PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2016

1. **Jawaban : 11847**

   $e \leq 99 \Rightarrow d < 495$

   $d \leq 494 \Rightarrow c < 1976$

   $c \leq 1975 \Rightarrow b < 5925$

   $b \leq 5924 \Rightarrow a < 11848$

   Jadi, nilai maksimum a adalah 11847.

2. **Jawaban :** $\frac{1}{45}$

   Misalkan bilangan yang dibuat Rudi adalah $10a + b$. Diketahui bahwa

   $$10a + b \equiv 3 \bmod 7 \Leftrightarrow 3a + b \equiv 3 \bmod 7$$

   karena $a, b \in \{2, 3, 5, 7\}$ maka tinggal dibagi kasus

   - $a = 2$, diperoleh $6 + b \equiv 3 \bmod 7 \Leftrightarrow b \equiv 4 \bmod 7$. Tidak ada nilai b yang memenuhi.
   - $a = 3$, diperoleh $9 + b \equiv 3 \bmod 7 \Leftrightarrow b \equiv 1 \bmod 7$. Tidak ada nilai b yang memenuhi.
   - $a = 5$, diperoleh $15 + b \equiv 3 \bmod 7 \Leftrightarrow b \equiv 2 \bmod 7$. Diperoleh $b = 2$.
   - $a = 7$, diperoleh $21 + b \equiv 3 \bmod 7 \Leftrightarrow b \equiv 3 \bmod 7$. Diperoleh $b = 3$.

   Jadi, ada dua bilangan yang memiliki sifat kedua digit penyusunnya berupa bilangan prima dan bilangan tersebut bersisa 3 jika dibagi 7 yaitu 52 dan 73. Sehingga peluangnya adalah $\frac{2}{90} = \frac{1}{45}$.

3. **Jawaban :** $3\sqrt{3}$

   Dengan Dalil Stewart diperoleh

$$AB^2 \times MC + AC^2 \times BM = AM^2 \times BC + BC \times BM \times MC$$

$$\Leftrightarrow 49 \times 6 + AC^2 \times 5 = 9 \times 11 + 11 \times 5 \times 6$$

$$\Leftrightarrow 5AC^2 = 135$$

$$\Leftrightarrow AC = 3\sqrt{3}$$

4. **Jawaban : 500**

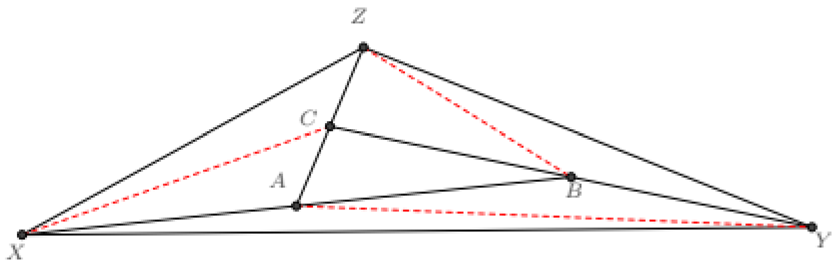
$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 20 \Rightarrow a = b + 40\sqrt{b} + 400$, sehingga

$$a - 5b = b + 40\sqrt{b} + 400 - 5b = -4(\sqrt{b} - 5)^2 + 500$$

Oleh karena itu, nilai maksimum dari $a - 5b$ adalah 500, dicapai ketika $a = 625$ dan $b = 25$.

5. **Jawaban : 7**

Perhatikan gambar berikut!



Kita punya

$$[ABC] = [ABY] = [AXY]$$

$$[ABC] = [BCZ] = [BZY]$$

$$[ABC] = [ACX] = [CZX]$$

Sehingga $[XYZ] = 7[ABC] = 7$.

