



PEMBAHASAN  
OSK MATEMATIKA SMA  
TAHUN 2015

1. **Jawaban : 8**

Karena  $2015 = 5 \times 13 \times 31$  maka banyaknya faktor positif dari 2015 adalah  $(1 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 8$ .

2. **Jawaban :  $\frac{56}{6^6}$**

Untuk mencari banyak cara memperoleh jumlah mata dadu sama dengan 9 ekuivalen dengan mencari koefisien  $x^9$  dari  $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6$ .

Perhatikan bahwa

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x(1 + x^3)(1 + x + x^2)$$

sehingga

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6 = x^6(1 + x^3)^6(1 + x + x^2)^6$$

$x^9$  dapat diperoleh dengan dua cara yaitu,

- mengalikan  $x^6$ , suku  $x^3$  dari penjabaran  $(1 + x^3)^6$  dan suku konstan dari penjabaran  $(1 + x + x^2)^6$ . Padahal koefisien  $x^3$  dari penjabaran  $(1 + x^3)^6$  adalah 6 dan konstanta dari  $(1 + x + x^2)^6$  adalah 1. Jadi, diperoleh koefisien  $x^9$  adalah  $1 \times 6 \times 1 = 6$ .
- mengalikan  $x^6$ , suku konstan dari penjabaran  $(1 + x^3)^6$  dan suku  $x^3$  dari penjabaran  $(1 + x + x^2)^6$ . Mudah dilihat bahwa konstanta dari penjabaran  $(1 + x^3)^6$  adalah 1 dan (dengan sedikit usaha dan bantuan binom newton) diperoleh koefisien  $x^3$  dari penjabaran  $(1 + x + x^2)^6$  adalah 50. Jadi, diperoleh koefisien  $x^9$  adalah  $1 \times 1 \times 50 = 50$ .

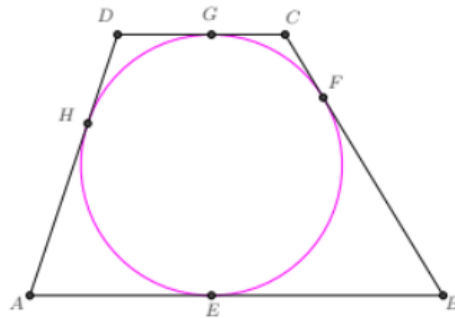
Total dari dua cara di atas diperoleh koefisien  $x^9$  adalah 56. Oleh karena itu, peluang muncul jumlah mata dadu 9 adalah  $\frac{56}{6^6}$ .

3. **Jawaban : 4**

$$f(2) = f(g(3)) = \frac{26}{4} = 4$$

4. **Jawaban : 218**

Misalkan lingkaran dalam menyinggung sisi-sisi trapesium  $ABCD$  berturut-turut di  $E, F, G, H$ , seperti terlihat pada gambar di bawah ini.



Dengan memanfaatkan sifat garis singgung diperoleh  $AE = AH$ ,  $BE = BF$ ,  $CG = CF$  dan  $DG = DH$ . Hal ini berakibat keliling trapesium  $ABCD$  sama dengan

$$2(AB + CD) = 2(84 + 25) = 218$$

5. **Jawaban : 15**

Misalkan  $a_1 = a$  dan rasio barisan geometri tersebut adalah  $r$ , sehingga diperoleh  $a + ar^3 = 20$ . Jika  $r = 1$  diperoleh  $a = 10$  dan jumlah  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 60$ . Untuk selanjutnya kita anggap  $r \neq 1$ .

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 &= \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} \\ &= \frac{a(r^3 + 1)(r - 1)(r^2 + r + 1)}{r - 1} \\ &= 20(r^2 + r + 1) \end{aligned}$$

$$= 20 \left( \left( r + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right) \geq 20 \times \frac{3}{4} = 15$$

Jadi, nilai minimum dari  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$  adalah 15, diperoleh saat suku pertama sama dengan  $\frac{160}{7}$  dan rasio  $-\frac{1}{2}$ .

