PEMBAHASAN
OSK MATEMATIKA SMA
TAHUN 2018

1. **Penyelesaian** :
   Perhatikan penjabaran bentuk aljabar tersebut.
   $$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) = 0$$
   $$\Leftrightarrow x^2 - (a + b)x + ab + x^2 - (b + c)x + bc = 0$$
   $$\Leftrightarrow 2x^2 - (a + 2b + c)x + (ab + bc) = 0$$
   Sehingga, jika akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 - (a + 2b + c)x + (ab + bc) = 0$ adalah x_1 dan x_2, maka dengan rumus jumlah akar-akar persamaan kuadrat diperoleh:
   $$x_1 + x_2 = \frac{a + 2b + c}{2}$$
   Perhatikan juga bahwa *a, b*, dan *c* adalah tiga bilangan satu digit berbeda, sehingga $a + 2b + c$ akan maksimum apabila *b* adalah bilangan terbesar dan *a, c* masing-masing dipilih bilangan satu digit berurutan yang lebih kecil dari *b*.
   Sehingga apabila $b = 9$ dan masing-masing *a* atau *c* adalah 8 atau 7, diperoleh jumlah terbesar akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah
   $$x_1 + x_2 = \frac{a + 2b + c}{2} = \frac{33}{2}$$
2. **Penyelesaian** :
   Perhatikan tabel 2 x 2 berikut!

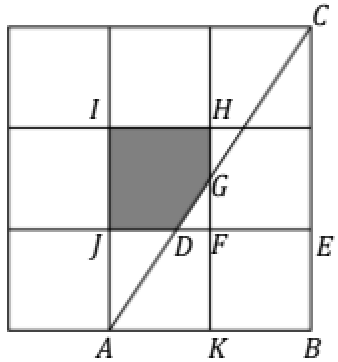
a	b
c	d

   Dengan memperhatikan bahwa hasil penjumlahan setiap baris dan kolom adalah genap, maka diperoleh kedua bilangan pada setiap baris atau kolom memiliki paritas yang sama.
   Perhatikan juga bahwa a, b, c, atau d hanya dapat diisi dengan bilangan 1, 2, atau 3.
   Banyak tabel yang memenuhi dapat ditentukan dengan membagi kasus:
   - untuk a, b, c, d bilangan ganjil
     maka ada tiga kemungkinan
     - keempat bilangan a, b, c, d adalah bilangan yang sama, sebanyak $_2C_1 = 2$ cara.
     - diantara bilangan a, b, c, d ada tiga bilangan yang sama, sebanyak $\frac{4!}{3!} \times {}_2C_1 = 8$ cara.
     - diantara bilangan a, b, c, d ada dua bilangan yang sama, sebanyak $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$ cara.

- untuk a, b, c, d bilangan genap
  maka hanya ada satu kemungkinan yaitu keempat bilangan a, b, c, d adalah bilangan 2. Sehingga ada sebanyak 1 cara.

Jadi, total banyak tabel yang memenuhi adalah sebanyak 2 + 8 + 6 + 1 = 17 cara.

3. **Penyelesaian** :
Perhatikan gambar berikut!



Perhatikan karena $AB \parallel DE$, maka $\Delta CAB \sim \Delta CDE$ sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow DE = \frac{CE}{CB} \times AB = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$$

Sehingga, karena $DE = DF + FE$, dan $FE = 1$, maka diperoleh

$$DF = DE - FE = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Perhatikan, karena $\Delta DFG \sim \Delta ABC$ sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{FG}{BC} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow FG = \frac{DF}{AB} \times BC = \frac{\frac{1}{3}}{2} \times 3 = \frac{1}{2}$$

Sehingga, $[DGHIJ] = [FHIJ] - [DFG] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$.

4. **Penyelesaian** :
Perhatikan, titik potong parabola $y = ax^2 - 4$ pada sumbu Y adalah di titik $(0, -4)$. Sedangkan, titik potong parabola $y = 8 - bx^2$ pada sumbu Y adalah di titik (0, 8).
Titik potong parabola $y = ax^2 - 4$ dan $y = 8 - bx^2$ pada sumbu X seharusnya adalah pada titik yang sama, agar dapat diperoleh dua titik lagi sebagai titik-titik sudut layang-layang yang lain.
Sehingga, titik potong di sumbu X dapat ditentukan dengan

$$y_1 = y_2$$
$$\Leftrightarrow \quad ax^2 - 4 = 8 - bx^2$$
$$\Leftrightarrow (a + b)x^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{12}{a+b}}$$

Jadi, titik potong kedua parabola pada sumbu X adalah di titik $\left(\sqrt{\frac{12}{a+b}}, 0\right)$ dan $\left(-\sqrt{\frac{12}{a+b}}, 0\right)$.

