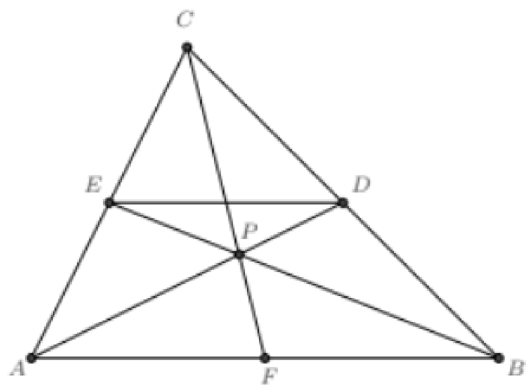
PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2014

1. **Jawaban : 3**

Perhatikan gambar berikut!



Karena D dan E adalah titik tengah BC dan AC maka DE sejajar AB. Akibatnya $\triangle ABC$ sebangun dengan $\triangle CDE$. Oleh karena itu, $DE = \frac{1}{2} \times AB = 3$.

2. **Jawaban : 13**

Misal tiga bilangan bulat positif berurutan tersebut adalah $a, a + 1, a + 2$. Dari keterangan pada soal diperoleh, bilangan-bilangan $a, a + 11, a + 2 + p$ membentuk barisan geometri.

Oleh karena itu berlaku,

$$(a + 11)^2 = a(a + 2 + p)$$

$$a^2 + 22a + 121 = a^2 + 2a + ap$$

$$a(p - 20) = 121$$

- Jika $a = 1$ maka $p - 20 = 121 \Leftrightarrow p = 141$ yang bukan prima
- Jika $a = 11$ maka $p - 20 = 11 \Leftrightarrow p = 31$

- Jika $a = 121$ maka $p - 20 = 1 \Leftrightarrow p = 21$ yang bukan prima.

Jadi diperoleh $a = 11$ dan $p = 31$, sehingga bilangan ketiga adalah 13.

3. **Jawaban : 2014**

Diketahui $a + b = 6$ dan

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 6 \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = 6 \Leftrightarrow ab = 1$$

sehingga

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1980 = \frac{a^2 + b^2}{ab} + 1980 = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} + 1980 = 36 - 2 + 1980 = 2014$$

4. **Jawaban : 1**

Perhatikan bahwa

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

Oleh karena itu,

$$\sum_{k=1}^{2014} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{2015!}$$

Sehingga

$$\frac{1}{2015!} + \sum_{k=1}^{2014} \frac{k}{(k+1)!} = 1$$

5. **Jawaban : 24**

Dengan AM-GM diperoleh

$$\frac{16sin^2 x + 9}{sin\, x} \geq \frac{2\sqrt{16sin^2 x \cdot 9}}{sin\, x} = \frac{24sin\, x}{sin\, x} = 24$$

Kesamaan diperoleh ketika $sin\, x = \frac{3}{4}$.

6. **Jawaban : 256**

Misal jika 1 menjadi digit satuan maka bilangan yang dapat dibentuk ada :

- bilangan 1 digit ada 1
- bilangan 2 digit ada 3
- bilangan 3 digit ada 6
- bilangan 4 digit ada 6

Jadi, total ada 16 bilangan. Demikian pula untuk digit-digit yang lain.

Jadi jumlah seluruh digit satuan dari semua angggota S adalah $16 \times (1 + 3 + 5 + 7) = 16 \times 16 = 256$.

7. **Jawaban : 20**

Kita ketahui

$$w = x^4, \ w = y^5 \text{ dan } w = (xyz)^2$$

akibatnya

$$w^{10} = (xyz)^{20}$$

$$w^5 \cdot w^4 \cdot w = x^{20}y^{20}z^{20}$$

$$x^{20}y^{20}w = x^{20}y^{20}z^{20}$$

$$w = z^{20}$$

sehingga ${}^{z}log\, w = 20$.

8. **Jawaban : 225 cara**

Ada tiga kemungkinan pengaturan kursi untuk ketiga meja tersebut:

a. 1 kursi, 1 kursi dan 4 kursi.

Banyaknya cara duduk untuk posisi seperti ini ada $C_2^6 \times 3! = 90$

b. 1 kursi, 2 kursi dan 3 kursi.