## 6. Jawaban : 2

Dari keterangan soal diperoleh

$$1500 < 11x < 2000 \Leftrightarrow 137 \leq x \leq 181$$

$$970 < 7x < 1275 \Leftrightarrow 139 \leq x \leq 182$$

$$690 < 5x < 900 \Leftrightarrow 139 \leq x \leq 179$$

Jadi, didapat  $139 \leq x \leq 179$ . Sedangkan bilangan bulat yang habis dibagi 15 dalam interval  $[139, 179]$  adalah

$$\left\lceil \frac{179}{15} \right\rceil - \left\lceil \frac{139}{15} \right\rceil = 11 - 9 = 2$$

## 7. Jawaban : 6912

Karena kondisi soal maka (mau tidak mau) tiap siswa dari masing-masing kelompok belajar harus duduk berdampingan. Oleh karena itu banyaknya cara menyusun cara duduk siswa - siswa tersebut yaitu

$$(5 - 1)! \times 2! \times 2! \times 2! \times 3! \times 3! = 6912$$

## 8. Jawaban : 52

Misalkan  $B(0, 0)$ ,  $A(0, 5)$  dan  $C(12, 0)$ , maka diperoleh persamaan lingkaran

$$L_1: x^2 + \left( y - \frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5y = 10$$

$$L_2: (x - 6)^2 + y^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x = 0$$

Dari dua persamaan di atas diperoleh  $5y = 12x$ . Substitusikan kembali hasil ini ke pers. pertama diperoleh

$$x^2 + \left(\frac{12x}{5}\right)^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \cdot 25}{169}$$

Sehingga

$$BP = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12x} = \sqrt{\frac{12^2 \cdot 25}{169}} = \frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13}$$

Jadi,

$$\frac{240}{BP} = 240 \cdot \frac{13}{60} = 52$$

9. **Jawaban:**  $\frac{1}{2}\sqrt{21}$

Misalkan  $a + b = x$  dan  $ab = y$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &= 6 \Leftrightarrow (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = 6 \\ &\Leftrightarrow ((a + b)^2 - 2ab)^2 - a^2b^2 = 6 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2y)^2 - y^2 = 6 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 &= 4 \Leftrightarrow (a + b)^2 - ab = 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 - y = 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 = y + 4 \end{aligned}$$

Dari dua persamaan terakhir didapat

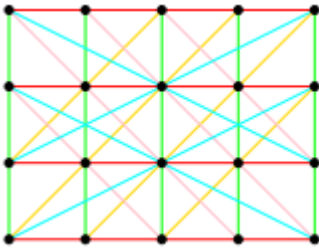
$$8y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}$$

Sehingga

$$x = \sqrt{y + 4} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{21}$$

10. **Jawaban :** 1056

Total segitiga yang dapat dibentuk dari 20 titik tanpa ada tiga titik yang segaris adalah  $\binom{20}{3} = 1140$ . Namun pada kenyataannya, dari 20 titik yang diberikan banyak titik yang segaris. Rinciannya sebagai berikut :



- 5 titik segaris sebanyak 4 baris (garis warna merah). Kontribusi dalam membentuk segitiga ada sebanyak  $4 \times \binom{5}{3} = 40$
- 4 titik segaris sebanyak 5 kolom (garis warna hijau). Kontribusi dalam membentuk segitiga ada sebanyak  $5 \times \binom{4}{3} = 40$
- Arah diagonal ke kanan juga ada beberapa titik yang segaris (garis warna orange). Kontribusi dalam membentuk segitiga ada sebanyak  $2 \times \binom{3}{3} + 2 \times \binom{4}{3} = 10$
- Arah diagonal ke kiri (garis warna ungu) jumlahnya sama dengan arah diagonal ke kanan. Jadi berkontribusi sebanyak 10.
- Empat garis penyelinap (garis warna biru). Kontribusi dalam membentuk segitiga ada sebanyak 4.

Oleh karena itu, total jumlah segitiga yang terbentuk dari susunan  $4 \times 5$  titik tersebut adalah  $1140 - (40 + 20 + 10 + 10 + 4) = 1056$

## 11. Jawaban : 1364

Misalkan  $N_n = 31^n + x \cdot 96^n$ , maka akan dicari bilangan bulat positif  $x$  sehingga  $N_n \equiv 0 \pmod{2015}$ . Akan tetapi karena  $2015 = 5 \times 13 \times 31$ , maka cukup dicari bilangan bulat positif  $x$  sehingga dipenuhi