6. **Jawaban : 34**

Misalkan $a < n$ adalah faktor positif dari n sehingga $a + n = 2016$. Perhatikan bahwa a membagi 2016. Sehingga a adalah faktor positif dari 2016. Karena $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$ maka faktor positif dari 2016 ada sebanyak $6 \times 3 \times 2 = 36$. Dan karena $n = 2016 - a \geq 1$ serta $a < n$ maka $a \neq 2016$ dan $a \neq 1008$. Sehingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi ada $36 - 2 = 34$.

7. **Jawaban : $a = 3$**

Jelas $c \neq 0$. Karena $(x - c)^2$ faktor dari $p(x)$ maka diperoleh

$$x^4 + 4x + a = (x^2 - 2cx + c^2)(x^2 + bx + \frac{a}{c^2})$$

dengan menjabarkan ruas kanan diperoleh

$$x^4 + 4x + a = x^4 + (b - 2c)x^3 + (\frac{a}{c^2} - 2bc + c^2)x^2 + \left(bc^2 - \frac{2a}{c}\right)x + a$$

Oleh karena itu,

$$b - 2c = 0 \Rightarrow b = 2c$$

$$\frac{a}{c^2} - 2bc + c^2 = 0 \Rightarrow a = 3c^4$$

$$bc^2 - \frac{2a}{c} = 4 \Rightarrow c^3 =- 1 \Rightarrow c =- 1$$

sehingga $a = 3c^4 = 3$.

8. **Jawaban : 41**

Misalkan n menyatakan jumlah anak laki-laki dan misalkan pula tempat duduk diantara dua laki-laki yang berdekatan kita sebut sebagai ruang. Jika $n \geq 8$ maka ada minimal 8 ruang yang bisa ditempati oleh anak perempuan. Sementara itu, jumlah anak perempuan maksimal ada 40. Jadi, kita dapat mengatur anak perempuan tersebut ke dalam ruang-ruang sehingga tiap ruang maksimal ada 5 anak perempuan.

Jika $n = 7$ maka ada 7 ruang yang bisa ditempati oleh 41 anak perempuan. Berdasarkan PHP pasti ada setidaknya satu ruang yang ditempati oleh setidaknya 6 anak perempuan.

Jadi, jumlah anak perempuan minimum ada 41.

9. **Jawaban : 360**

Karena $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, dan $a + c + e > b + d + f$ maka $6 \leq b + d + f \leq 10$. WLOG $a < c < e$ dan $b < d < f$.

- Jika $b + d + f = 6$ maka $(b, d, f) = (1, 2, 3)$ dan $(a, c, e) = (4, 5, 6)$.
- Jika $b + d + f = 7$ maka $(b, d, f) = (1, 2, 4)$ dan $(a, c, e) = (3, 5, 6)$.
- Jika $b + d + f = 8$ maka
  – $(b, d, f) = (1, 2, 5)$ dan $(a, c, e) = (3, 4, 6)$,
  – $(b, d, f) = (1, 3, 4)$ dan $(a, c, e) = (2, 5, 6)$
- Jika $b + d + f = 9$ maka
  – $(b, d, f) = (1, 2, 6)$ dan $(a, c, e) = (3, 4, 5)$,
  – $(b, d, f) = (1, 3, 5)$ dan $(a, c, e) = (2, 4, 6)$,
  – $(b, d, f) = (2, 3, 4)$ dan $(a, c, e) = (1, 5, 6)$
- Jika $b + d + f = 10$ maka
  – $(b, d, f) = (1, 3, 6)$ dan $(a, c, e) = (2, 4, 5)$,
  – $(b, d, f) = (1, 4, 5)$ dan $(a, c, e) = (2, 3, 6)$,
  – $(b, d, f) = (2, 3, 5)$ dan $(a, c, e) = (1, 4, 6)$

Jadi, pasangan (a, b, c, d, e, f) yang memenuhi ada sebanyak $10 \times 3! \times 3! = 360$.

