PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2017

1. **Jawaban : 14200**

   Perhatikan untuk mencari bentuk $x^4 + y^4$ jalur yang kita tempuh adalah mencari terlebih dahulu bentuk $x^2 + y^2$.

   Perhatikan karena $(x + y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, maka $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$, sehingga $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$

   $$= (10)^2 + 2(10)$$

   $$= 100 + 20$$

   $$= 120$$

   Padahal karena $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, maka $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2$, sehingga $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2$

   $$= (120)^2 - 2(10)^2$$

   $$= 14400 - 200$$

   $$= 14200$$

2. **Jawaban : 9**

   Perhatikan informasi yang diberikan ada soal adalah sebagai berikut:

   a) Setiap siswa sampai di garis finish pada waktu yang berlainan, artinya setiap posisi juara ditempati oleh satu orang saja.

   b) Adi bukan juara pertama, artinya juara pertama tidak mungkin ditempati oleh Adi. Adi hanya bisa menempati posisi juara kedua, ketiga atau keempat.

c) Cokro kalah dari Budi, artinya jika Cokro menjadi juara pertama, maka kemungkinan Budi adalah juara kedua, ketiga atau keempat. Sedangkan jika Cokro juara kedua, maka kemungkinan Budi hanya menjadi juara ketiga atau keempat saja. Sedang jika Cokro juara ketiga, maka Budi pastilah juara keempat. Syarat ini tidak memungkinkan untuk Cokro menjadi juara keempat.

Sehingga, dari informasi tersebut, kita misalkan posisi masing-masing juara sebagai berikut:

1. Posisi Adi.
   Kemungkinan posisi Adi adalah memilih satu tempat dari 3, sehingga ${}_3P_1$.

2. Posisi Cokro dan Budi
   Kemungkinan posisi Cokro dan Budi adalah memilih dua tempat dari 3 tempat secara kombinasi, karena posisinya sudah pasti Cokro kalah dari Budi, sehingga ${}_3C_2$.

3. Posisi Dion
   Posisi Dion sudah tidak perlu ditentukan karena hanya tersisa satu tempat lagi, sehingga ${}_1P_1$.

Jadi, banyaknya cara menentukan susunan juara pertama, kedua, ketiga dan keempat adalah: ${}_3P_1 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1P_1 = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$.

3. **Jawaban : 8**

Perhatikan $k|(n^7 - n)$, maksudnya k adalah faktor dari $(n^7 - n)$ dimana n,k adalah bilangan asli.

Pemfaktoran dari bentuk $(n^7 - n)$, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
n^7 - n &= n(n^6 - 1) \\
&= n(n^3 - 1)(n^3 + 1) \\
&= n(n - 1)(n^2 + n + 1)(n + 1)(n^2 - n + 1) \\
&= \underbrace{(n - 1)n(n + 1)}_{\text{bentuk 3 buah bilangan}}(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)
\end{aligned}
$$

asli berurutan

Mudah diperiksa bahwa bentuk $(n^7 - n)$ memuat bentuk perkalian dari 3 bilangan asli berurutan, dimana 3 bilangan asli berurutan pasti habis dibagi 6.
Sehingga $(n^7 - n)$, untuk semua n bilangan asli pasti juga habis dibagi oleh 6.

Namun, setelah diperiksa labih lanjut, ternyata 7 juga menjadi faktor dari $n^7 - n$.

Misal $f(n) = n^7 - n$, maka $f(2) = 2^7 - 2 = 126$ dan $f(3) = 3^7 - 3 = 2184$.
Kedua nilai $f(2)$ dan $f(3)$ adalah juga kelipatan 7 karena $FPB(126, 2184) = 42$.

Misal $f(k) = k^7 - k$ adalah kelipatan 7, maka akan dibuktikan $f(k+1) = (k+1)^7 - (k+1)$ adalah juga kelipatan 7.

Perhatikan,

$$(k+1)^7 - (k+1) = \left(\sum_{i=0}^{7} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) - (k+1)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{0} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{5} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) + \left(\sum_{i=6}^{7} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) - k - 1$$

$$= k^7 + \left(\sum_{i=1}^{5} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) + 7k + 1 - k - 1$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{5} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right)}_{\substack{\text{pasti habis dibagi } 7 \\ \text{karena memuat} \\ \text{bentuk } {}_7C_i}} + \underbrace{(k^7 - k)}_{\substack{\text{sudah jelas} \\ \text{bentuk ini} \\ \text{kelipatan } 7}} + \underbrace{7k}_{\text{dapat dibagi } 7}$$

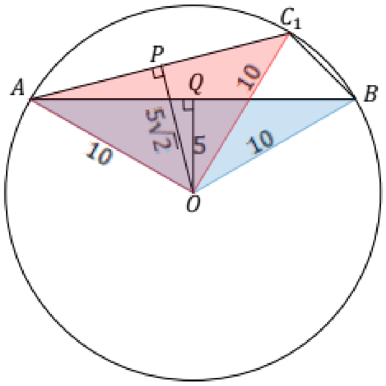
Jadi jelas bahwa 7 adalah salah satu faktor dari $(n^7 - n)$.

Jadi, karena faktor 6 x 7 = 42 adalah 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, dan 42, maka terdapat 8 buah bilangan asli k yang merupakan faktor dari $(n^7 - n)$.

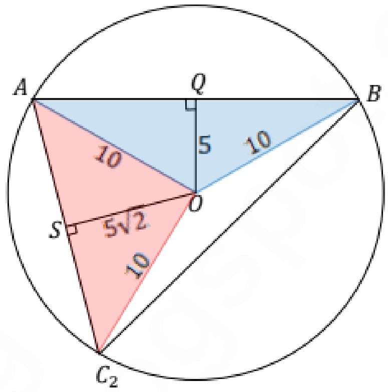
Atau menggunakan rumus banyak faktor bulat positif, maka karena 42 = 2 x 3 x 7, sehingga banyak faktor bulat positif dari 42 adalah (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8 buah.

4. **Jawaban :** $200 - 100\sqrt{3}$

Ilustrasi soal terlihat pada gambar berikut:



(i)



(ii)

Ternyata tali busur AC ada dua buah yang sesuai kriteria pada soal, yaitu berjarak $5\sqrt{2}$ dari titik O. Sehingga , titik C kita beri indeks masing-masing untuk membedakannya, yaitu C_1 dan C_2.