Banyaknya cara duduk untuk posisi seperti ini ada $C_1^6 \times C_2^5 \times 2! = 120$

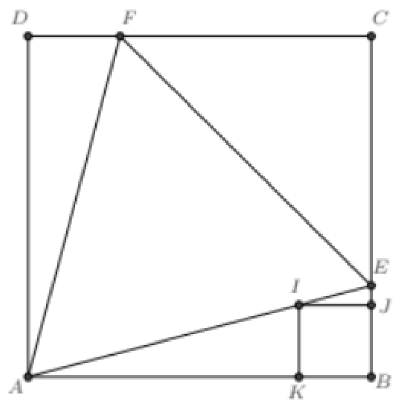
c. 2 kursi, 2 kursi dan 2 kursi.

Banyaknya cara duduk untuk posisi seperti ini ada $\frac{C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2}{3!} = 15$

Jadi, total cara mendudukan keenam siswa tersebut adalah 90 + 120 + 15 = 225.

9. **Jawaban : 12**

Perhatikan gambar berikut!



$\triangle AEF$ adalah segitiga samasisi, sehingga $\angle BAE = 15^\circ$. Mengingat $AB = 1$ dan tan $15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ maka $BE = 2 - \sqrt{3}$. Misal sisi persegi $BKIJ$ adalah s. Dengan memperhatikan bahwa $\triangle ABE$ sebangun dengan $\triangle EIJ$ diperoleh

$$\frac{1}{s} = \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}-s}$$

$$s(2 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} - s$$

$$s = \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$s = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

Jadi, nilai $a + b + c = 3 + 3 + 6 = 12$.

10. **Jawaban : 80**

Misalkan x_i menyatakan banyaknya permen warna ke-i dalam bungkusan. Jadi, permasalahan equivalen dengan mencari banyaknya solusi persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

dengan $x_i \geq 1$.

Banyaknya solusi ada sebanyak $\frac{9!}{6!3!} = 84$.

11. **Jawaban : 595**

Karena 1111, 5276, 8251 dan 9441 bersisa sama jika dibagi N maka N membagi setiap selisih antara dua bilangan tersebut. Artinya 4165, 7140, 8330, 2975 dan 1190 habis dibagi N. Sehingga nilai N terbesar adalah $FPB(4165, 7140, 8330, 2975, 1190) = 595$.

12. **Jawaban : 447**

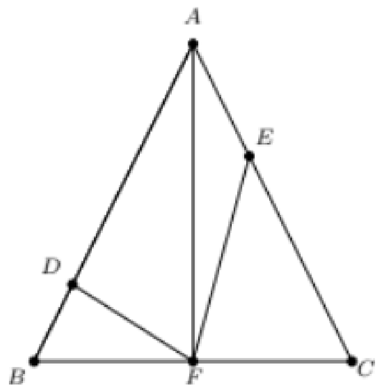
Urutan alfabetis dari OSNMAT adalah A, M, N, O, S, T. Jadi diperoleh

- Banyak susunan yang diawali huruf A ada sebanyak 5! = 120
- Banyak susunan yang diawali huruf M ada sebanyak 5! = 120
- Banyak susunan yang diawali huruf N ada sebanyak 5! = 120
- Banyak susunan yang diawali huruf O ada sebanyak :
  (a) Banyak susunan yang diawali huruf OA ada sebanyak 4! = 24
  (b) Banyak susunan yang diawali huruf OM ada sebanyak 4! = 24
  (c) Banyak susunan yang diawali huruf ON ada sebanyak 4! = 24
  (d) Banyak susunan yang diawali huruf OS ada sebanyak :
    – Banyak susunan yang diawali huruf OSA ada sebanyak 3! = 6
    – Banyak susunan yang diawali huruf OSM ada sebanyak 3! = 6
    – Banyak susunan yang diawali huruf OSN yaitu OSNAMT, OSNATM, OSNMAT

Jadi, kata OSNMAT ada di urutan $3 \times 120 + 3 \times 24 + 2 \times 6 + 3 = 447$

13. **Jawaban : 31**

Perhatikan gambar berikut!



