PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2012

1. **Jawaban : 0 (Tidak ada)**

   Jika n genap maka ruas kanan genap tetapi ruas kiri ganjil. Sedangkan jika n ganjil maka ruas kanan ganjil tetapi ruas kiri genap. Jadi, tidak ada nilai n yang memenuhi.

2. **Jawaban : 1**

   Misal kedua bilangan tersebut adalah a dan b maka $a^2 - b^2 = 2012 \Leftrightarrow (a + b)(a - b) = 2012$. Oleh karena itu, $(a + b)$ dan $(a - b)$ adalah faktor positif dari 2012. Karena faktor positif dari 2012 adalah 1, 2, 4, 503, 1006 dan 2012. Selain itu, karena $(a + b)$ dan $(a - b)$ paritasnya sama maka nilai yang mungkin adalah $a + b = 1006$ dan $a - b = 2$. Sehingga diperoleh, $a = 504$ dan $b = 502$.

3. **Jawaban : 960**

   Perhatikan,

   $$\frac{n^2+x}{n+1} = n - 1 + \frac{x+1}{n+1}$$

   maka agar $\frac{n^2+x}{n+1}$ bulat, haruslah $n + 1$ faktor dari $x + 1$. Oleh karena itu, supaya hanya ada tepat dua nilai n maka $x + 1$ harus memiliki tepat 3 faktor. Dengan kata lain $x + 1$ adalah kuadrat suatu bilangan prima. Jadi, diperoleh $x + 1 = 31^2 = 961$ sehingga $x = 960$.

4. **Jawaban :** $\frac{\binom{15}{4}\binom{11}{4}\binom{7}{4}}{3!}$

   Misal kelompok yang terbentuk adalah A, B, C dan D dengan A, B dan C terdiri dari 4 anggota dan D terdiri dari 3 anggota. Maka :

   • Banyaknya cara menyusun A ada $\binom{15}{4}$

• Banyaknya cara menyusun B ada $\binom{11}{4}$

• Banyaknya cara menyusun C ada $\binom{7}{4}$

Untuk kelompok D tinggal sisanya saja, jadi tidak perlu repot menghitung. Tetapi yang perlu diingat adalah dengan cara ini setiap kasus dihitung sebanyak 3! = 6 kali.

Jadi, jawabannya adalah $\frac{\binom{15}{4}\binom{11}{4}\binom{7}{4}}{3!}$

5. **Jawaban : 290**

Dari keterangan soal diperoleh,

$$a + b + c = 624 \Leftrightarrow a + b = 624 - c$$

dan

$$\frac{ab}{2} = 6864$$

Dengan rumus phytagoras diperoleh

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ &= (a + b)^2 - 2ab \\ &= (624 - c)^2 - 4 \cdot 6864 \\ &= c^2 - 2 \cdot 624c + 624^2 - 4 \cdot 6864 \end{aligned}$$

maka diperoleh $c = 290$

6. **Jawaban : Tak hingga**

Jika $x = k, y = 1 - k$ dan $z = 0$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ maka diperoleh,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &= k^2 + (1 - k)^2 - k(1 - k) \\ &= k^2 + 1 - 2k + k^2 - k + k^2 \\ &= 3k^2 - 3k + 1 \end{aligned}$$

$$= k^3 + 1 + 3k^2 - 3k - k^3$$

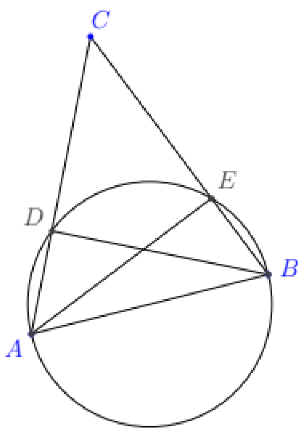
$$= k^3 + (1 - k)^3$$

$$= x^3 + y^3 + z^3$$

ini berarti $(k, 1 - k, 0)$ adalah penyelesaian dari $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = x^3 + y^3 + z^3$. Oleh karena itu, $(k, 1 - k, 0)$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ dan semua permutasinya adalah penyelesaian dari $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = x^3 + y^3 + z^3$ yang tentu saja jumlahnya ada takhingga.

7. **Jawaban : 540**

Perhatikan sketsa gambar di bawah ini!