Pada gambar (i), titik C_1 kita pilih berada "di atas" B.

Perhatikan $\triangle AOP$, misal $\angle OAP = \alpha$, maka:

$$\sin\alpha = \frac{OP}{OA} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{10}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 45^o$$

Perhatikan $\triangle AOQ$, misal $\angle OAQ = \beta$, maka:

$$\sin\beta = \frac{OQ}{OA} \Rightarrow \sin\beta = \frac{5}{10}$$

$\Leftrightarrow sin\, \beta = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \beta = 30^o$

Padahal, sudut keliling $\angle BAC_1 = \alpha - \beta = 45^o - 30^o = 15^o$.

Sehingga sudut pusat $\angle BOC_1 = 2\angle BAC_1 = 2(15^o) = 30^o$.

Jadi, dengan menggunakan aturan cosinus, diperoleh:

$BC_1^{\ 2} = OB^2 + OC_1^{\ 2} - 2 \cdot OB \cdot OC_1 \cdot cos\, 30^o$

$= 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= 100 + 100 - 100\sqrt{3}$

$= 200 - 100\sqrt{3}$

5. **Jawaban :** $\frac{11}{4}$

Misal,

$a - b = x$

$c - d = y$

Maka,

$(a - b) + (c - d) = x + y$

Sehingga diperoleh,

$(b - c) + (d - a) = - x - y$

Apabila kedua persamaan dikuadratkan, maka

$((a - b) + (c - d))^2 = (x + y)^2 \Rightarrow (a - b)^2 + 2(a - b)(c - d) + (c - d)^2 = (x + y)^2$

dan,

$((b-c)+(d-a))^2=(-(x+y))^2 \Rightarrow (b-c)^2+2(b-c)(d-a)+(d-a)^2=(x+y)^2$

Jadi, diperoleh,

$$(a-b)^2+2(a-b)(c-d)+(c-d)^2=(b-c)^2+2(b-c)(d-a)+(d-a)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+2(a-b)(c-d)+c^2-2cd+d^2=b^2-2bc+c^2+2(b-c)(d-a)+d^2-2ad+a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2ab-2cd+2(a-b)(c-d)=-2bc-2ad+2(b-c)(d-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(a-b)(c-d)=2ab+2cd-2bc-2ad+2(b-c)(d-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(a-b)(c-d)=2(ab-ad-bc+cd)+2(b-c)(d-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(a-b)(c-d)=2(a-c)(b-d)+2(b-c)(d-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-b)(c-d)=(a-c)(b-d)+(b-c)(d-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a-b)(c-d)}{(a-b)(c-d)}=\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}+\frac{(b-c)(d-a)}{(a-b)(c-d)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1=\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}+\left(-\frac{7}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\frac{7}{4}=\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{11}{4}=\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$$

6. **Jawaban : 621**

Misal,

x = banyaknya bola merah

y = banyaknya bola hitam

Sehingga, apabila banyak bola merah dan bola hitam secara keseluruhan dimisalkan n dan banyak keseluruhan kurang dari 1000, maka

$x+y<1000 \Rightarrow n\ 1000$

Peluang terambil dua bola merah dan dua bola hitam adalah

$$P(2M)=\frac{{}_{x}C_2}{{}_{n}C_2}=p\,;\ P(2H)=\frac{{}_{y}C_2}{{}_{n}C_2}=\frac{{}_{n-x}C_2}{{}_{n}C_2}=q$$

Perhatikan, pada soal diketahui $p - q = \frac{23}{37}$, sehingga:

$$p - q = \frac{23}{37} \Rightarrow \frac{{}_{x}C_{2}}{{}_{n}C_{2}} - \frac{{}_{n-x}C_{2}}{{}_{n}C_{2}} = \frac{23}{37}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)-(n-x)(n-x-1)}{n(n-1)} = \frac{23}{37}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-x)-(n^2-nx-n-nx+x^2+x)}{n(n-1)} = \frac{23}{37}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-n^2-2nx-2x}{n(n-1)} = \frac{23}{37}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)(2x-n)}{n(n-1)} = \frac{23}{37}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-n)}{n} = \frac{23}{37}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{n} - 1 = \frac{23}{37}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{n} = \frac{60}{37}$$

$$\Leftrightarrow \frac{37}{30}x = n$$

Padahal, $n < 1000$, sehingga:

$$\frac{37}{30}x < 1000 \Rightarrow 37x < 30000$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{30000}{37}$$

$$\Leftrightarrow x < 810\frac{30}{37}$$

Jadi, nilai terbesar x adalah $x = 810$,

Sedangkan karena $x + y < 1000$, jadi jumlah terbesar $x + y = 999$, maka diperoleh $y = 189$.

Sehingga selisih terbesar yang mungkin dari banyaknya bola merah dan hitam adalah

$$x - y = 810 - 189 = 621$$

7. **Jawaban : 9**

Karena $t(n) + 1 = s(n) - t(n) = 1$, maka dua bilangan prima yang selisihnya 1 adalah bilangan 2 dan 3.
Jadi jelas bahwa $s(t) = 3$ dan $t(n) = 2$

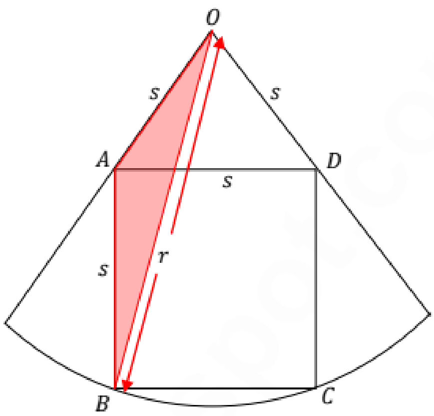
Sehingga, bilangan yang dimaksud adalah $n = 2^p \times 3^q$, dengan p dan q adalah bilangan asli.
Padahal bilangan $n \in \{1, 2, ..., 100\}$, maka

- untuk $p = 1$, diperoleh tiga buah nilai q yang mungkin adalah $q = \{1,2,3\}$
- untuk $p = 2$, diperoleh dua buah nilai q yang mungkin adalah $q = \{1,2\}$
- untuk $p = 3$, diperoleh dua nilai q yang mungkin adalah $q = \{1,2\}$
- untuk $p = 4$, diperoleh dua nilai q yang mungkin adalah $q = \{1\}$
- untuk $p = 5$, diperoleh dua nilai q yang mungkin adalah $q = \{1\}$

Jadi, ada 9 buah bilangan asli n yang memenuhi.