Misal luas $\triangle ABC$ adalah L. Diperoleh

$$\text{Luas } \triangle ADF = \frac{7}{10} \times \text{Luas } \triangle ABF = \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} \times \text{Luas } \triangle ABC = \frac{7}{20}L$$

dan

$$\text{Luas } \triangle AEF = \frac{4}{10} \times \text{Luas } \triangle ACF = \frac{4}{10} \times \frac{1}{2} \times \text{Luas } \triangle ABC = \frac{4}{20}L$$

Sehingga

$$\text{Luas segiempat } ADFE = \text{Luas } \triangle ADF + \text{Luas } \triangle AEF = \frac{11}{20}L$$

Jadi, $\frac{a}{b} = \frac{11}{20} \Rightarrow a + b = 31.$

14. **Jawaban : - 2**

Misal $2x^2 + 3x + 12 = a$ maka diperoleh

$$2x^2 + 3x + 4 = 2\sqrt{2x^2 + 3x + 12}$$

$$a - 8 = 2\sqrt{a}$$

$$a^2 - 16a + 64 = 4a$$

$$a^2 - 20a + 64 = 0$$

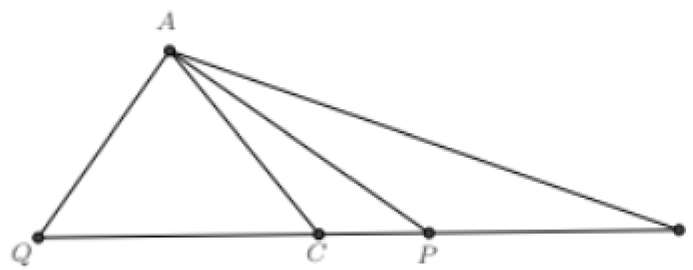
$$(a - 4)(a - 16) = 0$$

$$(2x^2 + 3x + 8)(2x^2 + 3x - 4) = 0$$

Karena $2x^2 + 3x + 8 = 0$ tidak punya akar real maka diperoleh hasil kali akar-akar real dari persamaan $2x^2 + 3x + 4 = 2\sqrt{2x^2 + 3x + 12}$ sama dengan hasil kali akar-akar dari $2x^2 + 3x + 4 = 0$ yaitu - 2.

15. **Jawaban : 160**

Perhatikan gambar berikut!



Perhatikan bahwa $\angle PAQ = 90^\circ$. Oleh karena itu panjang jari-jari lingkaran luar $\triangle PAQ$ sama dengan $\frac{1}{2}PQ$.

Dengan teorema garis bagi diperoleh,

$$\frac{PC}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{180}{360} \Leftrightarrow PB = 2PC$$

Sehingga $PC = 80$ dan $PB = 160$.

Masih dengan bantuan teorema garis bagi diperoleh pula,

$$\frac{CQ}{QB} = \frac{AC}{AB} = \frac{180}{360} \Leftrightarrow QB = 2CQ$$

Hal ini berakibat $CQ = CB = 240$. Oleh karena itu $PQ = CQ + CP = 320$. Jadi, panjang jari-jari lingkaran luar $\triangle PAQ$ adalah 160.

16. **Jawaban :**

Agar f selalu positif maka $a > 0$ dan diskriman, $b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow 4ac > b^2$. Sehingga diperoleh nilai c juga positif.

Misal $x = \frac{a+c}{b}$ maka

$$x^2 = \frac{(a+c)^2}{b^2} \geq \frac{(2\sqrt{ac})^2}{b^2} = \frac{4ac}{b^2} > \frac{b^2}{b^2} = 1$$

Jadi, $x^2 > 0 \Leftrightarrow x <- 1$ atau $x > 1$.

17. **Jawaban : (3,7) dan (19,19)**

Dari persamaan

$(7p - q)^2 = 2(p - 1)q^2)$

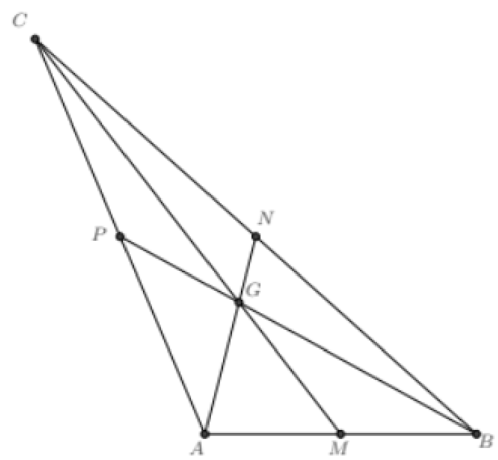
diperoleh q^2 membagi $(7p - q)^2$ yang berakibat q membagi $(7p - q)$.
Ada dua kemungkinan :

- Jika $q = 7$ diperoleh $p = 3$
- Jika $q = p$ diperoleh $p = q = 19$

Jadi, terdapat dua pasangan (p, q) yang memenuhi yaitu (3,7) dan (19,19).