10. **Jawaban : 31**

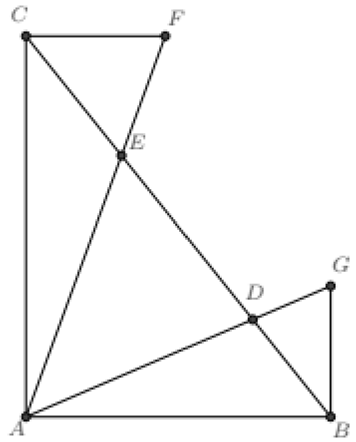
Misalkan $n_1 = a$ dan beda barisan aritmatika tersebut adalah b dengan $a, b > 0$.

$$n_{n2} - n_{n1} = n_{a+b} - n_a = a + (a + b - 1)b - (a + (a - 1)b) = b^2$$

karena $31^2 < 1000 < 32^2$ maka banyaknya nilai yang mungkin dari $n_{n2} - n_{n1}$ adalah 31.

11. **Jawaban :** 45^o

Buat garis melalui B sejajar AC yang memotong perpanjangan AD di G. Demikian pula, buat garis melalui C sejajar AB yang memotong perpanjangan AE di F, seperti gambar berikut.



Dengan memanfaatkan kesebangunan antara $\triangle BDG$ dan $\triangle ADC$ diperoleh $BG = \frac{8}{21} \times 21 = 8$ Dengan cara serupa diperoleh pula $CF = 9$. Misalkan $\angle CAF = \beta$ dan $\angle BAG = \alpha$. Maka diperoleh

$$\tan \alpha = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \text{ dan } \tan \beta = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned}\tan \angle DAE &= \tan(90 - (\alpha + \beta)) \\ &= \cot(\alpha + \beta)) \\ &= \frac{1}{tan(\alpha + \beta))} \\ &= \frac{1 - tan\,\alpha\, tan\,\beta}{tan\,\alpha + tan\,\beta} \\ &= \frac{1 - \frac{2}{5} \times \frac{3}{7}}{\frac{2}{5} + \frac{3}{7}} \\ &= \frac{35 - 6}{14 + 15} = 1\end{aligned}$$

Jadi, $\angle DAE = 45^\circ$

12. **Jawaban** : $t = \frac{9}{8}$

$$3t = 3x + 3y + 3z = 3x + 3y + x^2 + 2y^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{27}{8}$$

Agar memiliki penyelesaian tunggal maka haruslah $3t = -\frac{27}{8} \Leftrightarrow t = -\frac{9}{8}$

13. **Jawaban : 47874**

Misalkan palindrom lima digit tersebut adalah $n = \overline{abcba} = 10001a + 1010b + 100c$. Karena habis dibagi $303 = 3 \times 101$ maka

$$n = 10001a + 1010b + 100c \equiv 2a - c \equiv 0 \bmod 101$$

dan

$$n = 10001a + 1010b + 100c \equiv 2a + 2b + c \equiv 0 \bmod 3$$

karena $2a - c \equiv 0 \bmod 101$ dan $-9 \le 2a - c \le 18$ maka $2a - c = 0 \Rightarrow c = 2a$. Agar n maksimal pilih $a = 4$. Akibatnya

$$2a + 2b + c \equiv 0 \bmod 3 \Leftrightarrow 16 + 2b \equiv 0 \bmod 3 \Leftrightarrow b \equiv 1 \bmod 3$$

maka nilai b terbesar adalah $b = 7$. Jadi, $n = 47874$.

14. **Jawaban : 43**

Perhatikan bahwa

$$a_k b_k = \frac{1}{k\sqrt{k}} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{k}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)+k\sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

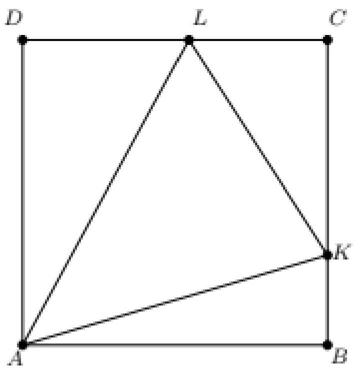
Sehingga

$$S_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Agar S_n bernilai rasional maka $n + 1$ harus berupa bilangan kuadrat. Mengingat $2 \leq n + 1 \leq 2017$, dan 442 < 2017 < 452, maka nilai n yang mungkin ada sebanyak 43.