8. **Jawaban :** $2 + \sqrt{3}$

Perhatikan gambar!



Jika persegi berada di dalam juring dengan sudut pusat 60^o, maka $\triangle AOD$ adalah segitiga sama sisi. Sehingga, $AO = AD = OD = s$.

Perhatikan, $\triangle AOB$,

$\angle OAB = \angle BAD + \angle OAD = 90^o + 60^o = 150^o$

Pada $\triangle AOB$ berlaku aturan kosinus sebagai berikut:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \cdot OA \cdot AB \cdot \cos 150^o$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = s^2 + s^2 - 2 \cdot s \cdot s \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = 2s^2 + s^2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = s^2(2 + \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{r^2}{s^2} = 2 + \sqrt{3}$$

9. **Jawaban : 16**

Misal
$a + b = d$
$a + b + c = 1 \Rightarrow d + c = 1$

Berdasarkan ketaksamaan $AM \geq GM$ diperoleh:

$$\frac{d+c}{2} \geq \sqrt{dc} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{dc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq dc$$

Tanda kesamaan terjadi saat $d = c$, sehingga $d = \frac{1}{2}$ dan $c = \frac{1}{2}$

Padahal $d = a + b$, sehingga $a + b = \frac{1}{2}$

Berdasarkan ketaksamaan $AM \geq GM$ diperoleh:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{1}{4} \geq \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} \geq ab$$

Tanda kesamaan terjadi saat $a = b$, sehingga $a = \frac{1}{4}$ dan $b = \frac{1}{4}$

Sehingga, nilai minimum dari $\frac{a+b}{abc}$ adalah

$$\min\left(\frac{a+b}{abc}\right) = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{32}{1} = 16$$

10. **Jawaban : 460**

Perhatikan aturan pada hotel tersebut: “Jika suatu kamar berisi tamu, dan sembarang dua digit nomor kamar tersebut dipertukarkan tempatnya”, maka diperoleh:

- **nomor kamar yang sama.**

  Jika nomor kamarnya sama, maka sudah pasti nomor kamar tersebut berisi tamu.

- **nomor kamar yang tidak berisi tamu.**

  Artinya, permutasi dari digit kamar menghasilkan nomor kamar yang tidak berisi tamu.

Padahal, kamar hotel bernomor 000 sampai dengan 999. Artinya ada 1000 buah kamar hotel. Kamar hotel tersebut dapat diklasifikasikan berdasarkan jenis digitnya, yaitu:

- **Nomor kamar yang ketiga digitnya sama.**
  Maka nomor kamar tersebut adalah *aaa*.
  Karena a = {0,1,2, …, 9}, maka ada sebanyak 10 buah kamar yang tiga digitnya sama. Karena apabila dipertukarkan dua digitnya mendapat nomor kamar yang sama, maka ada 10 buah kamar yang berisi tamu.

- **Nomor kamar dengan dua digit yang sama.**
  Maka nomor kamar tersebut adalah *abb, bab, bba.*
  Karena a = {0,1,2, …, 9} dan misal dipilih a = 0, maka b = {1,2,3, …, 9}, maka ada sebanyak 3 x 10 x 9 = 270 buah kamar.
  Perhatikan tabel berikut:

Jenis nomor kamar	Tamu		
	Ditukar 2 digitnya	Ada	Tidak
abb	[illegible]	√	
bab			√
bba			√

  Sehingga ada $\frac{1}{3}$ x 270 = 90 kamar yang berisi tamu.

- **Nomor kamar yang ketiga digitnya berbeda.**
  Maka nomor kamar tersebut adalah *abc*.
  Karena a = {0,1,2, …, 9} dan misal dipilih a = 0, maka b = {1,2,3, …, 9} dan misal

dipilih $b = 1$, maka $c = \{2,3,4, \ldots, 9\}$, maka ada sebanyak 10 x 9 x 8 = 720 buah kamar.

Perhatikan tabel berikut:

Jenis nomor kamar	Tamu			Tamu			Tamu		
	Ditukar 2 digitnya	Ada	Tidak	Ditukar 2 digitnya	Ada	Tidak	Ditukar 2 digitnya	Ada	Tidak
abc		√							
acb			√			√			√
bac			√			√			√
bca					√				
cab								√	
cba			√			√			√

Berarti, ada tiga kamar yang terisi tamu, yaitu *abc, bca, cab.*

Sehingga ada $\frac{1}{2}$ x 720 = 360 kamar yang berisi tamu.

Jadi, maksimal banyak kamar yang berisi tamu adalah 10 + 90 + 360 = 460 buah kamar.

11. **Jawaban : 8**

Perhatikan bahwa untuk setiap bilangan asli berbeda m,n dengan $m \mid n$, maka berlaku $f(m) < f(n)$.

Perhatikan, pandang bentuk $= a^p \times b^q$.

Jika untuk setiap bilangan asli berbeda m,n dengan $m \mid n$, maka diperoleh

$m_x = \{m_0, m_1, m_2, \ldots, m_p, m_{p+1}, m_{p+2}, \ldots\ m_{p+q-1}, m_{p+q}\}$, dimana:

$m_0 = a^0 \times b^0$

$m_1 = a^1 \times b^0$

$m_2 = a^2 \times b^0$

…

$m_p = a^p \times b^0$

$m_{p+1} = a^p \times b^1$

$m_{p+2} = a^p \times b^2$

…

$m_{p+q-1} = a^p \times b^{q-1}$

$m_{p+q} = a^p \times b^q$

Sehingga apabila m diurutkan dari kecil ke besar diperoleh

$$m_0 < m_1 < m_2 < \ ... \ < m_p < m_{p+1} < m_{p+2} < \ ... \ < m_{p+q-1} < m_{p+q}$$

Dan apabila x,y bilangan asli dimana $x < y$, maka $m_x | m_y$.