Perlu diperhatikan bahwa $\angle ADB = \angle CDB = \angle AEB = \angle AEC = 90°$. Misal, $AD = x$ dan $BE = y$ maka $AC = 3x$, $CD = 2x$, $BC = 4y$ dan $CE = 3y$. Dengan teorema Phytagoras pada segitiga *ABD* dan segitiga *BCD* diperoleh

$$30^2 - x^2 = (4y)^2 - (2x)^2 \Leftrightarrow 900 - x^2 = 16y^2 - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 900 = 16y^2 - 3x^2$$

Demikian pula dengan teorema Phytagoras pada segitiga *ABE* dan segitiga *ACE* diperoleh

$$30^2 - y^2 = (3x)^2 - (3y)^2 \Leftrightarrow 900 - y^2 = 9x^2 - 9y^2$$

$$\Leftrightarrow 900 = 9x^2 - 8y^2$$

dengan menggabungkan kedua persamaan di atas didapat,

$$16y^2 - 3x^2 = 9x^2 - 8y^2 \Leftrightarrow 24y^2 = 12x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y^2$$

sehingga kita peroleh

$$900 = 16y^2 - 3x^2 = 16y^2 - 6y^2 = 10y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{90}$$

Oleh karena itu,

$$AE^2 = 900 - y^2 = 900 - 90 = 810 \Leftrightarrow AE = \sqrt{810}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\text{Luas segitiga } ABC &= \frac{1}{2}BC \cdot AE \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4y \cdot \sqrt{810} \\ &= 2 \cdot \sqrt{90}\sqrt{810} \\ &= 2 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = 540\end{aligned}$$

8. **Jawaban : -2012**

Perhatikan,

$$2^a 3^b 4^c 5^d 6^e = 2^a 3^b 2^{2c} 5^d (2 \cdot 3)^e = 2^{a+2c+e} 3^{b+e} 5^d$$

Agar $a + b + c + d + e$ minimal, maka haruslah $a + 2c + e = 0, b + e = 0$ dan $d = 0$. Karena nilai minimum b yang mungkin adalah -2012 maka agar $a + b + c + d + e$ minimum pilih $a =- 2012$ dan $c = 0$. Sehingga $a + b + c + d + e = a =- 2012$.

9. **Jawaban :** $(\sqrt{2012} + \sqrt{2011})^2 - 8045$

$$(\sqrt{2012} + \sqrt{2011})^2 = 2012 + 2011 + 2\sqrt{2012 \cdot 2011}$$

Perhatikan bahwa $2011 < \sqrt{2012 \cdot 2011} < 2012$ sehingga $\sqrt{2012 \cdot 2011} = 2011 + k$.

Akan ditunjukkan bahwa $k < \frac{1}{2}$. Andaikan $k \geq \frac{1}{2}$ maka berakibat

$$\begin{aligned} 2012 \cdot 2011 &= (2011 + k)^2 \\ &\geq (2011 + \tfrac{1}{2})^2 \\ &= 2011^2 + 2011 + \tfrac{1}{4} \\ &> 2011 \cdot 2012 \end{aligned}$$

yang jelas salah. Oleh karena itu, terbukti $k < \frac{1}{2}$ sehingga $0 \leq 2k < 1$.

$$\begin{aligned} (\sqrt{2012} + \sqrt{2011})^2 &= 2012 + 2011 + 2\sqrt{2012 \cdot 2011} \\ &= 4023 + 4022 + 2k \\ &= 8045 + r \end{aligned}$$

sehingga $r = (\sqrt{2012} + \sqrt{2011})^2 - 8045$

10. **Jawaban :** $b > 0$

Jumlahkan kedua fungsi, diperoleh

$$f(x) + g(x) = 2x^2 + 2b$$

sehingga untuk sebarang nilai x jika $b > 0$ maka $f(x) + g(x)$ selalu bernilai positif. Ini berarti paling tidak salah satu dari $f(x)$ atau $g(x)$ bernilai positif. Selanjutnya tinggal dibuktikan, untuk $b \leq 0$ terdapat $x = t$ sehingga $f(t) \leq 0$ dan $g(t) \leq 0$. Untuk itu pilih $t = 0$ sehingga

$$f(t) = f(0) = b \leq 0 \text{ dan } g(t) = g(0) = b \leq 0$$

Jadi, terbukti nilai b yang memenuhi adalah $b > 0$.