18. **Jawaban :** $3\sqrt{6}$

Perhatikan gambar berikut!



Misal G adalah titik berat. Maka diperoleh $AG = 2$ dan $BG = 4$. Misal pula $AB = c$.

Karena luas $\Delta ABC = 3\sqrt{15}$ maka luas $\Delta ABG = \sqrt{15}$.

Berdasarkan rumus Heron untuk mencari luas segitiga didapat,

$$\text{Luas } \triangle ABG = \sqrt{\left(\frac{c}{2}+3\right)\left(\frac{c}{2}+1\right)\left(\frac{c}{2}-1\right)\left(3-\frac{c}{2}\right)}$$

$$\sqrt{15} = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4}-1\right)\left(9-\frac{c^2}{4}\right)}$$

$$15 = \left(\frac{c^2}{4}-1\right)\left(9-\frac{c^2}{4}\right)$$

Misal $\frac{c^2}{4} = t$ diperoleh

$$15 = (t-1)(9-t)$$

$$15 = 10t - 9 - t^2$$

$$0 = t^2 - 10t + 24$$

$$0 = (t-4)(t-6)$$

- Jika $\frac{c^2}{4} = t = 4 \Rightarrow c = 4$. Berdasarkan teorema steward diperoleh

$$\frac{AG^2+BG^2}{2} = GM^2 + \frac{1}{4}AB^2$$

$$\frac{2^2+4^2}{2} = GM^2 + \frac{1}{4}(4)^2$$

$$GM = \sqrt{6}$$

Jadi, $CM = 3GM = 3\sqrt{6}$

- Jika $\frac{c^2}{4} = t = 6 \Rightarrow c = 2\sqrt{6}$. Berdasarkan teorema steward diperoleh

$$\frac{AG^2+BG^2}{2} = GM^2 + \frac{1}{4}AB^2$$

$$\frac{2^2+4^2}{2} = GM^2 + \frac{1}{4}(2\sqrt{6})^2$$

$$GM = 2$$

Akibatnya $CM = BP \Rightarrow AC = AB$, padahal pada keterangan di soal disebutkan ketiga sisi segitiga ABC berbeda. Jadi, pada kasus ini tidak mungkin.

Oleh karena itu, panjang garis berat ketiga CM adalah $3\sqrt{6}$

19. **Jawaban :** $a = 2,\ b = 5$

Perhatikan

$$20! + 14! = 243290a0953b4931200$$

habis dibagi oleh 14! yang berarti habis dibagi 9 dan 11.

- Karena habis dibagi 9 maka 2+4+3+2+9+0+a+0+9+5+3+b+4+9+3+1+2+0+0 = $56 + a + b$ habis dibagi 9. Sehingga kemungkinan nilai $a + b$ yaitu 7 atau 16.
- Karena habis dibagi 11 maka berakibat $(2 + 3 + 9 + a + 9 + 3 + 4 + 3 + 2 + 0) - (4 + 2 + 0 + 0 + 5 + b + 9 + 1 + 0) = 14 + a - b$ habis dibagi 11.

  a. Jika $a + b = 7$ maka $14 + a - b = 21 - 2b$ agar $21 - 2b$ habis dibagi 11 maka $b = 5$ yang berakibat $a = 2$.

  b. Jika $a + b = 16$ maka $14 + a - b = 30 - 2b$. Untuk kasus nilai b yang memenuhi adalah $b = 4$ akan tetapi akan berakibat $a = 12$ yang jelas tidak mungkin.

Jadi diperoleh $a = 2$ dan $b = 5$

20. **Jawaban : {-7, -2, 2, 7}**

Karena dalam soal n berpangkat genap, kita misalkan n adalah bilangan bulat positif.

Perhatikan bahwa

$$n^4 - 51n^2 + 225 = (n^2 + 9n + 15)(n^2 - 9n + 15)$$

Jelas $n^2 + 9n + 15 > 1$ jadi haruslah $n^2 - 9n + 15 = 1 \Leftrightarrow n^2 - 9n + 14 = 0 \Leftrightarrow (n - 2)(n - 7) = 0$. Diperoleh dua kemungkinan yaitu $n = 2$ dan $n = 7$. Mudah dicek bahwa keduanya memenuhi. Demikian pula dengan $n = -7$ dan $n = -2$.

Jadi ada empat nilai n yang memenuhi yaitu {-7, -2, 2, 7}.