Jadi, akan berlaku

$$f(m_0) < f(m_1) < f(m_2) < \ ... \ < f(m_{p+q-1}) < f(m_{p+q})$$

Kemudian perhatikan bentuk faktorisasi prima dari 2016 adalah $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$

Serta pandang bentuk faktorisasi prima dari 8! adalah $8! = 2^7 \times 3^2 \times 5 \times 7$

Juga pada soal diketahui $f(1) = 0$ dan $f(8!) = 11$

Untuk $n = 8! = 2^7 \times 3^2 \times 5 \times 7$, maka diperoleh salah satu alternatif susunan m_x, yaitu:

$m_0 = 2^0 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$

$m_1 = 2^1 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$

$m_2 = 2^2 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$

$m_3 = 2^3 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$

$m_4 = 2^4 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$

$m_5 = 2^5 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$

$m_6 = 2^5 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^0$

$m_7 = 2^5 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^0$

$m_8 = 2^5 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^1 = 2016$

$m_9 = 2^5 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$

$m_{10} = 2^6 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$

$m_{11} = 2^7 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 8!$

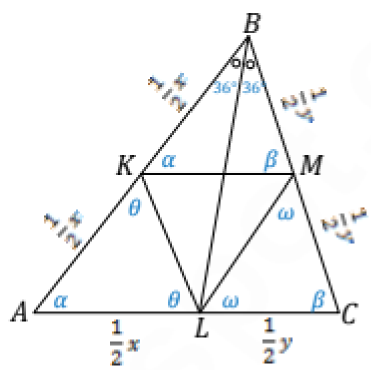
Dan karena $m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{11}$ maka berlaku $f(m_0) < f(m_1) < f(m_2) < \ldots < f(m_{11})$.

Perhatikan juga karena $f(m_0) = f(1) = 0$ dan $f(m_{11}) = f(8!) = 11$, artinya $f(m_x) = x$.

Dari alternatif susunan m_x di atas maka dengan mudah dapat dilihat $f(2016) = f(m_8) = 8$.

12. **Jawaban : 54**

Perhatikan ilustrasi gambar berikut!



Misal,

$AB = x; BC = y; \angle BAC = \alpha; \angle BCA = \beta$

Karena garis BL membagi sudut B sama besar, sehingga $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{CB} \Rightarrow AL = LC\left(\frac{x}{y}\right)$

Padahal $AC = \frac{1}{2}(AB + BC) \Rightarrow AC = \frac{1}{2}(x + y)$

Sehingga,

$AC = AL + LC \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y) = LC\left(\frac{x}{y}\right) + LC$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + y) = LC\frac{(x+y)}{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y = LC$$

$$AL = LC\left(\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow AL = \frac{1}{2}y\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow AL = \frac{1}{2}x$$

Padahal K dan M merupakan titik tengah berturut-turut sisi AB dan BC, sehingga

$$AK = BK = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AK = BK = \frac{1}{2}x = AL$$

$$BM = CM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BM = CM = \frac{1}{2}y = LC$$

Sehingga, karena $AL = AK$, maka $\triangle ALK$ adalah segitiga sama kaki.
Misal $\angle ALK = \angle AKL = \theta$
Diperoleh $\alpha + 2\theta = 180^o \Rightarrow \alpha = 180^o - 2\theta$

Begitu pula karena $LC = CM$, maka $\triangle CLM$ adalah segitiga sama kaki.
Misal $\angle LMC = \angle LCM = \omega$
Diperoleh $\beta + 2\omega = 180^o \Rightarrow \beta = 180^o - 2\omega$

Perhatikan $\triangle ABC$, berlaku

$$\alpha + \beta + 72^o = 180^o \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 108^o$$

$$\Leftrightarrow (180^o - 2\theta) + (180^o - 2\omega) = 108^o$$

$$\Leftrightarrow 360^o - 2(\theta + \omega) = 108^o$$

$$\Leftrightarrow 360^o - 108^o = 2(\theta + \omega)$$

$$\Leftrightarrow 252^o = 2(\theta + \omega)$$

$$\Leftrightarrow 126^o = \theta + \omega$$

Jadi, $\angle KLM$ dapat ditemukan dengan memandang bahwa ALC adalah suatu garis lurus.

$$\angle ALK + \angle KLM + \angle MLC = 180^o \Rightarrow \theta + \angle KLM + \omega = 180^o$$

$$\Leftrightarrow \angle KLM + 126^o = 180^o$$

$$\Leftrightarrow \angle KLM = 180^o - 126^o$$

$$\Leftrightarrow \angle KLM = 54^o$$

13. **Jawaban : 2009**

Perhatikan, nilai maksimum $P(x)$ di $x = 2$, artinya $P'(0) = 0$ dan $P'(2) = 0$.
Karena $P(x)$ suatu polinom berderajat 4, maka $P'(x)$ adalah suatu polinom berderajat 3 yang memuat faktor x dan $(x - 2)$, serta satu faktor yang lain, misal $(x - p)$.
Jadi, $P'(x) = a(x(x - 2)(x - p)) = a(x^3 - (p + 2)x^2 + 2px)$

$P(x)$ dapat ditentukan dengan menggunakan anti-turunan dari $P'(x)$, sehingga

$$P(x) = \int P'(x)\, dx$$

$$= \int a(x^3 - (p + 2)x^2 + 2px)dx$$

$$= a\int (x^3 - (p + 2)x^2 + 2px)dx$$

$$= a\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(p + 2)x^3 + px^2\right) + c$$

Padahal $P(x)$ memiliki nilai maksimum 2018 di $x = 0$, artinya $P(0) = 2018$, maka

$$P(0) = 2018 \Rightarrow a\left(\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{3}(p + 2)(0)^3 + p(0)^2\right) + c = 2018$$

$$\Leftrightarrow c = 2018$$

Sehingga, karena $c = 2018$ maka diperoleh $P(x) = a\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(p + 2)x^3 + px^2\right) + 2018$

$P(x)$ juga memiliki nilai maksimum 2018 di $x = 2$, artinya $P(2) = 2018$, maka

$$P(2) = 2018 \Rightarrow a\left(\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{1}{3}(p + 2)(2)^3 + p(2)^2\right) + 2018 = 2018$$

$$\Leftrightarrow a\left(4 - \frac{8}{3}(p + 2) + 4p\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{8}{3}p - \frac{16}{3} + 4p = 0$$

$$\Leftrightarrow 12 - 8p - 16 + 12p = 0$$

$$\Leftrightarrow 4p - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4p = 4$$

$$\Leftrightarrow p = 1$$

Sehingga, diperoleh $P(x) = a\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right) + 2018$

Maka, nilai a dapat ditentukan menggunakan $P(1) = 2017$

$P(1) = 2017 \Rightarrow a\left(\frac{1}{4}(1)^4 - (1)^3 + (1)^2\right) + 2018 = 2017$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = 2017 - 2018$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = -4$$

Sehingga, diperoleh $P(x) = -4\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right) + 2018 = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2018$

Jadi, $P(3) = -(3)^4 + 4(3)^3 - 4(3)^2 + 2018$

$$= -81 + 108 - 36 + 2018$$

$$= 2009$$

14. **Jawaban : 53**

Dengan cara manual kita dapat mencari banyaknya cara membagi kado.