15. **Jawaban :** $\sqrt{2} - 1$

Perhatikan gambar berikut.



Misalkan $CK = a$ dan $CL = b$ dengan $0 < a,\ b < 1$. Karena keliling $\triangle KCL = 2$ diperoleh

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow a + b + \sqrt{(a + b)^2 - 2ab} = 2$$

misalkan $a + b = x$ dan $ab = y$ dengan $0 < x < 2$ dan $0 < y < 1$ diperoleh

$$x + \sqrt{x^2 - 2y} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2y = 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

selain itu berdasarkan *AM - GM* diperoleh pula $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow x \geq 2\sqrt{y}$. Yang berakibat

$$x \geq 2\sqrt{2x - 2} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 \geq 0$$

sehingga $x \leq 4 - 2\sqrt{2}$ atau $x \geq 4 + 2\sqrt{2}$. Akan tetapi, karena x < 2 maka diperoleh

$$x \leq 4 - 2\sqrt{2}.$$

Di lain pihak

$$[AKL] = 1 - [ABK] - [KCL] - [ADL]$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}(1 - a) - \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{2}(1 - b)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b - ab)$$

$$= \frac{1}{2}(x - y)$$

$$= \frac{1}{2}(2 - x) \geq \frac{1}{2}(2 - (4 - 2\sqrt{2})) = \sqrt{2} - 1$$

Jadi, luas $\triangle AKL$ minimal adalah $\sqrt{2} - 1$ yang dicapai saat $a = b = 2 - \sqrt{2}$

16. **Jawaban : 35**

WLOG $a \leq b \leq c$, maka diperoleh $c < 2a$.

a) Jika $a = 1$ maka $c = 1$ dan $b = 1$, maka diperoleh pasangan (1, 1, 1).

b) Jika $a = 2$ maka
- $c = 2$ dan b = 2, diperoleh pasangan (2, 2, 2)
- $c = 3$ dan b = 2, 3, diperoleh pasangan (2, 2, 3) dan (2, 3, 3) ada sebanyak $2 \times 3 = 6$ pasangan.

c) Jika $a = 3$ maka
- $c = 3$ dan $b = 3$, diperoleh pasangan (3, 3, 3)
- $c = 4$ dan $b = 3, 4$, diperoleh pasangan (3, 3, 4) dan (3, 4, 4) ada sebanyak $2 \times 3 = 6$ pasangan.
- $c = 5$ dan $b = 3, 4, 5$, diperoleh pasangan (3, 3, 5),(3, 4, 5) dan (3, 5, 5) ada sebanyak $3 + 6 + 3 = 12$ pasangan.

d) Jika $a = 4$ maka
- $c = 4$ dan $b = 4$, diperoleh pasangan (4, 4, 4)
- $c = 5$ dan $b = 4, 5$, diperoleh pasangan (4, 4, 5) dan (4, 5, 5) ada sebanyak $2 \times 3 = 6$ pasangan.

e) Jika $a = 5$ maka $c = 5$ dan $b = 5$, maka diperoleh pasangan (5, 5, 5).

Jadi, total ada $1 + 7 + 19 + 7 + 1 = 35$ pasangan.

17. **Jawaban : 516**

Perhatikan bahwa $x^2 = n - [x]^2$ sehingga x^2 adalah bilangan bulat positif. Oleh karena itu, $x = \sqrt{a}$ untuk suatu bilangan a bulat positif. Misalkan $a = k^2 + m$ dengan $0 \leq m \leq 2k$, maka diperoleh

$$n = k^2 + m + k^2 = 2k^2 + m$$

Untuk $k = 1, 2, 3, \cdots, 21$ maka nilai n yang mungkin ada sebanyak

$$\sum_{k=1}^{21} (2k + 1) = 483$$

Sedangkan untuk k = 22 perlu diperhatikan bahwa nilai m yang mungkin hanya $m = 0, 1, 2, 3, \cdots, 32$. Jadi ada 33 nilai n yang mungkin.

