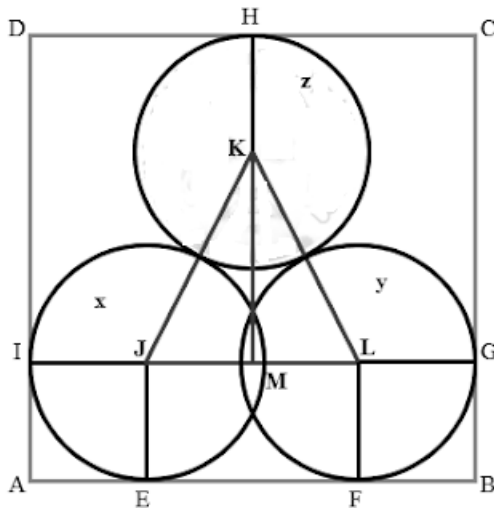
$$(x - 10)(x + 9) = 0$$

$$x = 10 \text{ atau } x = -9$$

Jadi, nilai terbesar x adalah 10.

15. Jawaban : 80





Misalkan jari-jari lingkaran x, y dan z adalah $r = n - \sqrt{m}$, maka : $JL = 4 - 2r$

$$JM = \frac{JL}{2} = 2 - r$$

$$KM = 4 - 2r$$

$$JK = 2r$$

Pada segitiga JMK siku-siku di M berlaku teorema pythagoras:

$$JK^2 = JM^2 + KM^2$$

$$(2r)^2 = (2 - r)^2 + (4 - 2r)^2$$

$$4r^2 = 4 - 4r + r^2 + 16 - 16r + 4r^2$$

$$r^2 - 20r + 20 = 0$$

$$r = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1}$$

$$r = \frac{20 \pm \sqrt{320}}{2}$$

$$r = \frac{20 \pm 8\sqrt{5}}{2}$$

$$r = 10 - 4\sqrt{5}$$

$$n - \sqrt{m} = 10 - \sqrt{80}$$

$$m = 80$$

16. Jawaban : 3



$$\begin{aligned} & n^4 + 16n^3 + 71n^2 + 56n \\ &= n(n^3 + 16n^2 + 71n + 56) \\ &= n(n + 1)(n^2 + 15n + 56) \\ &= n(n + 1)(n + 7)(n + 8) \\ &= n(n + 8)(n + 1)(n + 7) \\ &= (n^2 + 8n)(n^2 + 8n + 7) \text{ merupakan bilangan kuadrat.} \end{aligned}$$

Misalkan : $n^2 + 8n = x$, maka:

$(n^2 + 8n)(n^2 + 8n + 7) = x(x + 7)$ merupakan bilangan kuadrat, kita memperolehnya $x = 9$ atau $x = -16$.

*) Untuk $x = 9$, maka:

$$\begin{aligned} n^2 + 8n &= x \\ n^2 + 8n &= 9 \\ n^2 + 8n - 9 &= 0 \\ (n + 9)(n - 1) &= 0 \\ n &= -9 \text{ atau } n = 1 \end{aligned}$$

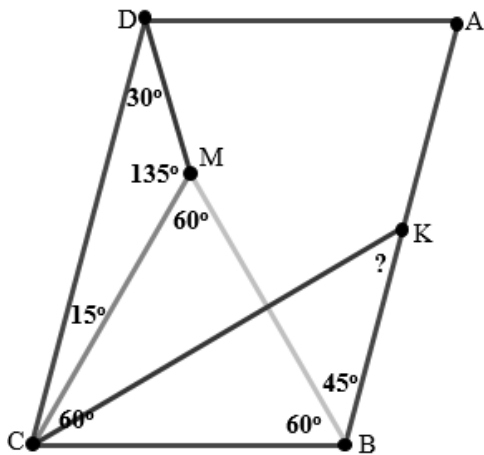
*) Untuk $x = -16$, maka:

$$\begin{aligned} n^2 + 8n &= x \\ n^2 + 8n &= -16 \\ n^2 + 8n + 16 &= 0 \\ (n + 4)(n + 4) &= 0 \\ n &= -4 \end{aligned}$$

Jadi, semua n yang memenuhi adalah $\{-9, -4, 1\}$ sebanyak 3.