Tanpa mengikutkan B yang sudah pasti mendapatkan kado dari A, maka hasil pengacakan yang mungkin dapat dilihat seperti berikut:

Kemungkinan pertama, B memberikan kado ke A, sehingga terjadi pengacakan pada keempat orang lain yaitu, C, D, E dan F sehingga menghasilkan bentuk sebagai berikut:

24 permutasi yang mungkin dari CDEF adalah sebagai berikut:

CDEF	DCEF	ECDF	FCDE
CDFE	DCFE	ECFD	FCED
CEDF	DECF	EDCF	FDCE
CEFD	DEFC	EDFC	FDEC
CFDE	DFCE	EFCD	FECD
CFED	DFEC	EFDC	FEDC

Maka diperoleh 9 buah kemungkinan pengacakan yang diperbolehkan yaitu yang bertanda biru.

Kemungkinan kedua, B memberikan kado ke selain A, berarti ada 4 kemungkinan, yaitu memberikan kado tersebut ke C, D, E atau F.

Anggap B memberikan kado ke C, berarti ada 24 permutasi yang mungkin dari CDEF yang akan diletakkan pada ADEF, yaitu:

CDEF	DCEF	ECDF	FCDE
CDFE	DCFE	ECFD	FCED
CEDF	DECF	EDCF	FDCE
CEFD	DEFC	EDFC	FDEC
CFDE	DFCE	EFCD	FECD
CFED	DFEC	EFDC	FEDC

Maka diperoleh 11 buah kemungkinan yang diperbolehkan yaitu yang bertanda biru.
Sehingga, banyaknya kemungkinan adalah 4 x 11 = 44 cara.

Jadi, banyak kemungkinan seluruhnya adalah 9 + 44 = 53 cara.

15. **Jawaban : 119**

Perhatikan, $n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n \text{ buah faktor}}$

Ide untuk menjadikan $n!$ menjadi n - a perkalian bilangan asli berurutan adalah dengan memotong beberapa perkalian bilangan asli berurutan pertama.

Pandang bahwa $n!$ adalah perkalian dari n - a bilangan asli berurutan, maka bilangan terbesar n dapat diperoleh dengan memotong a + 1 buah perkalian bilangan asli pertama, yaitu

$$n! = \left\{\underbrace{\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots}_{n-a-1\text{ buah faktor}}\cdot\underbrace{\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{a\text{ buah faktor}}}_{n\text{ buah faktor}}\right\} = \underbrace{x\cdot\left\{\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots}_{n-a-1\text{ buah faktor}}\right\}}_{n-a\text{ buah faktor}}$$

dimana, x adalah hasil perkalian dari beberapa perkalian bilangan asli pertama yang terpotong.

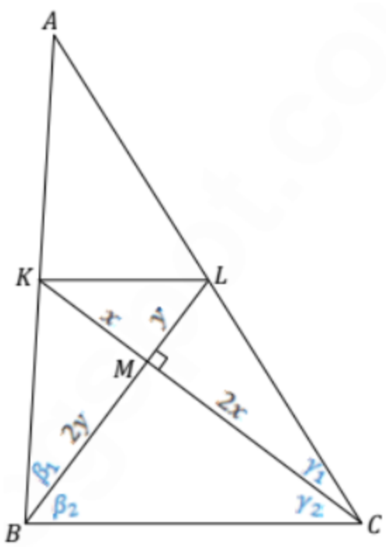
Sehingga, karena

$$119! = \underbrace{119\cdot 118\cdot 117\cdot\ldots\cdot 6\cdot\underbrace{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{=120}}_{119\text{ buah faktor}} = \underbrace{120\cdot 119\cdot 118\cdot\ldots\cdot 6}_{115\text{ buah faktor}}$$

Jadi, diperoleh bahwa bilangan asli terbesar n sehingga $n!$ dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian dari n - 4 bilangan asli berurutan adalah 119.

16. **Jawaban :** $\frac{2}{3}$

Perhatikan gambar!



Karena K dan L berturut-turut titik tengah AB dan AC, maka

$$\frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB} \Rightarrow \frac{KL}{BC} = \frac{1}{2}$$

Perhatikan, $\triangle KLM$ dan $\triangle BCM$ sebangun dan $\frac{KL}{BC} = \frac{1}{2}$, maka

$$\frac{KM}{MC} = \frac{LM}{MB} = \frac{KL}{CB} = \frac{1}{2}$$

Misal,
$KM = x$
$LM = y$

maka,
$\frac{KM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{MC} = \frac{1}{2}$ dan $\frac{LM}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y}{MB} = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow MC = 2x \quad \Leftrightarrow MB = 2y$

Perhatikan, $\triangle KBC$, maka diperoleh
misal, $\angle KBC = \beta; \angle KBM = \beta_1; \angle MBC = \beta_2$
maka,

$$\begin{aligned} \cot\beta &= \cot(\beta_1 + \beta_2) \\ &= \frac{1}{\tan(\beta_1+\beta_2)} \\ &= \frac{1-\tan\beta_1\cdot\tan\beta_2}{\tan\beta_1+\tan\beta_2} \\ &= \frac{1-\frac{x}{2y}\cdot\frac{2x}{2y}}{\frac{x}{2y}+\frac{2x}{2y}} \\ &= \frac{2y^2-x^2}{3xy} \end{aligned}$$