Untuk $k \geq 23$ akan berakibat $n > 1000$.

Jadi, total banyaknya kemungkinan nilai n adalah $483 + 33 = 516$.

18. **Jawaban :** $\frac{1}{3^8}$

Misalkan

$$3\, log_x(3y) = 3\, log_{3x}(27z) = log_{3x^4}(81yz) = k$$

Berdasarkan definisi fungsi logaritma diperoleh

$$log_x(3y) = \frac{k}{3} \Rightarrow 3y = x^{\frac{k}{3}} \Rightarrow x^k = 3^3y^3 \text{ .... } (1)$$

$$log_{3x}(27z) = \frac{k}{3} \Rightarrow 27z = (3x)^{\frac{k}{3}} \Rightarrow (3x)^k = 3^9z^3 \text{ .... } (2)$$

$$log_{3x^4}(81yz) = k \Rightarrow 81yz = (3x^4)^k \text{ .... } (3)$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{x^k \cdot 3^k \cdot x^k}{3^k \cdot x^{4k}} = \frac{3^3y^3 \cdot 3^9z^3}{3^4yz} \Leftrightarrow \frac{1}{x^{2k}} = 3^8y^2z^2 \Leftrightarrow x^k = \frac{1}{3^4yz}$$

Dari pers.(1) diperoleh

$$\frac{1}{3^4yz} = 27y^3 \Rightarrow y^4z = \frac{1}{3^7}$$

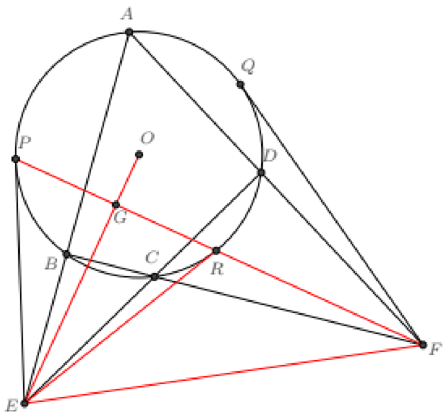
Dari pers.(3) diperoleh

$$(3x^4)^k = \left(\frac{1}{x}\right)^k \Rightarrow 3x^4 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^5 = \frac{1}{3}$$

Jadi, $x^5y^4z = \frac{1}{3^8}$

19. **Jawaban : 87**

Misalkan *ER* adalah garis singgung (lain) yang ditarik dari titik *E*. Misalkan *O* adalah pusat lingkaran *Γ*, dan *G* perpotongan antara *EO* dan *PR*, seperti terlihat pada gambar berikut



Jelas bahwa *PG* = *GR*. Perhatikan pula bahwa *P, R, F* segaris. Hal ini karena *PR* adalah polar dari *E*, sementara itu *F* juga terletak pada polar *E*.

Selanjutnya dengan dalil phytagoras pada $\triangle EPG$ dan $\triangle EFG$ diperoleh

$$EP^2 - PG^2 = EF^2 - FG^2$$

$$\Leftrightarrow EP^2 - PG^2 = EF^2 - (GR + RF)^2$$

$$\Leftrightarrow EP^2 - PG^2 = EF^2 - (PG + RF)^2$$

$$\Leftrightarrow EP^2 - PG^2 = EF^2 - PG^2 - 2 \times PG \times RF - RF^2$$

$$\Leftrightarrow EP^2 = EF^2 - RF(2 \times PG + RF)$$

$$\Leftrightarrow EP^2 = EF^2 - RF \times PF)$$

$$\Leftrightarrow EP^2 = EF^2 - FQ^2$$

$$\Leftrightarrow EF = p602 + 632 = 87$$