$$N_n \equiv 0 \pmod{5}$$

$$N_n \equiv 0 \pmod{13}$$

$$N_n \equiv 0 \pmod{31}$$

Dari  $N_n \equiv 0 \pmod{5}$  diperoleh

$$31^n + x \cdot 96^n \equiv 0 \pmod{5}$$

$$1 + x \equiv 0 \pmod{5}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

Sedangkan dari  $N_n \equiv 0 \pmod{13}$  diperoleh

$$31^n + x \cdot 96^n \equiv 0 \pmod{13}$$

$$5^n + x \cdot 5^n \equiv 0 \pmod{13}$$

$$5^n(1 + x) \equiv 0 \pmod{13}$$

$$1 + x \equiv 0 \pmod{13}$$

$$x \equiv 12 \pmod{13}$$

Terakhir dari  $N^n \equiv 0 \pmod{31}$  didapat

$$31^n + x \cdot 96^n \equiv 0 \pmod{31}$$

$$x \equiv 0 \pmod{31}$$

Pada akhirnya diperoleh persamaan kongruensi

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

$$x \equiv 12 \pmod{13}$$





$$x \equiv 0 \pmod{31}$$

Silahkan dicoba sendiri menyelesaikan persamaan di atas (tidak susah, relatif mudah). Nanti didapat  $x \equiv 1364 \pmod{2015}$ . Jadi, nilai terkecil dari  $x$  adalah 1364.

## 12. Jawaban : {-5, -3, 0, 1, 4, 6}

Gunakan pembagian polinom secara sintetik, diperoleh

$$p(n) = n^6 + 2n^5 + 2n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 2 + \frac{2015}{n^2 - n + 1}$$

Mengingat  $n^2 - n + 1 > 0$  maka  $n^2 - n + 1$  adalah faktor positif dari 2015. Ada 8 kemungkinan, silahkan dikuli. Ada enam nilai  $n$  yang memenuhi yaitu  $\{-5, -3, 0, 1, 4, 6\}$ .

## 13. Jawaban : 2625

Perhatikan bahwa

$$P(a) + a = P(b) + b = P(c) + c = a + b + c = 5$$

Misalkan  $Q(x) = P(x) + x - 5 = Ax^3 + Bx^2 + (C + 1)x - 2020$ , maka  $a, b, c$  adalah akar-akar dari  $Q(x)$ . Akibatnya

$$Ax^3 + Bx^2 + (C + 1)x - 2020 = A(x^3 - 5x^2 - 9x + 10)$$

Sehingga diperoleh  $A = -202$ . Selanjutnya diperoleh pula nilai  $B = 1010$ ,  $C = 1817$ . Jadi,  $A + B + C = (-202) + 1010 + 1817 = 2625$ .

## 14. Jawaban : 2

Berdasarkan teorema garis bagi diperoleh  $\frac{CE}{EA} = \frac{5}{4}$ . Dan berdasarkan Ceva didapat

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$$

Sehingga

$$CD = \frac{5}{9} \cdot 5 = \frac{25}{9} = \frac{m^2}{n^2}$$

Jadi,  $m - n = 5 - 3 = 2$ .

## 15. Jawaban : 17

Karena  $a - b$  prima maka  $FPB(a, b) = 1$ . Di sisi lain,  $ab$  adalah kuadrat sempurna, sehingga  $a$  dan  $b$  keduanya juga bilangan kuadrat. Misalkan  $a = k^2$  dan  $b = m^2$  untuk suatu bilangan asli  $k, m$ . Mengingat  $a - b = p$  dengan  $p$  prima ganjil, diperoleh

$$p = k^2 - m^2 = (k + m)(k - m)$$

sehingga  $k + m = p$  dan  $k - m = 1$  yang berarti  $k = \frac{p+1}{2}$  dan  $m = \frac{p-1}{2}$ .

Terakhir didapat

$$n = a + b = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+1}{2} \leq 2015$$

sehingga  $p \leq 63$ .

Oleh karena itu, banyaknya bilangan asli  $n$  yang memenuhi sama dengan banyaknya bilangan prima ganjil kurang dari 63 yaitu ada 17.

## 16. Jawaban : $36^0$

Misalkan  $\angle BAC = \alpha$ ,  $|AB| = |AC| = |CD| = x$  dan  $|BC| = y$ . Dari

$$\frac{1}{|CD|} - \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{|CD|+|BD|}$$

diperoleh

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2x+y}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + xy = x^2$$

Bagi dengan  $y^2$  dan misalkan  $\frac{x}{y} = a$ , diperoleh

$$1 + a = a^2 \Leftrightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dengan aturan cosinus pada  $\triangle ABC$  diperoleh

$$y^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \alpha$$





$$1 = 2a^2 - a^2 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2a^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Jadi,  $\angle BAC = \alpha = 36^\circ$ .

