PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2011

1. **Jawaban : 378**

   Karena $2^7 3^5 5^3 7^2 = 2^6 3^5 5^2 7^2 \cdot 10$, maka banyaknya faktor positif $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 10 sama dengan banyaknya faktor positif $2^6 3^5 5^2 7^2$,

   yaitu ada 7 x 6 x 3 x 3 = 378.

2. **Jawaban : 2521**

   Bilangan bersisa 1 jika dibagi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 berbentuk

   KPK (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) $\cdot\, n + 1 = 2520n + 1$ dengan $n \in \mathbb{Z}$

   Karena yang diminta bilangan asli terkecil lebih dari 2011 maka pilih n = 1. Sehingga

   diperoleh bilangan asli terkecil lebih dari 2011 yang bersisa 1 jika dibagi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 adalah 2521.

3. **Jawaban : 101**

   Perhatikan,

$$\begin{aligned} 2a + 4a + 6a + \cdots + 200a &= 2a(1 + 2 + 3 + \cdots + 100) \\ &= 2a\left(\frac{100(1+100)}{2}\right) \\ &= 101 \cdot 100 \cdot a \end{aligned}$$

   Jadi, nilai a haruslah 101.

4. **Jawaban : 52**

   Misal $n = 10a + b$ dengan $1 \le a \le 6$ dan $0 \le b \le 9$. Maka persamaan pada soal dapat kita tulis menjadi

$$n + p(n) + s(n) = 69 \Leftrightarrow 10a + b + ab + a + b = 69$$
$$\Leftrightarrow 11a + 2b + ab = 69$$
$$\Leftrightarrow (a+2)(b+11) = 91 = 7 \cdot 13$$

Sehingga kemungkinan pasangan nilai $(a + 2, b + 11)$ adalah $(1, 91)$ dan $(7, 13)$ tetapi nilai yang mungkin yaitu $a + 2 = 7$ dan $b + 11 = 13$ maka diperoleh $a = 5$ dan $b = 2$. Oleh karena itu, bilangan n yang dimaksud adalah 52.

5. **Jawaban : 81**

Karena $(111.111.111)^2 = 12345678987654321$, maka jumlah digit - digit dari $(111.111.111)^2$ adalah

$$2(1+2+3+4+5+6+7+8+9) - 9 = 2 \cdot 45 - 9 = 81$$

6. **Jawaban : $\frac{14}{36}$**

• Jumlah sisi atas sama dengan 5. Pasangan yang mungkin adalah (1, 4),(2, 3),(2, 3) dan (4, 1)

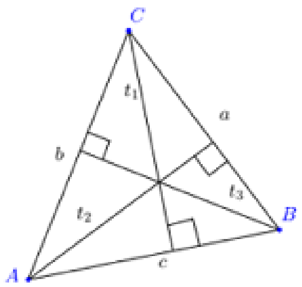
• Jumlah sisi atas sama dengan 7. Pasangan yang mungkin adalah (1, 6),(2, 5),(2, 5),(3, 4),(3, 4) dan (4, 3)

• Jumlah sisi atas sama dengan 9. Pasangan yang mungkin adalah (1, 8),(3, 6),(3, 6) dan (4, 5)

Jadi, peluang agar jumlah kedua sisi atas sama dengan 5, 7, atau 9 adalah $\frac{14}{36}$

7. **Jawaban : 1**

Perhatikan gambar dibawah ini!



Misalkan sisi - sisi segitiga tersebut adalah a, b, c maka diperoleh

$$a + b + c = 5$$

dan

$$a^2 + b^2 + c^2 = 17$$

selain itu kita punya identitas

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

$$25 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 17 + 2(ab + bc + ac) \Leftrightarrow ab + bc + ac = 4$$

Misalkan pula R jari - jari lingkaran luar dari segitiga ABC maka diketahui $R = 2$. Dari aturan sinus diperoleh

$$\frac{a}{Sin\ A} + \frac{b}{Sin\ B} + \frac{c}{Sin\ C} = 2R = 4$$

Oleh karena itu, jika t_1, t_2, t_3 berturut - turut adalah garis tinggi yang ditarik dari titik C, A, B maka didapatkan

