PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2013

1. **Jawaban : 28**

Untuk $a, b \geq 0$ berlaku

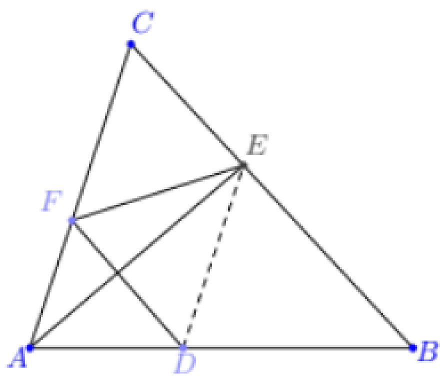
$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a + b) + 2\sqrt{ab}}$$

Padahal $94 + 2\sqrt{2013} = (61 + 33) + 2\sqrt{61 \times 33}$. Oleh karena itu, $\sqrt{94 + 2\sqrt{2013}} = \sqrt{61} + \sqrt{33}$.

Sehingga $a - b = 61 - 33 = 28$.

2. **Jawaban : 6**

Perhatikan sketsa berikut ini!



Karena Luas $\triangle ABE$ = Luas $DBFE$ berakibat Luas $\triangle ADE$ = Luas $\triangle DEF$. Padahal diketahui pula bahwa DE adalah sisi persekutuan antara $\triangle ADE$ dan $\triangle DEF$ sehingga jarak titik A ke DE sama dengan jarak titik F ke DE. Dengan kata lain, AF sejajar DE sehingga

$$\frac{CE}{EB} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$$

Oleh karena itu, Luas $\triangle ABE = \frac{3}{5} \times 10 = 6$.

3. **Jawaban : 5**

Misalkan salah satu akar bulat dari persamaan $x^{2014} - px^{2013} + q = 0$ adalah t. Maka diperoleh $t^{2014} - pt^{2013} + q = 0 \Leftrightarrow q = t^{2013}(p - t)$. Perhatikan juga bahwa -1 dan 0 bukan merupakan akar-akar persamaan $x^{2014} - px^{2013} + q = 0$. Sehingga dengan mengingat bahwa q adalah bilangan prima diperoleh $t = 1$. Oleh karena itu, $q = p - 1 \Leftrightarrow p - q = 1$. Dari keterangan ini dapat disimpulkan bahwa salah satu p, q harus genap. Dan karena bilangan prima genap hanya 2 maka kita peroleh $q = 2$ dan $p = 3$. Jadi, $p + q = 5$.

4. **Jawaban :** -3

Untuk $x = 1$ diperoleh

$$f(f(1)) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{k}{5}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{2k+15} = 1$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2k - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k - 5)(k + 3) = 0$$

Mudah di cek bahwa $k =- 3$ memenuhi kondisi $f(f(x)) = x$.

5. **Jawaban :**

- Koefisien x^{2013} dari $(1 + x)^{4026}$ adalah C^{4026}_{2013}.
- Koefisien x^{2013} dari $x(1 + x)^{4025}$ adalah C^{4025}_{2012}.
- Koefisien x^{2013} dari $x^2(1 + x)^{4024}$ adalah C^{4024}_{2011}.
- . . .
- . . .
- . . .

- Koefisien x^{2013} dari $x^{2012}(1 + x)^{2014}$ adalah C_1^{2014}.
- Koefisien x^{2013} dari $x^{2013}(1 + x)^{2013}$ adalah C_0^{2013}.

Dengan menggunakan identitas,

$$C_0^m + C_1^{m+1} + C_2^{m+2} + ... + C_k^{m+k} = C_k^{m+k+1}$$

diperoleh koefisien x^{2013} pada ekspansi

$$(1 + x)^{4026} + x(1 + x)^{4025} + x^2(1 + x)^{4024} + ... + x^{2013}(1 + x)^{2013}$$

yaitu,

$$C_0^{2013} + C_1^{2014} + ... + C_{2012}^{4025} + C_{2013}^{4026} = C_{2013}^{4027}$$

6. **Jawaban : 20**

Lakukan sedikit manupulasi aljabar sebagai berikut,

$$\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1 \Leftrightarrow \frac{2(y-x)}{xy} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{xy} = 1$$

$$\Leftrightarrow xy = 4$$

selanjutnya diperoleh,

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$= x^2 + y^2 - 2xy + 4xy$$

$$= (y - x)^2 + 4xy$$

$$= 4 + 16$$

$$= 20$$

7. **Jawaban : 210 cara**

Tanpa mengurangi keumuman misalkan tos pertama muncul angka 6. Maka pada tos kedua sampai dengan tos keenam hanya boleh muncul angka 1, 2, 3, 4, 5 dan jumlahnya 22.