Perhatikan, $\triangle BCL$, maka diperoleh
misal, $\angle BCL = \gamma; \angle BCM = \gamma_1; \angle MCL = \gamma_2$
maka,

$$\begin{aligned} \cot\gamma &= \cot(\gamma_1 + \gamma_2) \\ &= \frac{1}{\tan(\gamma_1+\gamma_2)} \\ &= \frac{1-\tan\gamma_1\cdot\tan\gamma_2}{\tan\gamma_1+\tan\gamma_2} \\ &= \frac{1-\frac{y}{2x}\cdot\frac{2y}{2x}}{\frac{y}{2x}+\frac{2y}{2x}} \\ &= \frac{2x^2-y^2}{3xy} \end{aligned}$$

Sehingga,

$\cot\beta + \cot\gamma = \frac{2y^2-x^2}{3xy} + \frac{2x^2-y^2}{3xy} = \frac{x^2+y^2}{3xy}$

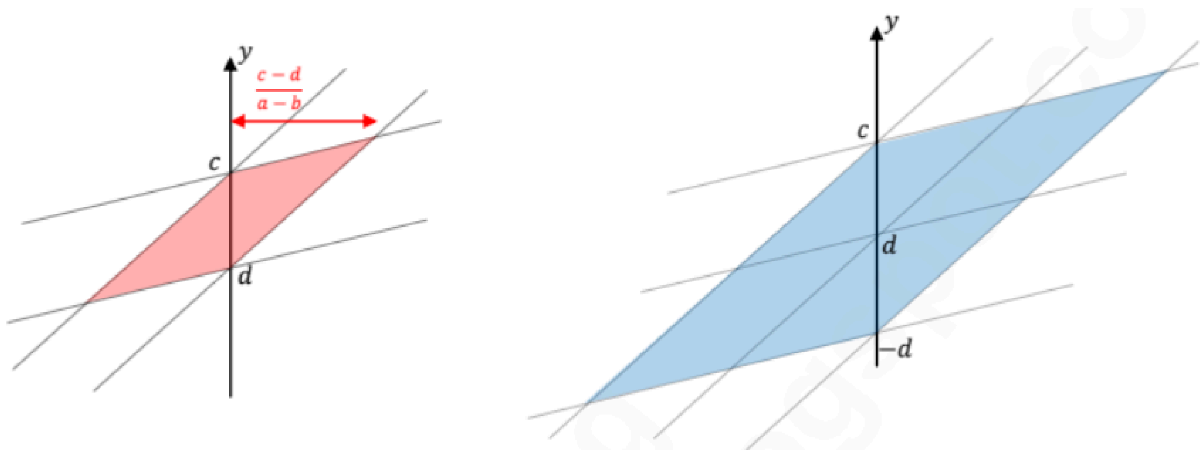
Mengingat, dari $AM - GM$ diperoleh $x^2 + y^2 \geq 2xy$

$x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2xy} \geq 1$ (kalikan kedua ruas dengan $\frac{2}{3}$)

$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{3xy} \geq \frac{2}{3}$

Jadi, nilai minimum $\cot\beta + \cot\gamma = \frac{2}{3}$

17. **Jawaban : 16**



Secara grafik, kita dapat melihat dengan mudah bahwa titik potong dengan sumbu Y untuk keempat garis adalah:

a. Untuk jajargenjang dengan luas 18, adalah di (0,c) dan (0,d).

b. Untuk jajargenjang dengan luas 72, adalah di (0,c) dan (0,d).

Perhatikan bahwa luas jajargenjang menjadi 4 kali lebih besar, maka dengan prinsip kesebangunan dan perbandingan, maka ukuran panjang sisi jajargenjang menjadi 2 kali lebih besar dari semula.

Sehingga,
Perhatikan jarak (0,c) ke (0,d) adalah (c - d).
Perhatikan jarak (0,c) ke (0, -d) adalah (c + d).

Padahal, ukuran sisi jajargenjang menjadi 2 kali lebih besar dari semula, sehingga
$c + d = 2(c - d) \Rightarrow c = 3d$

Secara grafik, kita juga dapat melihat dengan mudah bahwa jajargenjang dipisahkan menjadi dua bagian sama besar oleh sumbu Y.
Perhatikan luas bagian sebelah kanan sumbu Y adalah 9, sehingga:

$$y = ax + d$$

$$y = bx + c$$

$$0 = (a - b)x + (d - c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-d}{a-b} = x$$

Jadi, $t = \frac{c-d}{a-b}$

Sehingga diperoleh, $L = \frac{1}{2}at \Rightarrow 9 = \frac{1}{2}(c - d)\left(\frac{c-d}{a-b}\right)$

$$\Leftrightarrow 9 = \frac{1}{2}2d\left(\frac{2d}{a-b}\right)$$

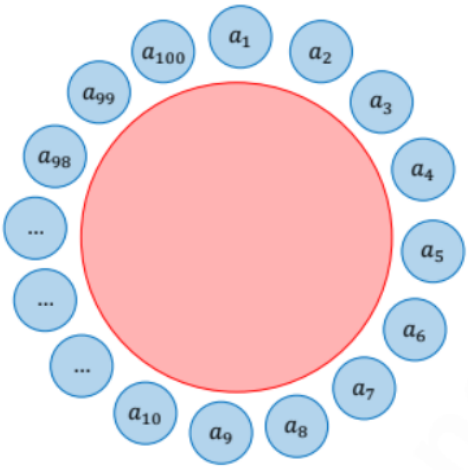
$$\Leftrightarrow 9 = \frac{2d^2}{a-b}$$

$$\Leftrightarrow 9(a - b) = 2d^2$$

Perhatikan, bahwa $d^2 = 9 \Rightarrow d = 3$, sehingga dari hubungan $c = 3$d juga dapat diperoleh $c = 9$. Dan pandang bentuk $a - b = 2$ dengan a,b bilangan positif, maka nilai a,b terkecil adalah masing-masing $a = 3$ dan $b = 1$.

Sehingga, diperoleh penyelesaian min(a,b,c,d) = (3,1,9,3).
Jadi, nilai minimum $a + b + c + d = 3 + 1 + 9 + 3 = 16$.

18. **Jawaban : 49**



Perhatikan gambar di atas.