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &= b\,Sin\,A + c\,Sin\,b + a\,Sin\,c \\ &= b \cdot \frac{a}{4} + c \cdot \frac{b}{4} + a \cdot \frac{c}{4} \\ &= \frac{1}{4}(ab + bc + ac) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \end{aligned}$$

8. **Jawaban : 1**

Dari soal kita ketahui,

$$m \equiv 3 \pmod 5$$

dan

$$n \equiv 2 \pmod 5$$

sehingga

$$mn \equiv 3 \cdot 2 \equiv 6 \equiv 1 \pmod 5$$

Jadi, mn memberikan sisa 1 jika dibagi 5.

9. **Jawaban :** $\frac{1}{4}$

Perhatikan :

$$\frac{(2^{2010})^2-(2^{2008})^2}{(2^{2011})^2-(2^{2009})^2}=\frac{(2^{2010})^2-(2^{2008})^2}{2^2((2^{2010})^2-(2^{2008})^2)}$$

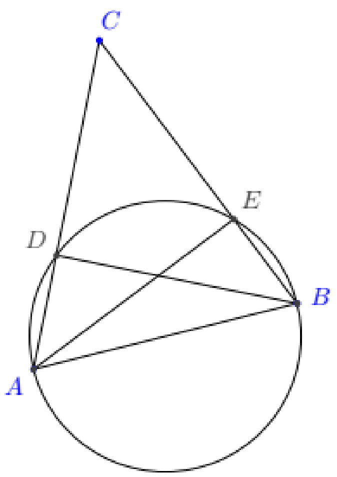
$$=\frac{1}{4}$$

10. **Jawaban : Selasa, Jumat dan Sabtu**

Perhatikan bahwa nama - nama hari berulang setiap 7 hari. Hal ini berarti 28 hari terakhir dari bulan yang dimaksud memiliki jumlah hari Selasa dan Kamis yang sama. Sehingga kita hanya perlu memperhatikan 3 hari pertama dalam bulan tersebut. Agar pada bulan tersebut jumlah hari Selasa dan Kamis sama, maka haruslah pada 3 hari pertama, hari Selasa dan Kamis muncul kedua- duanya atau keduanya tidak muncul sama sekali. Jadi, kemungkinan hari pertama bulan tersebut adalah Selasa, Jumat, dan Sabtu.

11. **Jawaban : 540**

Perhatikan sketsa gambar di bawah ini:



Perlu diperhatikan bahwa $\angle ADB = \angle CDB = \angle AEB = \angle AEC = 90^\circ$. Misal, AD = x dan BE = y maka AC = 3x, CD = 2x, BC = 4y dan CE = 3y. Dengan teorema Phytagoras pada segitiga ABD dan segitiga BCD diperoleh

$$30^2 - x^2 = (4y)^2 - (2x)^2 \Leftrightarrow 900 - x^2 = 16y^2 - 4x^2$$
$$\Leftrightarrow 900 = 16y^2 - 3x^2$$

Demikian pula dengan teorema Phytagoras pada segitiga ABE dan segitiga ACE diperoleh

$$30^2 - y^2 = (3x)^2 - (3y)^2 \Leftrightarrow 900 - y^2 = 9x^2 - 9y^2$$
$$\Leftrightarrow 900 = 9x^2 - 8y^2$$

dengan menggabungkan kedua persamaan di atas didapat,

$$16y^2 - 3x^2 = 9x^2 - 8y^2 \Leftrightarrow 24y^2 = 12x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y^2$$

sehingga kita peroleh

$$900 = 16y^2 - 3x^2 = 16y^2 - 6y^2 = 10y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{90}$$

Oleh karena itu,

$$AE^2 = 900 - y^2 = 900 - 90 = 810 \Leftrightarrow AE = \sqrt{810}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\text{Luas Segitiga } ABC &= \tfrac{1}{2} BC \cdot AE \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot 4y \cdot \sqrt{810} \\ &= 2 \cdot \sqrt{90}\sqrt{810} \\ &= 2 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = 540\end{aligned}$$

12. **Jawaban : 1**

Perhatikan bahwa digit satuan dari 2011^2 adalah 1. Selain itu digit satuan dari 2^{2011} adalah 8. Sehingga digit satuan dari n adalah 9, yang berakibat digit satuan dari n^2 adalah 1.