17. Jawaban : 45 derajat





Segitiga BMC adalah segitiga sama sisi, maka: $BM = BC = CM = p$

Titik K tengah sisi AB , maka:

$$AK = BK = q \text{ dan } CD = 2q$$

Melihat segitiga CMD , berlaku aturan sinus:

$$\frac{CM}{\sin 30^\circ} = \frac{CD}{\sin 135^\circ}$$

$$\frac{p}{\frac{1}{2}} = \frac{2q}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \Leftrightarrow p = q\sqrt{2}$$

Perhatikan segitiga CBK , berlaku aturan cosinus:

$$KC^2 = BC^2 + BK^2 - 2 \cdot BC \cdot BK \cdot \cos 105^\circ$$

$$KC^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

$$KC^2 = (q\sqrt{2})^2 + q^2 - 2 \cdot q\sqrt{2} \cdot q \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

$$KC^2 = 2q^2 + q^2 - q^2 + q^2\sqrt{3}$$

$$KC^2 = 2q^2 + q^2\sqrt{3}$$

$$KC^2 = q^2(2 + \sqrt{3})$$

$$KC = q\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$KC = q\sqrt{2 + \frac{2}{2}\sqrt{3}}$$

$$KC = q\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$$



$$KC = q \cdot \frac{\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3} \cdot 1}}{\sqrt{2}}$$

$$KC = \frac{q(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$$

$$KC = \frac{q\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}+1}{2}$$

$$KC = \frac{p(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$\text{Luas segitiga } BKC = \frac{1}{4} \times \text{Luas } ABCD$$

$$\frac{1}{2} \cdot BK \cdot KC \cdot \sin \angle BKC = \frac{1}{4} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin 105^\circ$$

$$\frac{1}{2} \cdot q \cdot KC \cdot \sin \angle BKC = \frac{1}{4} \cdot p \cdot 2q \cdot \sin 105^\circ$$

$$\sin \angle BKC = \frac{p \cdot \sin 105^\circ}{KC}$$

$$\sin \angle BKC = \frac{p \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\frac{p(\sqrt{3}+1)}{2}}$$

$$\sin \angle BKC = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}}$$

$$\sin \angle BKC = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\angle BKC = 45^\circ$$

18. Jawaban : 576

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+11) \geq Mx$$

$$x^4 + 20x^3 + 122x^2 + 268x + 165 \geq Mx$$

Berdasarkan AM $\geq$ GM untuk setiap variabel

$$\frac{x^4 + 20x^3 + 122x^2 + 268x + 165}{1+20+122+256+165} \geq \sqrt[576]{x^{576}}$$

$$\frac{x^4 + 20x^3 + 122x^2 + 268x + 165}{576} \geq x$$

$$x^4 + 20x^3 + 122x^2 + 268x + 165 \geq 576x \geq Mx$$

$$Mx \leq 576x \Leftrightarrow M \leq 576$$

Jadi, bilangan real terbesar M adalah 576.





19. Jawaban : 12

$$p^2 n^2 - 3mn = 21p - m^2$$

$$p^2 n^2 + m^2 = 3(mn - 7p) \equiv 0 \pmod{3}$$

Padahal, bilangan kuadrat dalam bentuk $3k$ atau $3k + 1$

Sehingga, $p^2 n^2 + m^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Jika $p^2 n^2 \equiv 0 \pmod{3}$ dan $m^2 \equiv 0 \pmod{3}$

akibatnya $3|m^2 \Rightarrow m = 3a, a$ bulat.

substitusi $m = 3a \Rightarrow p^2 n^2 - 3mn = 21p - m^2$

$$p^2 n^2 - 9an = 21p - 9a^2$$

$$21p = p^2 n^2 + 9a^2 - 9an$$

karena $3|p^2 n^2 \Rightarrow 3|pn \Rightarrow 9|p^2 n^2$, diperoleh

$$21p = p^2 n^2 + 9a^2 - 9an \equiv 0 \pmod{9}$$

maka $9|21p \Rightarrow 3|7p \Rightarrow p$ bilangan prima, maka $p = 3$.

20. Jawaban : 1346

Jika A dan B saling mengenal, A dan C saling mengenal, maka B dan C tidak boleh saling mengenal.

Dari syarat di atas, maka akan terdapat $\frac{1}{3}$ bagian dari peserta yang tidak saling mengenal yaitu $\frac{1}{3} \cdot 2019 = 673$ orang tidak saling mengenal.

Disebutkan bahwa masing-masing peserta mengenal paling banyak m peserta lainnya yaitu $2019 - 673 = 1346$ orang.