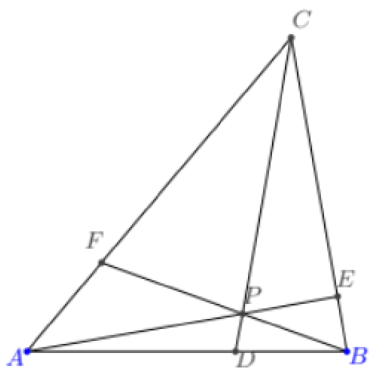
Kemungkinan yang seperti ini hanya ada tiga kasus yaitu

- Yang muncul angka : 2, 5, 5, 5, 5 yang banyaknya cara ada $\frac{5!}{4!} = 5$ cara.
- Yang muncul angka : 3, 4, 5, 5, 5 yang banyaknya cara ada $\frac{5!}{3!} = 20$ cara.
- Yang muncul angka : 4, 4, 4, 5, 5 yang banyaknya cara ada $\frac{5!}{2!\times 3!} = 10$ cara.

Sehingga total ada $5 + 20 + 10 = 35$ cara jika pada tos pertama muncul angka 6. Karena keenam tos memiliki peluang yang sama untuk muncul angka 6 berakibat total keseluruhan cara yang mungkin yaitu 6 x 35 = 210 cara.

8. **Jawaban : 80 derajat**

Perpanjang *CP, AP, BP* sehingga memotong *AB, BC, CA* berturut-turut di titik *D, E, F* seperti gambar berikut :



Mudah diperoleh bahwa $\angle\angle APB = 150^o, \angle APC = 110^o$ sehingga $\angle BPC = 100^o$. Misalkan $\angle PBC = x$ maka $\angle PCB = 80 - x$.

Berdasarkan dalil sinus pada $\triangle ADP$ dan $\triangle BDP$ diperoleh

$$\frac{AD}{Sin\ 70^o} = \frac{DP}{Sin\ 10^o} \text{ dan } \frac{BD}{Sin\ 50^o} = \frac{DP}{Sin\ 20^o}$$

sehingga

$$\frac{AD}{BD} = \frac{Sin\,70^o \cdot Sin\,20^o}{Sin\,80^o \cdot Sin\,10^o}$$

Dengan cara serupa diperoleh pula

$$\frac{BE}{EC} = \frac{Sin\,30^o \cdot Sin(80-x)^o}{Sin\,x \cdot Sin\,70^o}$$

$$\frac{CF}{FA} = \frac{Sin\,80^o \cdot Sin\,40^o}{Sin\,30^o \cdot Sin\,30^o}$$

Padahal berdasarkan teorema Ceva diperoleh

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

Substitusikan ketiga persamaan di atas sehingga didapat

$$\frac{Sin\,20^o \cdot Sin(80-x)^o \cdot Sin\,40^o}{Sin\,10^o \cdot Sin\,30^o \cdot Sin\,x} = 1$$

yang ekuivalen dengan

$$sin\,20^0 \cdot sin(80-x)^o \cdot sin\,40^o = sin\,10^o \cdot sin\,30^o \cdot sin\,x$$

$$-4 \cdot sin\,20^0 \cdot sin(80-x)^o \cdot sin\,40^o =- 2 \cdot sin\,10^o \cdot sin\,x$$