Padahal luas layang-layang adalah 24, sehingga

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 \\
\Leftrightarrow 24 &= \frac{1}{2} \times |8 - (-4)| \times \left|\sqrt{\frac{12}{a+b}} - \left(-\sqrt{\frac{12}{a+b}}\right)\right| \\
\Leftrightarrow 24 &= \frac{1}{2} \times 12 \times \sqrt{\frac{12}{a+b}} \\
\Leftrightarrow 2 &= \sqrt{\frac{12}{a+b}} \\
\Leftrightarrow 4 &= \frac{12}{a+b} \\
\Leftrightarrow a + b &= 3
\end{aligned}
$$

5. **Penyelesaian** :

   Perhatikan, bilangan asli n dapat dinyatakan sebagai $nn = a_1 \cdot 10^0 + a_2 \cdot 10^1 + a_3 \cdot 10^2 + \cdots$, maka jika $s(n)$ didefinisikan sebagai hasil penjumlahan dari semua digit-digit dari n, maka diperoleh

   $$s(n) = a_1 + a_2 + a_3 + . . .$$

   Misalkan, $p = n - s(n)$, maka

   $$
   \begin{aligned}
   p &= n - s(n) \\
   &= (a_1 \cdot 10^0 + a_2 \cdot 10^1 + a_3 \cdot 10^2 + \cdots) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) \\
   &= a_1(10^0 - 1) + a_2(10^1 - 1) + a_3(10^2 - 1) + \cdots \\
   &= 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + \cdots \\
   &= 9(a_1 + 11a_2 + 111a_3 + \cdots)
   \end{aligned}
   $$

   Sehingga, $9|n - s(n)$. Jadi bilangan asli d adalah faktor bulat positif dari 9, yaitu 1, 3, dan 9. Jadi, ada sebanyak 3 buah bilangan d yang memenuhi.

6. **Penyelesaian** :

   Perhatikan,

   $$
   \begin{aligned}
   & x^3 + y^3 + 2018 = 30y^2 - 300y + 3018 \\
   \Leftrightarrow\ & x^3 + y^3 - 30y^2 + 300y - 1000 = 0 \\
   \Leftrightarrow\ & x^3 + (y - 10)^3 = 0
   \end{aligned}
   $$

Sehingga. diperoleh

$$x = -(y - 10)$$
$$\Leftrightarrow x + y = 10$$

Karena, x, y adalah bilangan prima, maka dua buah bilangan prima yang jumlahnya 10 adalah 3 dan 7. Mengingat $x < y$, sehingga dapat diperoleh $x = 3$ dan $y = 7$.
Jadi, x yang memenuhi adalah 3.

7. **Penyelesaian** :
Perhatikan, misal kedua bilangan tersebut adalah x dan y, karena x adalah bilangan kelipatan 3 dan y adalah bilangan kelipatan 7, maka untuk m dan n adalah suatu bilangan asli, x dan y dapat dinyatakan sebagai

$$x = 7m$$
$$y = 3n$$

Karena selisih kedua bilangan adalah 10, dan $x > y$, maka $x - y = 10$. Ini sama saja dengan persamaan $7m - 3n = 10$.
Nilai m dan n dapat ditentukan menggunakan pembalikan algoritma Euclid, yaitu

$$7 = 2 \times 3 + 1$$

Sehingga,

$$1 = 7 - 2 \times 3$$

Dengan mengalikan 10 kedua ruas diperoleh

$$10 = 70 - 60$$

Sehingga, diperoleh $m = 10$ dan $n = 20$.
Sehingga, solusi umumnya adalah

$$m = 10 - 3t \Rightarrow x = 70 - 21t$$
$$n = 20 - 7t \Rightarrow y = 60 - 21t$$

Diperoleh pasangan bilangan dua digit x, y yang memenuhi adalah

$$(x, y) = \{(28, 18), (49, 39), (70, 60), (91, 81)\}$$

Perhatikan bahwa jumlah semua faktor prima adalah 17, maka $17 = 3 + p + q + 7$.
Maka $p + q = 7$, sehingga bilangan prima p, q yang memenuhi hanyalah 2 dan 5.
Sehingga, jelas diantara pasangan x, y yang memiliki faktor prima 5 hanyalah $x = 70$ dan $y = 60$.
Jadi, jumlah kedua bilangan tersebut adalah $x + y = 70 + 60 = 130$.