## 17. Jawaban : 81

Untuk bilangan-bilangan 1, 2, 3, masing-masing ambil mod 3 sehingga kita dapatkan 1, -1, 0. Ada 4 cara untuk mengatur bilangan-bilangan ini dalam baris/kolom, yaitu

0, 0, 0

1, 1, 1

-1, -1, -1

-1, 0, 1

Selanjutnya kita ambil dua-dua untuk digunakan sebagai pengisi baris satu dan dua. Ada 10 kemungkinan

- Ambil 0, 0, 0 dan 0, 0, 0 untuk mengisi baris satu dan dua. Obviously, baris tiga ya 0, 0, 0. Ada 1 cara.
- Ambil 1, 1, 1 dan 1, 1, 1 untuk mengisi baris satu dan dua. Obviously, baris tiga ya 1, 1, 1. Ada 1 cara.
- Ambil -1, -1, -1 dan -1, -1, -1 untuk mengisi baris satu dan dua. Obviously, baris tiga -1, -1, -1. Ada 1 cara.
- Ambil 0, 0, 0 dan 1, 1, 1 untuk mengisi baris satu dan dua. Tentu saja, baris tiga ya -1, -1, -1. Namun, karena posisi antara 0, 0, 0 dan 1, 1, 1 dapat ditukar antara baris satu dan dua maka ada 2 cara.





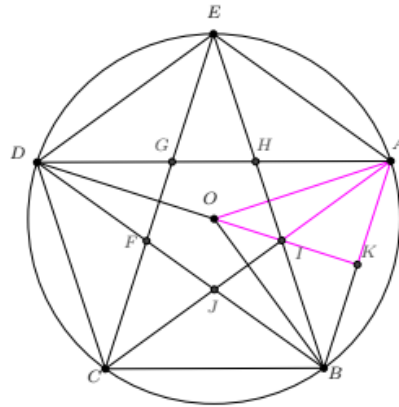
- e. Ambil 0, 0, 0 dan -1, -1, -1 untuk mengisi baris satu dan dua. Dan pasti, baris tiga ya 1, 1, 1. Sekali lagi, karena posisi antara 0, 0, 0 dan -1, -1, -1 dapat ditukar antara baris satu dan dua maka ada 2 cara.
- f. Ambil 1, 1, 1 dan -1, -1, -1 untuk mengisi baris satu dan dua. Sedang baris tiga ya pasti 0, 0, 0. Sekali lagi, karena posisi antara 1, 1, 1 dan -1, -1, -1 dapat ditukar antara baris satu dan dua maka ada 2 cara.
- g. Ambil 0, 0, 0 dan -1, 0, 1 untuk mengisi baris satu dan dua. Untuk mengisi baris tiga akan tepat ada satu cara untuk setiap cara pengisian baris satu dan baris dua yang diberikan.  
Untuk kasus ini banyaknya cara ada sebanyak  $2 \times 3! = 12$  cara.
- h. Ambil 1, 1, 1 dan -1, 0, 1 untuk mengisi baris satu dan dua. Untuk mengisi baris tiga akan tepat ada satu cara untuk setiap cara pengisian baris satu dan baris dua yang diberikan.  
Untuk kasus ini banyaknya cara ada sebanyak  $2 \times 3! = 12$  cara.
- i. Ambil -1, -1, -1 dan -1, 0, 1 untuk mengisi baris satu dan dua. Untuk mengisi baris tiga akan tepat ada satu cara untuk setiap cara pengisian baris satu dan baris dua yang diberikan.  
Untuk kasus ini banyaknya cara ada sebanyak  $2 \times 3! = 12$  cara.
- j. Ambil -1, 0, 1 dan -1, 0, 1 untuk mengisi baris satu dan dua. Untuk mengisi baris tiga akan tepat ada satu cara untuk setiap cara pengisian baris satu dan baris dua yang diberikan.  
Untuk kasus ini banyaknya cara ada sebanyak  $3! \times 3! = 36$  cara.

Jadi, total ada  $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 12 + 12 + 12 + 36 = 81$  cara.

## 18. Jawaban :

Perhatikan gambar dibawah ini!