$$2(cos\,60^o - cos\,20^o)\,sin(80-x)^o = cos(x+10) - cos(x-10)$$

$$sin(80-x)^o - 2\,cos\,20^o \cdot sin(80-x)^o = cos(x+10) - cos(x-10)$$

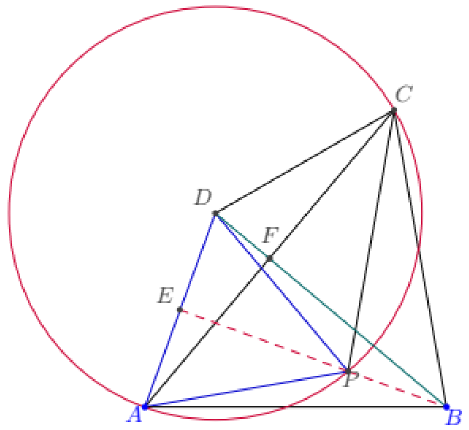
$$sin(80-x)^o - (sin(100-x) + sin(60-x)) = sin(80-x)^o - sin(100-x)$$

$$-sin(60-x) = 0$$

Karena x terletak pada kuadran pertama maka $x = 60^o$. Jadi, $\angle ABC = 20^o + x = 80^o$.

Alternatif Penyelesaian :

Misalkan D pusat lingkaran luar $\triangle ACP$ karena $\angle ADP = 2\angle ACP = 60^o$ maka $\triangle ADP$ adalah segitiga sama sisi.



$\angle CAD = \angle DAP - \angle CAP = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$. Karena $\angle APB = 150^\circ$ maka $\angle APE = 30^\circ$, sehingga $\angle EPD = 30^\circ$. Oleh karena itu, $\angle DPB = 150^\circ = \angle APB$. Hal ini berakibat $\triangle APB$ kongruen $\triangle BPD$. Sehingga $\angle BDP = \angle BAP = 10^\circ$. Selanjutnya kita diperoleh $\angle ADF = \angle ADP + \angle BDP = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$. Oleh karena itu, $\angle AFD = 90^\circ$. Dengan kata lain, $BD \perp AC$ dan karena $\triangle ADC$ adalah segitiga sama kaki dengan $AD = CD$ maka $AF = FC$. Sehingga dapat disimpulkan $\triangle ABC$ adalah segitiga sama kaki dengan $AB = BC$. Jadi, $\angle BAC = \angle ACB = 50^\circ$ yang berarti $\angle ABC = 80^\circ$.

9. **Jawaban :** $\frac{11}{60}$

Misalkan a angka dari dadu dan b angka dari kartu. Pasangan (a, b) yang menghasilkan ab bilangan prima yaitu (1, 1),(1, 4),(1, 9),(2, 2),(2, 8),(3, 3),(4, 1),(4, 4),(4, 9),(5, 5),(6, 6) yang ada 11 kemungkinan. Sedangkan kemungkinan ruang sampel adalah 60. Oleh karena itu, peluang dari hasil kali angka pada kartu dan angka pada dadu menghasilkan bilangan kuadrat adalah $\frac{11}{60}$.

10. **Jawaban : 225 cara**

Pembagian keenam siswa pada tiga meja bundar tersebut adalah sebagai berikut :

- Siswa diatur dalam kelompok 4, 1, 1. Untuk kasus ini kemungkinan cara duduk ada

$$\frac{C_4^6 \times C_1^2 \times (4-1)!}{2!} = 90$$

- Siswa diatur dalam kelompok 3, 2, 1. Untuk kasus ini kemungkinan cara duduk ada

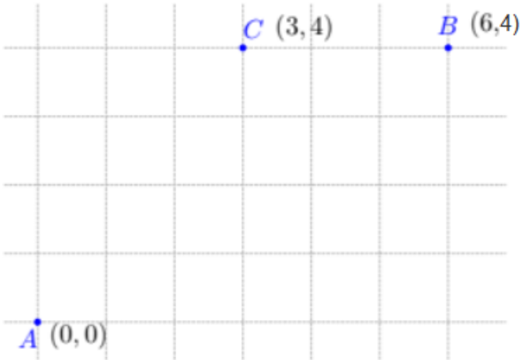
$$C_3^6 \times C_2^3 \times (3 - 1)! \times (2 - 1)! = 120$$

- Siswa diatur dalam kelompok 2, 2, 2. Untuk kasus ini kemungkinan cara duduk ada

$$\frac{C_2^6 \times C_2^4}{3!} = 15$$

Oleh karena itu, total cara mengatur tempat duduk keenam siswa tersebut adalah 90 + 120 + 15 = 225 cara.