13. **Jawaban : 588**

$$y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517 \Leftrightarrow y^2(1 + 3x^2) = 10(3x^2 + 1) + 507$$

$$\Leftrightarrow y^2(1+3x^2)-10(3x^2+1)=507$$

$$\Leftrightarrow (3x^2+1)(y^2-10)=507=3\cdot 13^2$$

Terlihat bahwa $(3x^2+1)$ dan (y^2-10) adalah faktor dari 507. Tetapi karena $(3x^2+1)$ positif maka (y^2-10) juga positif, sehingga (y^2-10) adalah faktor positif dari 507. Padahal kita tahu faktor positif dari 507 adalah 1, 3, 13, 39, 169, dan 507. Selain itu, y adalah bilangan bulat maka y^2 merupakan kuadrat sempurna. Jadi, nilai (y^2-10) yang mungkin adalah $(y^2-10)=39 \Leftrightarrow y^2=49$ yang berakibat $(3x^2+1)=13 \Leftrightarrow 3x^2=12$. Oleh karena itu, $3x^2y^2=12\cdot 49=588$.

14. **Jawaban : 23**

Misalkan banyak peserta lomba adalah n, dan misalkan pula peringkat Ali adalah x dengan $n, x \in \mathbb{Z}^+$ dan n kelipatan 3. Karena nilai Ali adalah median maka n dan x pasti ganjil. Selain itu, $x < 37$ dan $x > 31$ sebab jika $x \le 31$ maka $n \le 61$ yang jelas tidak mungkin sebab Charli peringkat 64. Oleh karena itu, ada dua kemungkinan nilai x :

- Jika $x=33$ maka $n=65$ yang jelas tidak mungkin sebab 65 bukan kelipatan 3.
- Jika $x=35$ maka $n=69$

Jadi, banyaknya peserta lomba ada 69 yang berarti banyak sekolah di kota A adalah 23.

15. **Jawaban : 30**

$$3=f(100)=\frac{f(10)}{10}$$

sehingga $f(10)=30$

16. **Jawaban : 8085**

Dengan Binom Newton diperoleh.

$$(1+2x+3x^2)^{10}=\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(1+2x)^{10-i}\cdot(3x^2)^i$$

sehingga x^4 diperoleh ketika $i=0,1,2$

- Jika $i = 0$ diperoleh

$$(1 + 2x)^{10} = \sum_{j=0}^{10} \binom{10}{j} (2x)^j$$

Suku x^4 diperoleh ketika $j = 4$ yaitu

$$\binom{10}{4} (2x)^4 = 3360x^4$$

- Jika $i = 1$ diperoleh

$$\binom{10}{1} (1 + 2x)^9 \cdot 3x^2 = 30x^2 \sum_{j=0}^{9} \binom{9}{j} (2x)^j$$

Suku x^4 diperoleh ketika $j = 2$ yaitu

$$30x^2 \binom{9}{2} (2x)^2 = 4320x^4$$

- Jika $i = 2$ diperoleh

$$\binom{10}{2} (1 + 2x)^8 \cdot (3x^2)^2 = 405x^4 \sum_{j=0}^{8} \binom{8}{j} (2x)^j$$

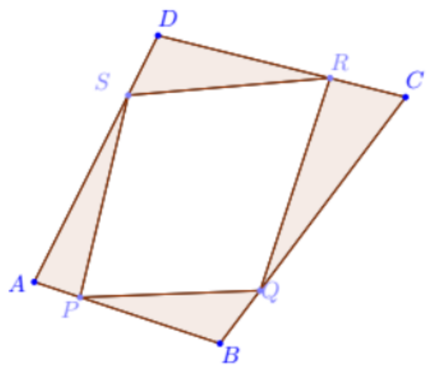
Suku x^4 diperoleh ketika $j = 0$ yaitu

$$405x^4 \binom{8}{0} (2x)^0 = 405x^4$$

Jadi, koefisien x^4 adalah $3360 + 4320 + 405 = 8085$

17. **Jawaban :** $\frac{2}{3}$

Perhatikan gambar di bawah ini!