Tanpa mengurangi keumuman misal  $OA = 4$ , karena  $\angle AOK = 36^\circ$  maka  $OK = 1 + \sqrt{5}$ . Dengan rumus pitagoras pada  $\triangle AOK$  diperoleh  $AK = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ . Namun karena  $\angle IAK = 36^\circ$  maka  $AI = \frac{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$ . Dengan pitagoras sekali lagi pada  $\triangle AIK$  didapat  $IK = \frac{10-2\sqrt{5}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$ .

Sehingga kita peroleh

$$OI = (1 + \sqrt{5}) - \left( \frac{10-2\sqrt{5}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}} \right) = \frac{4\sqrt{5}-4}{1+5\sqrt{5}}$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{s_2} &= \left( \frac{OA}{OI} \right)^2 \\ &= \left( 4 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}-4} \right)^2 \\ &= \left( \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

19. Jawaban : 1013

Misalkan pasangan  $(a_{i-1}, a_i)$  dengan  $a_{i-1} > a_i$  kita sebut sebagai pasangan cantik. Misalkan pula  $a_{i-1} = m$  dan  $a_i = k$  dengan  $1 \leq k < m \leq 10$ . Jelas bahwa bilangan-bilangan  $1, 2, \dots, (k-1)$  pada permutasi hampir naik harus ada di kiri pasangan cantik dan bilangan-bilangan  $(m+1), (m+2), \dots, 10$  ada di kanan pasangan cantik.

Oleh karena itu kita tinggal perlu mengatur bilangan-bilangan  $(k+1), (k+2), \dots, (m-1)$ , yang tentu saja bisa terletak di kiri maupun kanan pasangan cantik. Jadi, banyaknya cara mengatur penempatan bilangan-bilangan  $(k+1), (k+2), \dots, (m-1)$  adalah  $2^{m-k-1}$  yang sekaligus ini juga merupakan jumlah permutasi hampir naik yang bisa dibentuk untuk setiap pasangan cantik terpilih.

Padahal dari bilangan-bilangan  $1, 2, 3, \dots, 10$  kita bisa memilih pasangan cantik  $(m, k)$  sebanyak  $\binom{10}{2} = 45$  dengan rincian :

- a) Pasangan dengan  $m - k - 1 = 0$  ada sebanyak 9 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada  $9 \times 2^0 = 9$
- b) Pasangan dengan  $m - k - 1 = 1$  ada sebanyak 8 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada  $8 \times 2^1 = 16$
- c) Pasangan dengan  $m - k - 1 = 2$  ada sebanyak 7 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada  $7 \times 2^2 = 28$
- d) Pasangan dengan  $m - k - 1 = 3$  ada sebanyak 6 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada  $6 \times 2^3 = 48$
- e) Pasangan dengan  $m - k - 1 = 4$  ada sebanyak 5 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada  $5 \times 2^4 = 80$
- f) Pasangan dengan  $m - k - 1 = 5$  ada sebanyak 4 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada  $4 \times 2^5 = 128$
- g) Pasangan dengan  $m - k - 1 = 6$  ada sebanyak 3 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada  $3 \times 2^6 = 192$



- h) Pasangan dengan  $m - k - 1 = 7$  ada sebanyak 2 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada  $2 \times 2^7 = 256$
- i) Pasangan dengan  $m - k - 1 = 8$  ada sebanyak 1 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada  $1 \times 2^8 = 256$

Jadi, total permutasi hampir naik yang bisa dibentuk yaitu  $9 + 16 + 28 + 48 + 80 + 128 + 192 + 256 + 256 = 1013$ .

20. **Jawaban :**  $\frac{3}{4}$

Tanpa mengurangi kerumunan kita cukup memperhatikan nilai untuk  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ . Perhatikan pada interval  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , fungsi  $g(x) = \sin x + \frac{2}{3+\sin x}$  adalah fungsi naik dengan  $0 \leq g(x) \leq \frac{3}{2}$ . Kita bagi kasus

- a. Untuk  $a \geq 0$ , maka  $f(a) = \frac{3}{2} + a \geq \frac{3}{2}$
- b. Untuk  $-\frac{3}{4} < x < 0$ , maka  $f(a) = \frac{3}{2} + a \geq \frac{3}{4}$
- c. Untuk  $x \leq -\frac{3}{4}$ , maka  $f(a) = -a \geq \frac{3}{4}$

Jadi, nilai terkecil dari  $f(a)$  adalah  $\frac{3}{4}$ .