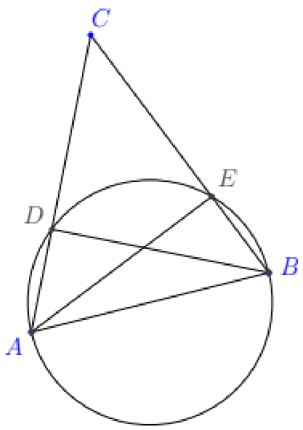
11. **Jawaban** : $\frac{81648}{5^9}$



Sebuah partikel akan bergerak dari A menuju B dengan melalui C. Dari A ke titik C banyaknya cara ada $\frac{7!}{3! \times 4!} = 35$. Sedangkan dari C ke B hanya ada satu cara. Oleh karena itu, banyak cara partikel bergerak dari A menuju B dengan melalui C ada 35 × 1 = 35 cara. Perhatikan bahwa bagaimana pun cara pertikel tersebut bergerak dari A menuju B maka dia akan selalu 6 kali bergerak searah sumbu X positif dan 4 kali bergerak searah sumbu Y positif. Jadi, besarnya peluang pertikel bergerak dari A menuju B dengan melalui C adalah $35 \times (0,6)^6 \times (0,4)^4 = \frac{81648}{5^9}$.

12. **Jawaban : 540**

Perhatikan sketsa gambar di bawah ini!



Perlu diperhatikan bahwa $\angle ADB = \angle CDB = \angle AEB = \angle AEC = 90^\circ$. Misal, $AD = x$ dan $BE = y$ maka $AC = 3x$, $CD = 2x$, $BC = 4y$ dan $CE = 3y$. Dengan teorema Phytagoras pada segitiga *ABD* dan segitiga *BCD* diperoleh

$$30^2 - x^2 = (4y)^2 - (2x)^2 \Leftrightarrow 900 - x^2 = 16y^2 - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 900 = 16y^2 - 3x^2$$

Demikian pula dengan teorema Phytagoras pada segitiga *ABE* dan segitiga *ACE* diperoleh

$$30^2 - y^2 = (3x)^2 - (3y)^2 \Leftrightarrow 900 - y^2 = 9x^2 - 9y^2$$

$$\Leftrightarrow 900 = 9x^2 - 8y^2$$

dengan menggabungkan kedua persamaan di atas didapat,

$$16y^2 - 3x^2 = 9x^2 - 8y^2 \Leftrightarrow 24y^2 = 12x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y^2$$

sehingga kita peroleh

$$900 = 16y^2 - 3x^2 = 16y^2 - 6y^2 = 10y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{90}$$

Oleh karena itu,

$$AE^2 = 900 - y^2 = 900 - 90 = 810 \Leftrightarrow AE = \sqrt{810}$$

Jadi,

$$\text{Luas segitiga } ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AE$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4y \cdot \sqrt{810}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{90}\sqrt{810}$$

$$= 2 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = 540$$

13. **Jawaban : 3**

Ingat identitas trigonometri $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 x)$. Selanjutnya lakukan sedikit manipulasi

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{8}$$

$$(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{8}(1 - \cos \alpha)$$

$$(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{4}(1 - \cos \alpha)$$

$$(1 - \cos^2 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{4}(1 - \cos \alpha)$$

$$(1 - \cos 4\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$$

$$1 - \cos^2 4\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$$

$$1 - \cos 8\alpha = 1 - \cos \alpha$$

$$\cos 8\alpha = \cos \alpha$$

Sehingga diperoleh,

- $8\alpha = \alpha + k \cdot 360^o \Leftrightarrow 7\alpha = k \cdot 360^o$.

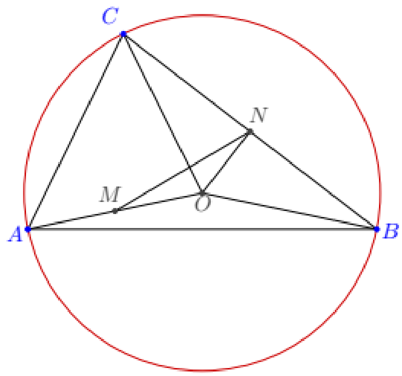
  Diperoleh $\alpha = \frac{360^o}{7}$.