8. **Penyelesaian** :
Perhatikan, dengan menggunakan konsep distribusi binomial, misal p = peluang kejadian muncul angka, maka $p = \frac{1}{4}$ dan $1 - p = \frac{3}{4}$.
Apabila satu koin ditos n kali, maka peluang muncul tepat dua angka sama dengan peluang muncul tepat tiga angka dapat dinyatakan sebagai

$$P(X = 2) = P(X = 3)$$

$$\Leftrightarrow {}_nC_2 \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{(n-2)} = {}_nC_3 \cdot p^3 \cdot (1 - p)^{(n-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!\,2!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{(n-2)} = \frac{n!}{(n-3)!\,3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{(n-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{(n-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{n-2}{6}$$

$$\Leftrightarrow 18 = 2n - 4$$

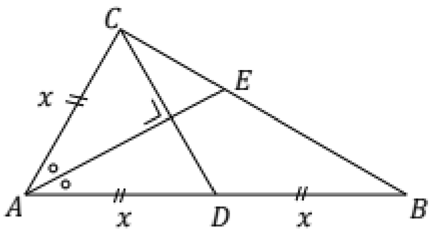
$$\Leftrightarrow 22 = 2n$$

$$\Leftrightarrow n = 11$$

Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 11.

9. **Penyelesaian** :

Perhatikan gambar segitiga berikut



CD merupakan garis berat dan AE merupakan garis bagi, keduanya berpotongan saling tegak lurus.

Perhatikan segitiga ADC sama kaki, sehingga $AD = AC$. Misal $AD = AC = DB = x$.

Perhatikan juga, karena sisi-sisi segitiga merupakan bilangan asli yang berurutan, maka selisih dari dua sisi segitiga adalah 1 atau 2.

Kasus pertama, selisih dua sisi segitiga adalah 1, sehingga $2x - x = 1 \Rightarrow x = 1$

Karena $x = 1$, maka $b = 1$, $c = 2$, sehingga

- $a = 0$, tidak memenuhi karena sisi segitiga tidak mungkin nol
- $a = 3$, tidak mungkin karena tidak memenuhi ketaksamaan $b + c > a$

Kasus kedua, selisih dua sisi segitiga adalah 2, sehingga $2x - x = 2 \Rightarrow x = 2$

Karena $x = 2$, maka $b = 2$, $c = 4$, sehingga

- $a = 3$, memenuhi.

Sehingga, sisi segitiga adalah $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$.

Jadi keliling segitiga adalah $a + b + c = 3 + 2 + 4 = 9$.

10. **Penyelesaian** :

Perhatikan, anggap $p(x) = ax^n + q(x), a \neq 0, q(x)$ suku banyak derajat k dengan $0 \leq k < n$, maka

$$
\begin{aligned}
p(x)^2 + p(x^2) &= 2x^2 \\
\Leftrightarrow \quad (ax^n + q(x))^2 + (a(x^2)^n + q(x^2)) &= 2x^2 \\
\Leftrightarrow a^2x^{2n} + 2ax^n q(x) + q(x)^2 + ax^{2n} + q(x^2) &= 2x^2 \\
\Leftrightarrow (a^2 + a)x^{2n} + 2ax^n q(x) + q(x)^2 + q(x^2) &= 2x^2
\end{aligned}
$$

Sehingga, dengan memperhatikan kesamaan di atas, maka kemungkinan yang terjadi adalah

- $(a^2 + a)x^{2n} = 2x^2$, maka $n = 1$ dengan $a^2 + a = 2$.
- $(a^2 + a)x^{2n} + 2ax^n q(x) = 2x^2$, apabila $a^2 + a = 0$ maka $n + k = 2$.

  Perhatikan, $n + k = 2 \Rightarrow k = 2 - n$, maka

  $$
  \begin{aligned}
  0 \leq k < n \Rightarrow 0 &\leq 2 - n < n \\
  \Leftrightarrow n &\leq 2 < 2n \\
  \Leftrightarrow 1 &< n \leq 2
  \end{aligned}
  $$

  Jelas bahwa $n = 2$.

Jadi, suku banyak $p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$, agar kesamaan berlaku maka

- $p(x)$ adalah suku banyak berderajat satu.
- $p(x)$ adalah suku banyak derajat dua.