Terdapat 100 buah bilangan bulat yang mengelilingi lingkaran, sedemikian hingga menurut arah jarum jam, setiap bilangan lebih besar dari hasil penjumlahan dua bilangan seterusnya.

Sehingga dapat dipahami bahwa pada susunan bilangan melingkar tersebut berlaku:

$$a_1 > a_{99} + a_{100}$$
$$a_2 > a_{100} + a_1$$
$$a_3 > a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$a_{99} > a_{97} + a_{98}$$
$$a_{100} > a_{98} + a_{99}$$
$$\overline{}\ +$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} > 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}) \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} < 0$$

Perhatikan pernyataan $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} < 0$

Artinya, paling tidak ada satu buah nilai diantara $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ yang bernilai negatif.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $a_1 < 0$, perhatikan bahwa $a_1 > a_{99} + a_{100}$ berarti paling tidak ada satu nilai a yang negatif diantara a_{99} atau a_{100}.

Misalkan juga $a_{100} < 0$, maka akibatnya paling tidak juga ada satu nilai a yang negatif diantara a_{98} atau a_{99}. Agar bilangan negatif minimum, maka $a_{98} < 0$.
Proses tersebut berulang sampai $a_2 < 0$.

Sehingga diperoleh $a_1, a_2, a_4, a_6 \ldots, a_{100} < 0$ dan $a_3, a_5, a_7, a_9 \ldots, a_{99} > 0$.

Jadi, banyaknya bilangan positif ada sebanyak 49 buah.

19. **Jawaban : 398**

Perhatikan,
Misal, $n = 10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e$, maka untuk semua *a,b,c,d,e* bilangan bulat non negatif jumlah digit-digit dari *n* adalah 5.

Contohnya,
Apabila $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 1$, $e = 3$, maka diperoleh:
$n = 10^1 + 10^2 + 10^0 + 10^1 + 10^3 = 10 + 100 + 1 + 10 + 1000 = 1121$
Sehingga, jumlah digit-digit dari 1121 adalah $1 + 1 + 2 + 1 = 5$.
Terbukti, $S(n) = 5$.

Jadi diperoleh bentuk $n^5 = (10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)^5$ yang apabila dijabarkan akan menjadi,

$$\begin{aligned} n^5 &= (10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)^5 \\ &= k_1 \underbrace{(10^{5a} + 10^{5b} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_1 \text{ suku}} + k_2 \underbrace{(10^{4a+b} + 10^{4a+c} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_2 \text{ suku}} + k_3 \underbrace{(10^{3a+2b} + 10^{3a+2c} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_3 \text{ suku}} + k_4 \underbrace{(10^{3a+b+c} + 10^{3a+b+d} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_4 \text{ suku}} \\ &\quad + k_5 \underbrace{(10^{2a+2b+c} + 10^{2a+2b+d} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_5 \text{ suku}} + k_6 \underbrace{(10^{2a+b+c+d} + 10^{2a+b+c+e} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_6 \text{ suku}} + k_7 \underbrace{(10^{a+b+c+d+e})}_{\text{sebanyak } n_7 \text{ suku}} \end{aligned}$$

Sehingga, terdapat 7 bentuk suku yang dapat dikelompokkan berdasarkan pangkat dari 10^x, yaitu:

Cara penjumlahan menghasilkan bentuk 5	Bentuk 10^x	Koefisien	Banyak suku yang terbentuk
5	$10^{5a} + 10^{5b} + \cdots$	$k_1 = \frac{5!}{5!} = 1$	$n_1 = {}_5P_1 = 5$
$4+1$	$10^{4a+b} + 10^{4a+c} + \cdots$	$k_2 = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$	$n_2 = {}_5P_2 = 20$
$3+2$	$10^{3a+2b} + 10^{3a+2c} + \cdots$	$k_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$	$n_3 = {}_5P_2 = 20$
$3+1+1$	$10^{3a+b+c} + 10^{3a+b+d} + \cdots$	$k_4 = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20$	$n_4 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$
$2+2+1$	$10^{2a+2b+c} + 10^{2a+2b+d} + \cdots$	$k_5 = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$	$n_5 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$
$2+1+1+1$	$10^{2a+b+c+d} + 10^{2a+b+c+e} + \cdots$	$k_6 = \frac{5!}{2!\,1!\,1!\,1!} = 60$	$n_6 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_3 = 20$
$1+1+1+1+1$	$10^{a+b+c+d+e}$	$k_7 = \frac{5!}{1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 120$	$n_7 = {}_5C_5 = 1$

Keterangan:

Pandang bentuk $(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)^5$ sebagai perkalian berulang sebagai berikut:

$$\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ pertama}\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ kedua}\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ ketiga}\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ keempat}\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ kelima}$$

maka,

- Koefisien dari 10^{3a+b+c} adalah berapa banyak cara 10^{3a+b+c} dapat terbentuk dari perkalian berulang sebanyak lima kali, dengan mengacak bentuk $10^a \cdot 10^a \cdot 10^a \cdot 10^b \cdot 10^c$ yaitu
  $10^a \cdot 10^a \cdot 10^a \cdot 10^b \cdot 10^c$
  $10^a \cdot 10^a \cdot 10^b \cdot 10^a \cdot 10^c$
  $10^a \cdot 10^a \cdot 10^b \cdot 10^c \cdot 10^a$
  dan seterusnya…
  Sehingga, koefisien dapat dihitung dengan konsep permutasi n unsur dengan ada unsur yang sama. Diperoleh koefisien dari 10^{3a+b+c} adalah $k_4 = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20$.

- Banyak suku yang terbentuk dari $3a + b + c, 3a + b + d$, dst adalah berapa banyak cara pangkat dari 10^x dapat terbentuk dari huruf-huruf yang tersedia yaitu a, b, c, d, e.
  Yaitu, memilih sebuah huruf secara permutasi untuk dipasangkan dengan 3, dan

memilih dua huruf yang lain dipasangkan dengan 1 dari dua huruf yang tersisa secara kombinasi. Sehingga, $n_4 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$ buah suku.

Lalu pandang lagi, bahwa apabila dua digit dijumlahkan dan lebih besar dari 10, maka jumlah digit mereka akan lebih kecil dari jumlah kedua digit tersebut.