- $8\alpha =- \alpha + k \cdot 360^o \Leftrightarrow 9\alpha = k \cdot 360^o \Leftrightarrow \alpha = k \cdot 40^o$.

  Diperoleh $\alpha = 40^o$ atau $\alpha = 80^0$.

Jadi, ada tiga nilai α yang memenuhi.

14. **Jawaban :** 12^o



Misalkan $\angle OMN = x$. $\triangle BOC$ adalah segitiga sama kaki. Karena $BN = NC$ maka ON adalah garis tinggi sehingga $\angle CNO = 90^\circ$ dan $\angle CON = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC = 180^\circ - 10x$. Perhatikan juga bahwa $\angle AOC = 2\angle ABC = 8x$ sehingga $\angle AON = \angle AOC + \angle CON = 8x + 180^\circ - 10x = 180^\circ - 2x$. Karena $\angle OMN = x$ dan $\angle MON = \angle AON = 180^\circ - 2x$ maka berakibat $\angle ONM = x$. Dengan kata lain $\triangle OMN$ adalah segitiga samakaki dengan $ON = OM = \frac{1}{2}OC$. Oleh karena itu, $\cos\angle CON = 12 \Leftrightarrow \angle CON = 60^\circ$. Jadi, diperoleh $180^\circ - 10x = 60^\circ \Leftrightarrow x = 12^\circ$. Maka besar $\angle OMN = 12^\circ$.

15. **Jawaban : 145**

Misalkan bilangan tersebut adalah $\overline{abc}$. Karena $\overline{abc} = a! + b! + c!$ dan $7! = 5040$ maka $a, b, c \leq 6$. Jika salah satu dari a, b, c adalah 6 maka $\overline{abc} > 6! = 720$ yang jelas tak mungkin. Jadi $a, b, c \leq 5$. Oleh karena itu $\overline{abc} \leq 5! + 5! + 5! = 360$. Sehingga $a \leq 3$. Perhatikan juga bahwa $4! + 4! + 4! = 72$. Oleh karena itu paling tidak salah satu dari a, b, c sama dengan 5.

- Jika $a = 1$, maka diperoleh $1! + 5! + 1! = 122$, $1! + 5! + 2! = 123$, $1! + 5! + 3! = 127$, $1! + 5! + 4! = 145$, $1! + 5! + 5! = 241$.. Jadi yang mungkin hanya $\overline{abc} = 145$.
- Jika $a = 2$, kedua b, c harus sama dengan 5, tetapi $2! + 5! + 5! = 242 \neq 255$. Jadi, tidak ada yang memenuhi.
- Jika $a = 3$, diperoleh $\overline{abc} \geq 300$ akan tetapi $\overline{abc} \leq 3! + 5! + 5! = 246$ yang jelas tak mungkin.

Jadi, satu - satunya bilangan tiga digit yang memenuhi adalah 145.

16. **Jawaban : 64**

Misal $t = \frac{x^2 - 2x + 7}{2x - 1}$ maka diperoleh

$$t = \frac{1}{4}\left(\frac{4x^2 - 8x + 28}{2x - 1}\right) = \frac{1}{4}\left(2x - 3 + \frac{25}{2x - 1}\right)$$

Agar diperoleh t bulat maka haruslah $(2x - 1)$ membagi 25. Ada enam kasus yang mungkin

- $2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Diperoleh $t = \frac{1}{4}(-1 + 25) = 6$.
- $2x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 3$. Diperoleh $t = \frac{1}{4}(3 + 5) = 2$.
- $2x - 1 = 25 \Leftrightarrow x = 13$. Diperoleh $t = \frac{1}{4}(23 + 1) = 6$.
- $2x - 1 =- 1 \Leftrightarrow x = 0$. Diperoleh $t = \frac{1}{4}(-3 - 25) =- 7$.
- $2x - 1 =- 5 \Leftrightarrow x =- 2$. Diperoleh $t = \frac{1}{4}(-7 - 5) =- 3$.
- $2x - 1 =- 25 \Leftrightarrow x =- 12$. Diperoleh $t = \frac{1}{4}(-27 - 1) =- 7$.