11. **Jawaban : 4**

Agar ${}^2log\,(x^2 - 4x - 1)$ bernilai bulat maka $x^2 - 4x - 1 = 2^n$ untuk suatu bilangan bulat n. Karena $x^2 - 4x - 1$ bernilai bulat maka $n \geq 0$. Perhatikan juga,

$$x^2 - 4x - 1 = 2^n \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 1 = 2^n + 4$$
$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 2^n + 5$$

tetapi karena $(x - 2)^2 = 0, 1$ atau 4 mod 8 dan untuk $n \geq 3, 2^n + 5 \equiv 5$ mod 8 maka $n \leq 2$. Jadi, nilai yang memenuhi $n = 0, 1, 2$. Mudah dicek hanya nilai $n = 2$ yang memenuhi dengan memperoleh persamaan kuadrat $x^2 - 4x - 5 = 0$. Jadi, $x_1 + x_2 = 4$.

12. **Jawaban : 420**

Karena $2^7 3^5 5^3 7^2 = 2^6 3^4 5^3 7^2 \cdot 6$, maka banyaknya faktor positif $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 6 sama dengan banyaknya faktor positif dari $2^6 3^4 5^3 7^2$ yaitu ada $(6 + 1) \times (4 + 1) \times (3 + 1) \times (2 + 1) = 420$.

13. **Jawaban :**

Jika 2 soal benar tersebut berasal dari soal tipe B atau S maka peluangnya adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15}$$

Jika 2 soal benar tersebut berasal dari soal tipe pilihan ganda maka peluangnya adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13} \binom{15}{2}$$

Jika 1 soal benar tersebut berasal dari soal tipe B atau S dan 1 soal benar berasal dari pilihan ganda maka peluangnya adalah

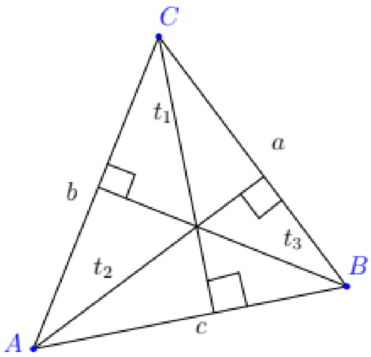
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{14} \binom{15}{1}$$

Jadi, secara keseluruhan peluang menjawab tepat 2 soal benar adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13} \binom{15}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{14} \binom{15}{1}$$

14. **Jawaban : 1**

Perhatikan gambar dibawah ini!



Misalkan sisi-sisi segitiga tersebut adalah *a, b, c* maka diperoleh

$$a + b + c = 3$$

dan

$$a^2 + b^2 + c^2 = 5$$

selain itu kita punya identitas

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

sehingga diperoleh

$$9 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 5 + 2(ab + bc + ac) \Leftrightarrow ab + bc + ac = 2$$

Misalkan pula R jari-jari lingkaran luar dari segitiga ABC maka diketahui $R = 1$.

Dari aturan sinus diperoleh

$$\frac{a}{Sin\ A} + \frac{b}{Sin\ B} + \frac{c}{Sin\ C} = 2R = 2$$

Oleh karena itu, jika t_1, t_2, t_3 berturut-turut adalah garis tinggi yang ditarik dari titik *C, A, B* maka didapatkan

$$t_1 + t_2 + t_3 = b\,Sin\ A + c\,Sin\ B + a\,Sin\ C$$

$$= b \cdot \frac{a}{2} + c \cdot \frac{b}{2} + a \cdot \frac{c}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(ab + bc + ac)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

15. **Jawaban : 83**

Misal tiga bilangan tersebut adalah $t - 2, t + 2$ dengan t bilangan ganjil. Sehingga diperoleh,

$$(t - 2)t(t + 2) = 7 \cdot 3t \Leftrightarrow t^2 - 25 = 0$$

Jika $t = 5$ maka tiga bilangan tersebut adalah 3, 5, 7 sehingga $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$

Jika $t =- 5$ maka tiga bilangan tersebut adalah -7, -5, -3 sehingga $(- 3)^2 + (- 5)^2 + (- 7)^2 = 83.$

16. **Jawaban :** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Dengan Heron formula diperoleh,

$$\text{Luas } \triangle ABC = \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

Selain itu, kita punya

$$\frac{Luas\ \triangle ABD}{Luas\ \triangle ABC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

sehingga diperoleh,

$$\text{Luas } \triangle ABD = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

17. **Jawaban :** $\frac{1666}{6^6}$

Untuk mencari banyak kemungkinan jumlah mata dadu yang muncul berjumlah 27 equivalen dengan mencari banyaknya penyelesaian dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 27$ dimana x_i bilangan bulat dan $1 \leq x_i \leq 6$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Yang setara dengan mencari koefisien x^{27} dari $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6$.
Perhatikan,