Misalkan, notasi $[ABC]$ menyatakan luas bidang ABC, maka :

$$[APS] = \frac{1}{k+1}[ABS] = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{k+1}[ABD]$$

$$= \frac{k}{(k+1)^2}[ABD]$$

$$[QCR] = \frac{1}{k+1}[QCD] = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{k+1}[BCD]$$

$$= \frac{k}{(k+1)^2}[BCD]$$

$$[BQP] = \frac{1}{k+1}[BAC] = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{k+1}[ABC]$$

$$= \frac{k}{(k+1)^2}[ABC]$$

$$[SDR] = \frac{1}{k+1}[ADR] = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{k+1}[ADC]$$

$$= \frac{k}{(k+1)^2}[ADC]$$

Jumlahkan keempat persamaan di atas,

$$\frac{k}{(k+1)^2}([ABD] + [BCD] + [ABC] + [ADC]) = [APS] + [QCR] + [BQP] + [SDR]$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{(k+1)^2}([ABCD] + [ABCD]) = \frac{48}{100}[ABCD]$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k}{(k+1)^2} = \frac{12}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{k^2+2k+1} = \frac{6}{25}$$

$$\Leftrightarrow 6k^2 + 12k + 6 = 25k$$

$$\Leftrightarrow 6k^2 - 13k + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3k - 2)(2k - 3) = 0$$

Karena $k < 1$ maka diperoleh $k = \frac{2}{3}$

18. **Jawaban : 20**

Misal, banyak orang dalam kelompok tersebut adalah n maka banyaknya jabat tangan yang terjadi adalah $\binom{n}{2}$. Karena diketahui terjadi 190 jabat tangan, maka

$$\binom{n}{2} = 190 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 190$$

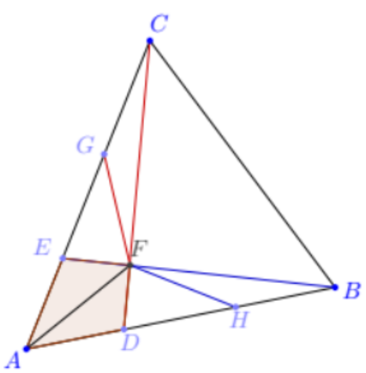
$$\Leftrightarrow n^2 - n - 380 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n - 20)(n + 19) = 0$$

Jadi, diperoleh nilai $n = 20$.

19. **Jawaban : 15**

Perhatikan gambar di bawah ini!



Perlu diketahui bahwa jika dua segitiga memiliki tinggi yang sama maka perbandingan luasnya sama dengan perbandingan alas kedua segitiga tersebut. Dari sini kita dapat,

$$[ACD] = \frac{1}{3}[ABC] = \frac{1}{3} \cdot 90 = 30\ cm^2$$

dan

$$[ABE] = \frac{1}{3}[ABC] = \frac{1}{3} \cdot 90 = 30\ cm^2$$

Misalkan pula, titik G dan H berturut - turut terletak di pertengahan CE dan BD maka $AE = EG = GC$ dan $AD = DH = HB$. Oleh karena itu, diperoleh $[AEF] = [EFG] = [GFC]$ dan $[AFD] = [DFH] = [HFB]$. Sehingga kita peroleh,

$$[ABE] + [ACD] = 30 + 30$$

$$\Leftrightarrow [AEF] + [AFD] + [DFH] + [HFB] + [AFD] + [AEF] + [EFG] + [GFC] = 60$$

$$\Leftrightarrow 4[AEF] + 4[AFD] = 60$$

$$\Leftrightarrow [AEF] + [AFD] = 15$$

$$\Leftrightarrow [ADFE] = 15$$

Jadi, luas segiempat $ADFE$ adalah 15 cm^2.

20. **Jawaban : 2288**

Banyak dadu yang bisa masuk ke kardus yaitu,

$$\left[\frac{50}{3}\right] \cdot \left[\frac{40}{3}\right] \cdot \left[\frac{35}{3}\right] = 16 \cdot 13 \cdot 11$$

$$= 2288$$