Jadi, diperoleh $S = \{-12, -2, 0, 1, 3, 13\}$ sehingga banyaknya himpunan bagian dari S adalah $2^6 = 24$.

17. **Jawaban** : $\frac{\sqrt{10}}{2}$

Jika $x = \frac{1}{y} = \frac{y}{2} + \frac{2}{x}$ maka diperoleh $xy = 1$ dan

$$x = \frac{y}{2} + \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{xy + 4}{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan nilai terbesar dari $f(x, y)$ adalah $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Untuk kasus $x \le \frac{\sqrt{10}}{2}$ atau $\frac{1}{y} \le \frac{\sqrt{10}}{2}$ jelas bahwa $f(x, y) \le \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Oleh karena itu, anggap $x > \frac{\sqrt{10}}{2}$ dan $\frac{1}{y} \le \frac{\sqrt{10}}{2}$. Untuk kasus ini diperoleh,

$$\frac{y}{2} + \frac{2}{x} < \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Jadi, diperoleh .$f(x, y) < \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Terbukti bahwa nilai terbesar dari $f(x, y)$ adalah $\frac{\sqrt{10}}{2}$ yang dicapai ketika $x = \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

18. **Jawaban : 20**

Kita kelompokkan terlebih dahulu bilangan - bilangan yang jika sebarang dua bilangan diantaranya dikalikan akan menghasilkan bilangan kuadrat sempurna, yaitu sebagai berikut

Kelompok 1	Kelompok 2	Kelompok 3	Kelompok 4	Kelompok 5	Kelompok 6
1	2	3	5	6	7
4	8	12	20	24	28
9	18	27			
16					
25					

Sedangkan himpunan 13 bilangan sisanya yaitu $\{10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30\}$ adalah himpunan yang hasil perkalian sebarang dua anggotanya bukan kuadrat sempurna. Berdasarkan pigeon hole principle, jika diambil 7 bilangan dari enam kelompok di atas maka pasti ada setidaknya dua bilangan yang berasal dari kelompok yang sama. Itu berarti hasil perkalian dua bilangan tersebut adalah kuadrat sempurna. Oleh karena itu, jika kita mengambil sebarang $13 + 7 = 20$ bilangan pasti ada setidaknya dua bilangan yang hasil perkaliannya berupa kuadrat sempurna.

Sedangkan untuk $k \le 19$ maka bisa dipilih bilangan dari himpunan berikut sebagai counter example, $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30\}$.

Jadi, nilai terkecil dari k adalah $k = 20$.

19. **Jawaban** : -2^{2013}

Berdasarkan teorema Vieta diperoleh,

$$x_1 + x_2 = -p \text{ dan } x_1x_2 = q + 1$$

oleh karena itu,

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2)^2 = p^2 + (q + 1)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2 = p^2 + q^2 + 2q + 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2q + 2 + x_1^2x_2^2 = p^2 + q^2 + 2q + 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 1 = p^2 + q^2$$

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) = p^2 + q^2$$

Karena $p^2 + q^2$ adalah bilangan prima dan $x_1 \neq x_2$ maka haruslah salah satu dari x_1 atau x_2 sama dengan 0. Dan tanpa mengurangi keumuman, misalkan $x_2 = 0$ sehingga diperoleh $q + 1 = 0 \Leftrightarrow q = -1$. Oleh karena itu, $p^2 + q^2 = p^2 + 1$. Karena $p^2 + 1$ adalah bilangan prima maka haruslah p genap sehingga $p = 2$. Jadi, diperoleh $x_1 = -2$ dan $x_2 = 0$ yang berakibat $x_1^{2013} + x_2^{2013} = -2^{2013}$.

20. Jawaban :

Jika x adalah bilangan bulat maka $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$ sehingga tidak mungkin $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil = 5$. Oleh karena itu x bukan bilangan bulat. Hal ini berakibat $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1$. Sehingga $\lfloor x \rfloor = 2$ dan $\lceil \quad \rceil = 3$. Jadi, $2 < x < 3$.