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

$$= x(1 + x + x^2 + x^3(1 + x + x^2))$$

$$= x(1 + x + x^2)(1 + x^3)$$

sehingga

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6 = x^6(1 + x^3)^6(1 + x + x^2)^6$$

Dengan Binom Newton didapat,

$$(1 + x^3)^6 = \sum_{i=0}^{6} x^{3i}$$

dan

$$(1 + x + x^2)^6 = \sum_{i=0}^{6} (x^2)^{6-i}(x + 1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{6} x^{12-2i}\left(\sum_{j=0}^{i} x^j\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{6} \sum_{j=0}^{i} x^{12-2i+j}$$

Oleh karena itu didapat

- Koefisien x^9 dari $(x^3 + 1)^6$ adalah 20
- Koefisien x^{12} dari $(x^3 + 1)^6$ adalah 15
- Koefisien x^{15} dari $(x^3 + 1)^6$ adalah 6
- Koefisien x^{18} dari $(x^3 + 1)^6$ adalah 1

selain itu diperoleh juga,

- Koefisien x^{12} dari $(x^2 + x + 1)^6$ adalah 1

- Koefisien x^9 dari $(x^2 + x + 1)^6$ adalah 50
- Koefisien x^6 dari $(x^2 + x + 1)^6$ adalah 141
- Koefisien x^6 dari $(x^2 + x + 1)^6$ adalah 50

Jadi, koefisien x^{27} dari $x^6(1 + x^3)^6(1 + x + x^2)^6$ adalah

$(20 \times 1) + (15 \times 50) + (6 \times 141) + (1 \times 50) = 1666$

Jadi, peluang diperoleh jumlah mata yang muncul sama dengan 27 adalah $\frac{1666}{6^6}$

18. **Jawaban :** $\frac{9}{5}$

Karena $x + 1, 4x - 2$ dan $7 - x$ membentuk sisi-sisi segitiga maka berlaku,

$$(x + 1) + (4x - 2) > 7 - x \text{ sehingga } x > \frac{4}{3}$$

$$(x + 1) + (7 - x) > 4x - 2 \text{ sehingga } x > \frac{5}{2}$$

$$(7 - x) + (4x - 2) > x + 1 \text{ sehingga } x >- 2$$

Oleh karena itu,

- Jika $x + 1 = 4x - 2$ diperoleh $x = 1$ yang jelas tidak mungkin sebab $\frac{4}{3} < x < \frac{5}{2}$
- Jika $x + 1 = 7 - x$ diperoleh $x = 3$ yang jelas tidak mungkin sebab $\frac{4}{3} < x < \frac{5}{2}$
- Jika $7 - x = 4x - 2$ diperoleh $x = \frac{9}{5}$

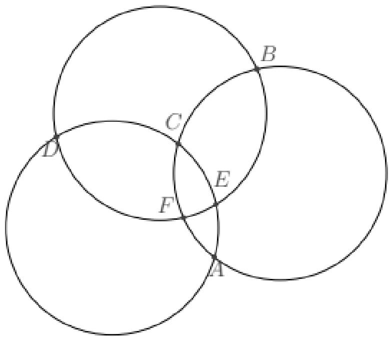
19. **Jawaban :** $\frac{2}{15}$

Susunan yang paling sederhana adalah 2, 3, 4, 5, 6

Untuk memenuhi kondisi pada soal maka masing - masing angka 2, 3, 4, dan 5 hanya bisa digeser ke kanan satu langkah saja. Cara ini ada sebanyak $2^4 = 16$. Sedangkan untuk kemungkinan angka digeser ke kiri tidak perlu kita perhatikan, sebab jika kita menggeser angka ke kiri maka pasti ada angka yang harus digeser ke kanan sehingga sudah masuk perhitungan yang pertama di atas. Oleh karena itu, besar probabilitas adalah $\frac{16}{5!} = \frac{2}{15}$.

20. **Jawaban : 5**

Jika kita menggambar 3 lingkaran pada didang datar maka maksimal akan terbentuk 6 titik potong, seperti gambar berikut.



Karena melalui sebarang 3 titik yang tidak segaris dapat dibentuk sebuah lingkaran yang melalui ketiga titik tersebut, maka dengan membuat dua lingkaran yang masing - masing melalui 3 titik A, B, C, D, E, F akan terbentuk 5 lingkaran dimana terdapat 6 titik yang masing - masing terdapat pada 3 lingkaran, sesuai apa yang diminta.