Perhatikan, sebagai contohnya misalkan saja ada dua bilangan yaitu 8 dan 9.
Maka, jumlah kedua digit adalah $8 + 9 = 17$. Sedangkan, apabila kedua digit dijumlahkan $8 + 9 = 17$, maka jumlah digit dari 17 adalah $1 + 7 = 8$. Jelas bahwa $8 < 17$.

Sehingga, jumlah digit-digit dari $n^5 = (10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)^5$ adalah akan maksimum apabila setiap bentuk 10^x memiliki bentuk pangkat x yang tidak sama. Artinya:

$$5a \neq 4a + b \neq 3a + 2b \neq 3a + b + c \neq 2a + 2b + c \neq 2a + b + c + d \neq a + b + c + d + e$$

sehingga seluruh bentuk 10^x adalah bentuk berbeda nilainya.

Maka, bilangan n^5 yang menghasilkan jumlah digit terbesar adalah:

$(k_1 \cdot n_1) \times 10^{x_1} + (k_2 \cdot n_2) \times 10^{x_2} + \ldots + (k_7 \cdot n_7) \times 10^{x_7}$ dengan $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_7$ dan $k_1, k_2, \ldots, k_7$ hanya dilihat jumlah digitnya saja (contoh : 20 hanya dilihat sebagai $2 + 0 = 2$).

Jadi, jumlah digit maksimum dari n^5 adalah:

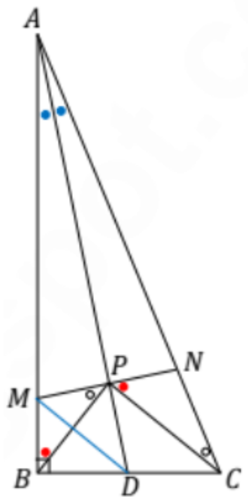
Bentuk 10^x	Koefisien	Banyak suku yang terbentuk	Jumlah digit
$10^{5a} + 10^{5b} + \cdots$	$k_1 = \frac{5!}{5!} = 1$	$n_1 = {}_5P_1 = 5$	$1 \times 5 = 5$
$10^{4a+b} + 10^{4a+c} + \cdots$	$k_2 = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$	$n_2 = {}_5P_2 = 20$	$5 \times 20 = 100$
$10^{3a+2b} + 10^{3a+2c} + \cdots$	$k_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$	$n_3 = {}_5P_2 = 20$	$(1 + 0) \times 20 = 20$
$10^{3a+b+c} + 10^{3a+b+d} + \cdots$	$k_4 = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20$	$n_4 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$	$(2 + 0) \times 30 = 60$
$10^{2a+2b+c} + 10^{2a+2b+d} + \cdots$	$k_5 = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$	$n_5 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$	$(3 + 0) \times 30 = 90$
$10^{2a+b+c+d} + 10^{2a+b+c+e} + \cdots$	$k_6 = \frac{5!}{2!\,1!\,1!\,1!} = 60$	$n_6 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_3 = 20$	$(6 + 0) \times 20 = 120$
$10^{a+b+c+d+e}$	$k_7 = \frac{5!}{1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 120$	$n_7 = {}_5C_5 = 1$	$(1 + 2 + 0) \times 1 = 3$
Jumlah maksimum dari digit-digit n^5			398

Jadi, jumlah maksimum dari digit-digit n^5 adalah

$s(n^5) = 5 + 100 + 20 + 60 + 90 + 120 + 3 = 398$

20. **Jawaban : 5**

Perhatikan ilustrasi $\triangle ABC$ berikut.



Karena AD membagi sudut A sama besar, maka menurut sifat garis bagi berlaku:

$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow BD = \frac{12}{5}$ dan $CD = \frac{13}{5}$

Perhatikan,

Misal, $\angle MPB = \angle PCN = x^o$ dan $\angle NPC = \angle MBP = y^o$, maka

Dengan menggunakan sudut luar segitiga diperoleh:

$\angle PMA = \angle PNA = (x + y)^o$

Perhatikan sekali lagi pada $\triangle AMP$ dan $\triangle ANP$, berlaku

- $AP = AP$ (kedua sisi berhimpit)
- $\angle MAP = \angle NAP$ (sifat garis bagi sudut)
- $\angle PMA = \angle PNA$ (sifat sudut luar segitiga)

Jadi, dengan prinsip si-su-su maka $\triangle AMP$ kongruen dengan $\triangle ANP$, sehingga, $AM = AN$

Perhatikan, karena $\triangle AMN$ adalah segitiga sama kaki, maka AP selain merupakan garis bagi, maka AP juga merupakan garis berat dan garis tinggi $\triangle AMN$.
Oleh karena itu, $AP \perp MN$ dan $MP = PN$.

Perhatikan, $\angle MBD = \angle MPD = 90^o$, sehingga
misal, $MB = y \Rightarrow NC = y + 1$ dan $MP = x$
maka,

$$MD^2 = MB^2 + BD^2 \Rightarrow MD^2 = y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$$
$$MD^2 = MP^2 + PD^2 \Rightarrow MD^2 = x^2 + PD^2$$

Dengan menggunakan kesamaan pada kedua persamaan di atas, maka diperoleh:
$$y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = x^2 + PD^2 \Rightarrow PD^2 = y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 - x^2$$

Padahal, $\triangle BMP$ sebangun $\triangle PNC$, sehingga
$$\frac{BM}{MP} = \frac{PN}{NC} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2 = y^2 + y$$

Substitusikan $x^2 = y^2 + y$ ke $PD^2 = y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 - x^2$, sehingga diperoleh:
$$PD^2 = y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 - (y^2 + y) \Rightarrow PD^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 - y$$
$$\Leftrightarrow PD^2 = \frac{144}{25} - y$$

Perhatikan, pada $\triangle APM$ berlaku,
$$AP^2 = AM^2 - MP^2 \Rightarrow AP^2 = (12 - y)^2 - x^2$$
$$\Leftrightarrow AP^2 = 144 - 24y + y^2 - (y^2 + y)$$
$$\Leftrightarrow AP^2 = 144 - 25y$$
$$\Leftrightarrow AP^2 = 25\left(\frac{144}{25} - y\right)$$
$$\Leftrightarrow AP^2 = 25 \cdot PD^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{AP^2}{PD^2} = 25$$
$$\Leftrightarrow \frac{AP}{PD} = 5$$